

STATECZNOŚĆ PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DWUPASOWYCH DŹWIGARÓW KRATOWYCH PRZY DZIAŁANIU SIŁY SKIEROWANEJ DO BIEGUNA

HENRYK FRĄCKIEWICZ (KIELCE) I JAN MISIAK (RADOM)

Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, poddanych działaniu sił w świetle eulerowskiego kryterium stateczności. Otrzymano układ sześciu równań równowagi dźwigara w stanie wyboczenia płytowego, z których obliczono krytyczną wartość obciążenia zewnętrznego i postać wyboczenia dźwigara. Zbadano wpływ takich parametrów, jak odległość bieguna, który śledzi siła zewnętrzna, oraz sposób obciążenia krytycznego.

WSTĘP

Współczesne dźwigary prętowe, stosowane w konstrukcjach budowlanych, mostowych, dźwignicowych itp., charakteryzują się bardzo dużą liczbą elementów oraz ich powtarzalnością kształtów i cyklicznym rozmieszczeniem. Regularność konstrukcji umożliwia zastosowanie rachunku różnicowego.

Liczne przykłady wykorzystywania równań różnicowych do konstrukcji prętowych są zamieszczone w monografiach [8 i 15]. Wiele pojedynczych zadań dotyczących stateczności różnych przypadków konstrukcji płaskich, zbudowanych z elementów powtarzalnych, zebrano w monografiach [3, 5, 23 i 24]. Metody stosowane w wymienionych pracach polegały na traktowaniu tych konstrukcji jako ram wieloobwodowych. Wiązało się to jednak z kłopotami obliczeniowymi, gdyż stopień trudności wzrastał w miarę zwiększania liczby prętów. Ogólne rozwiązanie stateczności dowolnego układu prętowego oraz przykłady szczególne przedstawili J. BAUER i W. GUTKOWSKI w pracy [2]. Niemniej metoda ta prowadzi do rozwiązania złożonych układów równań przestępnych.

Przybliżoną metodą rozwiązania zagadnienia stateczności jest metoda polegająca na zastąpieniu ośrodka dyskretnego, jakim są ramy i kratownice, zastępczym ośrodkiem ciągłym. Należy tu wymienić pracę Cz. WOŹNIAK [25], w której opracowano teorię ośrodków włóknistych, opartą na modelu ośrodka z mikrostrukturą.

H. FRĄCKIEWICZ w pracy [9] przedstawił przybliżoną metodę obliczania stateczności konstrukcji siatkowych, polegającą na przyjęciu przybliżonego schematu utraty stateczności, umożliwiającego wyznaczenie stateczności za pomocą zależności liniowych. J. MISIAK opierając się na tej ogólnej metodzie rozwiązał w pracach [18, 19 i 20] zagadnienie stateczności dźwigarów kratowych.

W pracy [10] dokonana została analiza wielu parametrów konstrukcyjnych na stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych. Większość wymienio-

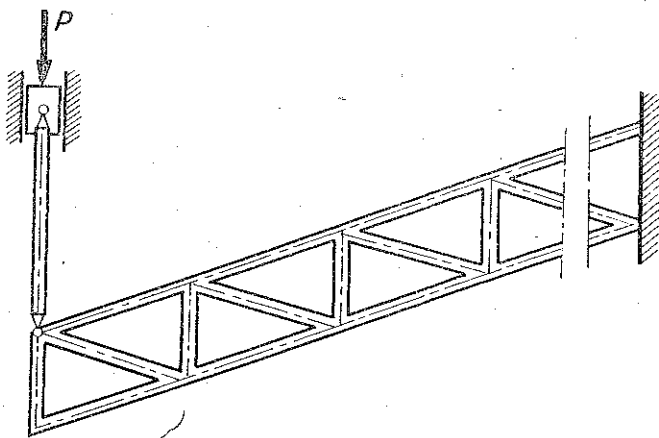
nych prac dotyczyła stateczności układów prętowych, poddanych działaniu sił konserwatywnych.

Pierwsze rozwiązanie stateczności pręta obciążonego siłą śledzącą przedstawił E. L. NIKOŁAJ w pracy [22]. Nieco później ukazał się w literaturze cały szereg pojedynczych zadań, dotyczących stateczności prętów, obciążonych siłami niezachowawczymi, z których należy wymienić prace [4 i 7].

Badaniem problemów stateczności płaskiej postaci zginania belek przy obciążeniach śledzących zajmowali się K. N. GOPAK [14] i M. COMO [6]. Przypadek śledzącej pary sił rozważa Ja. G. ANCIŁEWICZ [1], natomiast stosowność kryterium statycznego i kinetycznego O. R. NIEZALZOW [21].

Oddzielnie wyodrębniwszy interesujący nas problem stateczności przy obciążeniu siłami skierowanymi do bieguna. Optymalnym kształtowaniem prętów przy działaniu tego typu obciążenia zajmowali się A. GAJEWSKI i M. ŻYCKOWSKI w pracach [11, 12 i 13]. Dotychczas brak w literaturze rozwiązań dotyczących wymienionej nieklasycznej stateczności dźwigarów kratowych.

Biorąc powyższe pod uwagę autorzy postawili sobie za cel przedstawienie metody rozwiązania stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, poddanych działaniu sił skierowanych do bieguna, opierając się na eulerowskim kryterium stateczności. Na podstawie tego kryterium zbadano wpływ takich czynników jak sposób obciążenia, sposób wykrzyżowania, odległość bieguna, który śledzi siła zewnętrzna, na stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych. Zbadanie wpływu powyższych parametrów na wartość obciążenia krytycznego ma wielkie znaczenie dla prawidłowego projektowania tych dźwigarów,

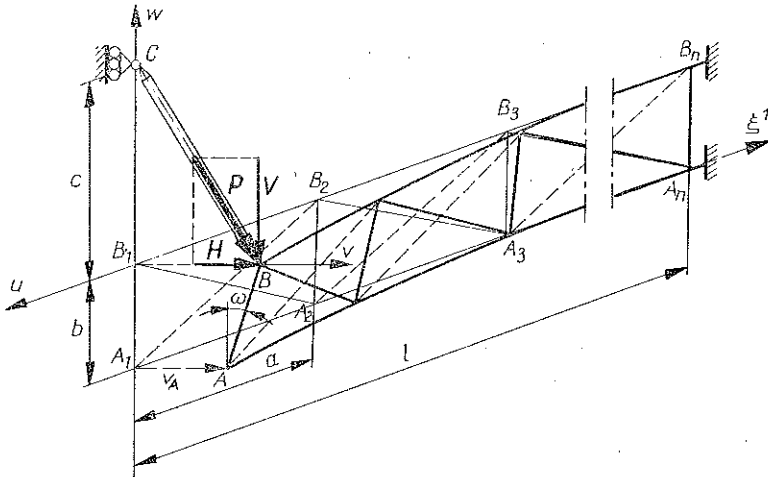


Rys. 1

Należy podkreślić, że w praktyce inżynierskiej stosowane są konstrukcje obciążane siłami skierowanymi do bieguna. Przykładem takiej konstrukcji jest dźwigar przedstawiony na rys. 1.

1. METODA BADANIA STATECZNOŚCI PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DŹWIGARÓW KRATOWYCH PRZY DZIAŁANIU SIŁ SKIEROWANYCH DO BIEGUNA

Przedmiotem rozważań jest regularny, płaski dźwigar kratowy, przedstawiony na rys. 2. Przekroje wszystkich prętów są jednakowe, a ich główne osie bezwładności są odpowiednio prostopadłe i równoległe do płaszczyzny dźwigara. Dźwigar może być obciążony w węzłach górnego i dolnego pasa siłami P skierowanymi do bieguna (przechodzącymi przez punkt stały).



Rys. 2

Rozpatrywane obciążenie jest konserwatywne i zawsze posiada potencjał. Jak wykazał H. LEIPHOLZ [16] przy istnieniu potencjału – kryterium eulerowskie jest zawsze wystarczającym kryterium dla stateczności. Dla problemu stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych istnienie potencjału daje się łatwo wykazać. Po utracie stateczności koniec dźwigara jest na ogół obciążony siłą pionową $V=P$, siłą poziomą H i momentem M_A (rys. 2). Ponieważ przy małych ugięciach przyjmuje się, że $V=P=const$, warunkiem więc istnienia potencjału układu jest warunek

$$(1.1) \quad \frac{\partial H}{\partial \omega} = \frac{\partial M_A}{\partial v_A},$$

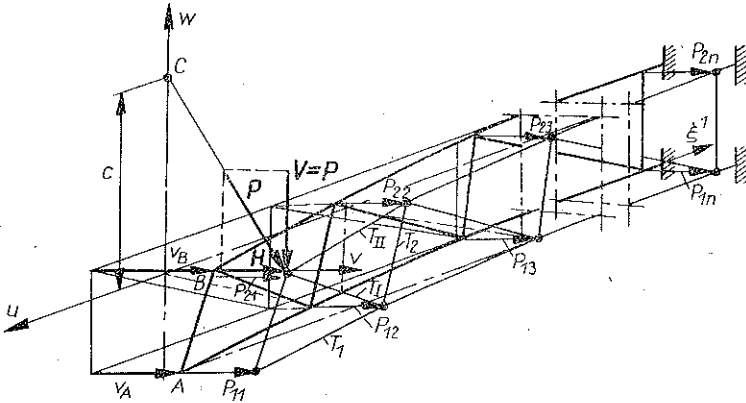
gdzie ω oznacza umowny kąt obrotu (zwichrzenia) na końcu dźwigara, v_A poziomą strzałkę ugięcia dolnego pasa. Jeżeli odległość bieguna od punktu przyłożenia siły oznaczymy przez c , a wysokość dźwigara przez b , to można wyprowadzić wzory

$$(1.2) \quad H = \frac{(v_A + b \sin \omega) P}{c},$$

$$M_A = Vb \sin \omega + Hb \cos \omega = Pb \sin \omega + \frac{v_A + b \sin \omega}{c} Pb \cos \omega,$$

i dla małych kątów ω warunek istnienia potencjału jest spełniony.

Jak to stwierdziliśmy we wstępie, opierać się będziemy na przybliżonej metodzie obliczania wybożenia płytowego płaskich dźwigarów siatkowych, omówionej w pracy [9]. W zastosowaniu do stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, poddanych działaniu sił konserwatywnych, metoda ta została omówiona w pracach [10, 18 i 19]. Według tej metody równaniami stateczności dla dowolnych siatek stają się równania statycznego zginania płyty siatkowej, w których miejsce dowolnego obciążenia zewnętrznego przyjmuje obciążenie szczególne, będące pewną pochodną tarczowego stanu napięć i stanu przemieszczeń, powodujące płytowe wygięcie dźwigara. W pracy [9] przedstawiony został model ilustrujący sposób obliczenia tego obciążenia. Model ten można zastosować do opisan



Rys. 3

zagadnienia stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych, poddanych działaniu sił skierowanych do bieguna. Po nadaniu węzłom tarczy przemieszczeń \tilde{v}_A i \tilde{v}_B powoduje się przejście układu sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty od płaskiej postaci do konfiguracji wygiętej (rys. 3). Rozpatrywane zagadnienie różni się od zwykłego przypadku eulerowskiego tym, że przy wybożeniu w punkcie przyłożenia siły skierowanej do bieguna występuje jej składowa siła, prostopadła do płaszczyzny dźwigara. Ponieważ przy małych ugięciach można przyjąć, że składowa leżąca w płaszczyźnie tarczy jest równa sile P , przeto składowa do niej prostopadła wyraża się wzorem

$$(1.3) \quad H = P \frac{\tilde{v}_B}{c}.$$

Zgodnie z rys. 3 pręty tarczy po nadaniu wspomnianych wychyleń pozostają proste, a płyta wygina się sprężysto. W efekcie siły działające w prętach tarczy (T_1, T_2, T_3, T_H obliczone jako funkcje siły P leżącej w płaszczyźnie tarczy) dają rzut na kierunek prostopadły do jej płaszczyzny i powstałe w ten sposób siły $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n}$ nie mogą być zrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięć i obciążają sprężoną z tarczą płytę. Siły te są liniową funkcją sił tarczowych i założonego wychyleńa płytowego. Oprócz tych sił płytę obciążać będzie siła H (1.3).

Oparte na przedstawionej metodzie etapy rozwiązania rozpatrywanego problemu stateczności są następujące:

- 1) określenie tarczowego stanu napięć jako funkcji obciążenia leżącego w płaszczyźnie tarczy,
- 2) wyprowadzenie równań równowagi płyty obciążonej w węzłach dowolnym obciążeniem,
- 3) obliczenie obciążenia płytowego zgodnie z przedstawionym modelem (jako wypadkowe od sił tarczowych i składowe sił skierowanych do bieguna),
- 4) ustalenie wybojeniowych równań równowagi.

Zgodnie z przyjętą metodą wybojeniowe równania równowagi dla rozpatrywanego dźwigara kratowego mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & E'_{11} \Omega^1_{(\xi^1)} + E'_{12} \Omega^1_{(\xi^1+1)} + E'_{13} \Omega^1_{(\xi^1+2)} + E'_{22} \Omega^2_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}'_{11} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}'_{12} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}'_{21} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1)} + E'_1 v_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}'_1 \tilde{v}_{(\xi^1)} + \tilde{E}'_2 \tilde{v}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & E''_{12} \Omega^1_{(\xi^1+1)} + E''_{21} \Omega^2_{(\xi^1)} + E''_{22} \Omega^2_{(\xi^1+1)} + E''_{23} \Omega^2_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}''_{11} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}''_{21} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1)} + \tilde{E}''_{22} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+1)} + E''_1 v_{(\xi^1)} + E''_2 v_{(\xi^1+1)} + E''_3 v_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}''_1 \tilde{v}_{(\xi^1)} = 0, \\
 & E^I_{12} \Omega^1_{(\xi^1+1)} + E^I_{13} \Omega^1_{(\xi^1+2)} + E^I_{23} \Omega^2_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}^I_{11} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1)} + \tilde{E}^I_{12} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}^I_{13} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}^I_{22} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+1)} + E^I_2 v_{(\xi^1+1)} + E^I_3 v_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}^I_2 \tilde{v}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 (1.4) \quad & E^{II}_{13} \Omega^1_{(\xi^1+2)} + E^{II}_{22} \Omega^2_{(\xi^1+1)} + E^{II}_{23} \Omega^2_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}^{II}_{12} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}^{II}_{21} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}^{II}_{22} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}^{II}_{23} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+2)} + E^{II}_3 v_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}^{II}_1 \tilde{v}_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}^{II}_2 \tilde{v}_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}^{II}_3 \tilde{v}_{(\xi^1+2)} = 0, \\
 & E'_{12} \Omega^1_{(\xi^1+1)} + E'_{21} \Omega^2_{(\xi^1)} + E'_{22} \Omega^2_{(\xi^1+1)} + E'_{23} \Omega^2_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}'_{11} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}'_{12} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}'_{21} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1)} + (E'_1 + E'_{1p}) v_{(\xi^1)} + \left(E'_2 + \frac{P}{c} + E'_{2p} \right) v_{(\xi^1+1)} + \\
 & \quad + (E'_3 + E'_{3p}) v_{(\xi^1+2)} + (\tilde{E}'_1 + \tilde{E}'_{1p}) \tilde{v}_{(\xi^1)} + (\tilde{E}'_2 + \tilde{E}'_{2p}) \tilde{v}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & E''_{12} \Omega^1_{(\xi^1+1)} + E''_{13} \Omega^1_{(\xi^1+2)} + E''_{23} \Omega^2_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}''_{12} \tilde{\Omega}^1_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}''_{21} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1)} + \\
 & \quad + \tilde{E}''_{22} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}''_{23} \tilde{\Omega}^2_{(\xi^1+2)} + (E''_2 + E''_{2p}) v_{(\xi^1+1)} + (E''_3 + E''_{3p}) v_{(\xi^1+2)} + \\
 & \quad + (\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_{1p}) \tilde{v}_{(\xi^1)} + \left(\tilde{E}''_2 + \frac{P}{c} + \tilde{E}''_{2p} \right) \tilde{v}_{(\xi^1+1)} + (\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_{3p}) \tilde{v}_{(\xi^1+2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Jest to układ jednorodny sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej ξ^1 węzłów dźwigara jest sześć składowych $\Omega^1, \Omega^2, v, \tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{v}$ stanu przemieszczenia tych węzłów.

Warunkiem istnienia niezerowych przemieszczeń jest, aby wyznacznik charakterystyczny powyższego układu równań (napisanych dla wszystkich węzłów dźwigara) był równy zero. Warunek ten można przedstawić następująco:

$$(1.5) \quad |A - PB| = 0,$$

gdzie $(A - PB)$ jest macierzą kwadratową współczynników wspomnianego układu równań (1.4), przy czym macierz B nie jest macierzą jednostkową. Współczynnik

tej macierzy jest wielomianem n -tego stopnia ze względu na zewnętrzne obciążenie P . Stopień ten jest liczbą stopni swobody wszystkich węzłów dźwigara. Wspomniany wyżej warunek (1.5) sprowadza się do równania

$$(1.6) \quad W(P) = 0.$$

Z rozwiązania tego równania otrzymuje się układ sił krytycznych P . Nas interesuje przede wszystkim najmniejsza wartość siły krytycznej P oraz odpowiadająca jej postać wyboczenia dźwigara.

Operatory równań (1.4) posiadają następującą postać:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} E_{11}^1 = E_{13}^1 &= a\psi, & E_{12}^1 &= -\frac{4a^2 b^2 \eta + a^4 \mu}{A^3} - 2a\psi - \frac{4a^2 \alpha}{b}, \\ E_{22}^1 = E_{12}^2 = \tilde{E}_{22}^2 = \tilde{E}_{12}^{\text{II}} &= \frac{a^2 b^2 (\mu - 4\eta)}{A^3}, & \tilde{E}_{11}^1 = E_{13}^1 &= \frac{a^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\ \tilde{E}_{12}^1 = E_{12}^1 &= -\frac{2a^2 \alpha}{b}, & \tilde{E}_{21}^1 = \tilde{E}_{11}^2 = E_{23}^1 = E_{13}^{\text{II}} &= -\frac{a^2 b^2 (2\eta + \mu)}{A^3}, \\ E_2^1 = -\tilde{E}_2^1 = E_2' &= -\tilde{E}_{12}'' = -\left(\frac{6ab\eta}{A^3} + \frac{6a\alpha}{b^2}\right), \\ \tilde{E}_1^1 = -E_2^2 = \tilde{E}_1^2 = -E_3^1 &= -E_3^{\text{II}} = \tilde{E}_2^{\text{II}} = -E_{22}' = -\tilde{E}_{11}' = \\ &= -\tilde{E}_{21}' = E_{13}'' = E_{23}'' = \tilde{E}_{22}'' = \frac{6ab\eta}{A^3}, \\ \tilde{E}_2' = -E_2^1 = -\tilde{E}_{12}' = E_{12}'' &= \frac{6a\alpha}{b^2}, & E_{21}^2 = E_{22}^1 &= -\frac{2b^2}{a}, \\ E_{22}^2 = \tilde{E}_{22}^{\text{II}} &= -\left(\frac{8b^2}{a} + \frac{4a^2 b^2 \eta + b^4 \mu}{A^3} + \gamma b\right), \\ \tilde{E}_{21}^2 = E_{23}^{\text{II}} &= \frac{b^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, & \tilde{E}_{22}^2 = E_{22}^{\text{II}} &= b\gamma, \\ E_1^2 = -E_3^2 = -E_{21}' &= E_{23}' = \frac{6b}{a^2}, & \tilde{E}_{11}^{\text{I}} = \tilde{E}_{13}^{\text{I}} &= \delta a, \\ \tilde{E}_{12}^{\text{I}} &= -\left(\frac{a^4 \mu + 4a^2 b^2 \eta}{A^3} + 2a\delta + \frac{4a^2 \alpha}{b}\right), & \tilde{E}_{21}^{\text{II}} &= -\frac{2b^2 \beta}{a}, \\ \tilde{E}_1^{\text{II}} = -\tilde{E}_3^{\text{II}} = -\tilde{E}_{21}'' &= \tilde{E}_{23}'' = \frac{6b\beta}{a^2}, & E_1' = E_3' &= \frac{12}{a^3}, \\ E_2' &= -12\left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3}\right), & \tilde{E}_1' = E_3' &= \frac{12\eta}{A^3}, & \tilde{E}_2' = E_2'' &= \frac{12\alpha}{b^3}, \\ \tilde{E}_1'' = \tilde{E}_3'' &= \frac{12\beta}{a^3}, & \tilde{E}_2'' &= -12\left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3}\right), \end{aligned}$$

$$(1.7) \quad \begin{aligned} E'_{1p} &= \frac{T_1(\xi^1)}{a_1 a}, & E'_{2p} &= -\frac{1}{a_1} \left[\frac{T_1(\xi^1+1) + T_1(\xi^1)}{a} + \frac{T_I(\xi^1)}{A} + \frac{T_2(\xi^1+1)}{b} \right], \\ E'_{3p} &= \frac{T_1(\xi^1+1)}{a_1 a}, & \tilde{E}'_{1p} &= \frac{T_I(\xi^1)}{a_1 A}, & \tilde{E}'_{2p} &= \frac{T_2(\xi^1+1)}{a_1 b}, & E'_{2p} &= \frac{T_2(\xi^1+1)}{a_1 b}, \\ E''_{3p} &= \frac{T_I(\xi^1+1)}{a_1 A}, & \tilde{E}''_{1p} &= \frac{T_{II}(\xi^1)}{a_1 a}, & \tilde{E}''_{3p} &= \frac{T_{II}(\xi^1+1)}{a_1 a}, \\ \tilde{E}''_{2p} &= -\frac{1}{a_1} \left[\frac{T_{II}(\xi^1) + T_{II}(\xi^1+1)}{a} + \frac{T_2(\xi^1+1)}{b} + \frac{T_I(\xi^1+1)}{A} \right], \end{aligned}$$

gdzie $a, b, A = (a^2 + b^2)^2$ oznaczają długości odpowiednich prętów, $\alpha, \beta, \eta, \mu, \gamma, \delta, \psi$ stosunki sztywności zginania i skręcania poszczególnych prętów oraz T_1, T_2, T_I, T_{II} wewnętrzne siły tarczowe (dla konkretnego dźwigara obliczamy je ze statyki tarczy i wyrażamy jako funkcje obciążenia zewnętrznego P).

Wartości przemieszczeń węzłów fikcyjnych dla rozpatrywanych warunków brzegowych są następujące:

1. Dla brzegu swobodnego, nie obciążonego — wartości przesunięć i obrotów wynoszą

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1 &= \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1, & \tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2 &= \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, & \tilde{v}_{(\xi^1-1)} &= \tilde{v}_{(\xi^1)} + ab\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\ \Omega_{(\xi^1-1)}^1 &= \left[\frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] v_{(\xi^1)} + \left[1 + \frac{4b^2 a\eta + a^3 \mu}{\psi A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \left[\frac{b^2 (4a\eta - a\mu)}{\psi A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \\ &+ \left[-\frac{6b\eta}{\psi A^3} \right] \tilde{v}_{(\xi^1)} + \left[\frac{a^3 \mu - 2b^2 a\eta}{\psi A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[\frac{ab^2 (\mu - 4\eta)}{\psi A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\ \Omega_{(\xi^1-1)}^2 &= \left[\frac{a^3 (\eta - \mu)}{A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \left[1 + \frac{a^3 \eta + ab^2 \mu}{A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \\ &+ \left[\frac{a^3 (\mu - \eta)}{A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[-\frac{a^3 \eta + ab^2 \mu}{A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2, \\ v_{(\xi^1-1)} &= \left[1 + \frac{a^3 \eta}{A^3} \right] v_{(\xi^1)} + \left[\frac{ba^4 (2\eta - \mu)}{2A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^1 + \\ &+ \left[ab + \frac{a^2 b^2 (b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3} \right] \Omega_{(\xi^1)}^2 + \left[-\frac{a^3 \eta}{A^3} \right] \tilde{v}_{(\xi^1)} + \\ &+ \left[\frac{ab^4 \mu}{2A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \left[-\frac{a^2 b (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3} \right] \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2. \end{aligned}$$

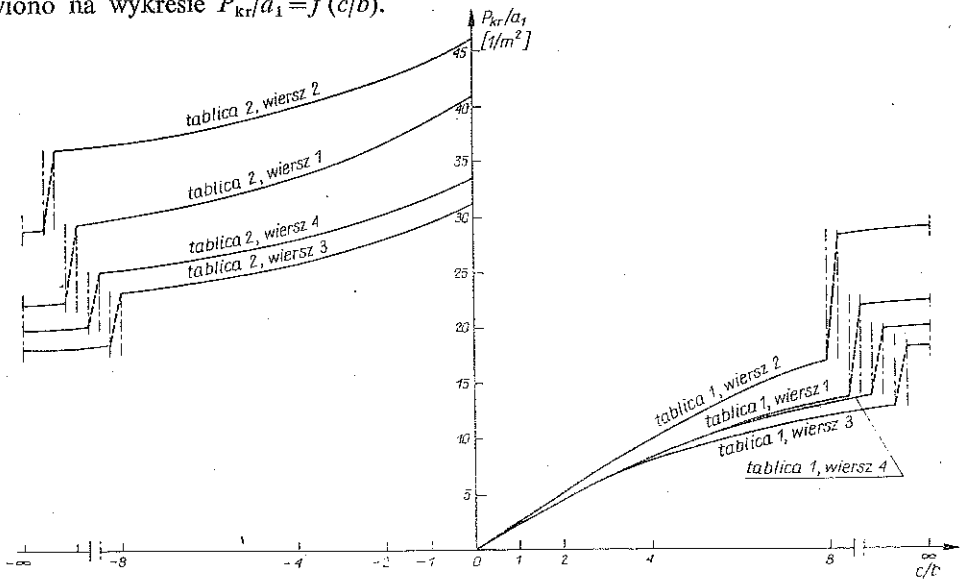
2. Brzeg sztywno zamocowany charakteryzuje się tym, że przesunięcia i obroty węzłów są równe

$$(1.9) \quad \begin{aligned} [v]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega^1]_{\xi^1=n} &= 0, & [\Omega^2]_{\xi^1=n} &= 0, \\ [\tilde{v}]_{\xi^1=n} &= 0, & [\tilde{\Omega}^1]_{\xi^1=n} &= 0, & [\tilde{\Omega}^2]_{\xi^1=n} &= 0. \end{aligned}$$

2. WYNIKI OBLICZEŃ SIŁ KRYTYCZNYCH I POSTACI WYBOCZENIA

Obliczenie z równań (1.4) krytycznej wartości zewnętrznego obciążenia P dokonuje się za pomocą metody numerycznej, która została opisana w pracach [17 i 18].

Dla przykładów zestawionych w tablicach 1 i 2 obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prętów o przekrojach osiowoosymetrycznych o wymiarach gabarytowych dźwigara $l=3a=0,75$ m, $b=0,125$ m i sztywności zginania pasa a_1 (kGm^2), leżącego na linii parametrycznej ξ^1 . Zamieszczone w tych tablicach najmniejsze wartości sił krytycznych odpowiadają różnym sposobom obciążenia i wykratowania dźwigara, jak również kolejnym odległościom punktów (biegunów), do których skierowane jest obciążenie zewnętrzne. Ponadto zależności powyższe przedstawiono na wykresie $P_{kr}/a_1=f(c/b)$.



Rys. 4

W tablicy 1 zamieszczono wartości sił krytycznych dla przypadku obciążenia skierowanego do bieguna, znajdującego się powyżej punktu przyłożenia obciążenia (dodatnie wartości odległości c). Jak widać z wykresu (rys. 4) wartości te rosną od zera (przy $c/b=0$) do wartości skończonej odpowiadającej obciążeniu siłą konserwatywną (przy $c/b=\infty$).

Obciążenie krytyczne, odpowiadające biegunom znajdującym się poniżej punktu przyłożenia obciążenia (ujemne wartości odległości c tablica 2), rośnie od wartości odpowiadających siłom konserwatywnym (przy $c/b=-\infty$) do wartości skończonych (przy $c/b=0$).

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że punkty na wykresie przy $c/b=0$ są punktami osobliwymi. Eulerowskie kryterium stateczności daje w tych punktach niejednoznaczne rozwiązania. Szczegółową analizą stateczności dźwigara w otoczeniu punktu $c/b=0$ zajmiemy się w następnej pracy.

Tablica 1

Kol.	a	b	c
Wiersz	Odległość bieguna c [m]	Wartość siły krytycznej P_{kr} [kG]	Postacie wybożenia wybranych dźwigarów
1	0	0	
	0,125	2,338585 a_1	
	0,250	4,560182 a_1	
	0,5	8,386091 a_1	
	1	13,384737 a_1	
	∞	22,596325 a_1	
2	0	0	
	0,125	2,548166 a_1	
	0,25	5,127589 a_1	
	0,5	9,941747 a_1	
	1	16,818458 a_1	
	∞	28,994302 a_1	
3	0	0	
	0,125	2,399839 a_1	
	0,25	4,559526 a_1	
	0,5	8,005073 a_1	
	1	11,994178 a_1	
	∞	18,254378 a_1	
4	0	0	
	0,125	2,350006 a_1	
	0,25	4,597403 a_1	
	0,5	8,443149 a_1	
	1	13,183010 a_1	
	∞	20,375361 a_1	

Tablica 2

Wiersz	Kol.	a	b	c
		Odstęłość bieguna c [m]	Wartość siły krytycznej P_{kr} [kG]	Postacie wybożenia wybranych dźwigarów
1	0	0	$40,997385 a_1$	<p>$P_{kr} = 36,865645 a_1$ [kG]</p>
	-0,125	-0,125	$38,773445 a_1$	
	-0,25	-0,25	$36,865645 a_1$	
	-0,5	-0,5	$33,879327 a_1$	
	-1	-1	$30,226093 a_1$	
	$-\infty$	$-\infty$	$22,596325 a_1$	
2	0	0	$46,185739 a_1$	<p>$P_{kr} = 42,514490 a_1$ [kG]</p>
	-0,125	-0,125	$44,163671 a_1$	
	-0,25	-0,25	$42,514490 a_1$	
	-0,5	-0,5	$39,940475 a_1$	
	-1	-1	$36,713019 a_1$	
	$-\infty$	$-\infty$	$28,994302 a_1$	
3	0	0	$31,230526 a_1$	<p>$P_{kr} = 28,124302 a_1$ [kG]</p>
	-0,125	-0,125	$29,562724 a_1$	
	-0,25	-0,25	$28,124302 a_1$	
	-0,5	-0,5	$25,905479 a_1$	
	-1	-1	$23,301798 a_1$	
	$-\infty$	$-\infty$	$18,254378 a_1$	
4	0	0	$33,544546 a_1$	
	-0,125	-0,125	$31,710777 a_1$	
	-0,25	-0,25	$30,213017 a_1$	
	-0,5	-0,5	$28,002459 a_1$	
	-1	-1	$25,472396 a_1$	
	$-\infty$	$-\infty$	$20,375361 a_1$	

Analiza wpływu sposobu obciążenia na wartość obciążenia krytycznego wykazała bardziej korzystne jego przyłożenie do węzłów dolnego pasa. Z porównania sposobów wykratowania prętów wynika, że dźwigary przedstawione w 3 i 4 wierszu (tablice 1 i 2) są korzystniej wykratowane, niż dźwigary zamieszczone w wierszu 1 i 2.

Wszystkim obliczonym najmniejszym wartościom sił krytycznych odpowiadają postacie wyboczenia dźwigarów. Przykładowo w kolumnie c (tablice 1 i 2) przedstawiono postacie wybranych dźwigarów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Я. Г. Анцилевич, *Устойчивость плоской формы изгиба консоли при действии следящей пары сил*, Труды ЛПИ, no. 299, 176-182, 1968.
2. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Lądowej 19, 1, 1973.
3. F. BLEICH, H. N. BLEICH, *Buckling strength of metal structures*, Mc Graw-Hill, 1952, *Устойчивость металлических конструкций*, Гос. Изд. Физматгиз, — Матем. Лит., Москва 1959.
4. В. В. БОЛОТИН, *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, 1961.
5. G. BÜRGERMEISTER, H. STEUP, *Stabilitätstheorie I*, Berlin 1957.
6. M. COMO, *Lateral buckling of a cantilever subjected to a transverse follower force*, Int. J. Solids and Struct., 3, 515-523, 1966.
7. Г. Ю. Джанелизе, *Об устойчивости стержня под действием следящей силы*, Труды ЛПИ, no. 192, 1958.
8. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
9. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., 23, 4, 1971.
10. H. FRĄCKIEWICZ, J. MISIAK, *Analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych*, Rozpr. Inż., 23, 1, 1975.
11. A. GAJEWSKI, *Pewne problemy optymalnego kształtowania pręta ściskanego siłą skierowaną do biegun*, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, 8, 2, 1970.
12. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do biegun*, Rozpr. Inżyn., 17, 2, 1969.
13. A. GAJEWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Optimal design of elastic columns subject to the general conservative behaviour of loading*, Zeitsch. angew. Math. Physik, 5, 806-818, 1970.
14. К. Н. ГОПАК, *Устойчивость плоской формы изгиба консольной балки — полосы, нагруженной следящей силой*, Изв. АН СССР, Мех. и Машино., 4, 133-136, 1962.
15. W. GUTKOWSKI, *Regularne konstrukcje prętowe*, PWN, Warszawa 1973.
16. H. LEIPHOLZ, *Über den Einfluss des Dämpfung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe*, Ingenieur-Archiv., 1964.
17. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
18. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
19. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych o pasach równoległych*, Rozpr. Inżyn., 21, 1, 1973.
20. J. MISIAK, *Analiza stateczności dźwigarów kratowych poddanych działaniu sił zachowawczych*, Rozpr. Inżyn., 23, 1, 1975.
21. О. Р. НЕЗАЛЗОВ, *Тезисы докл. 4 Всесоюз. Конф. по пробл. устойчивости*, 178, Москва 1972.

22. Е. Л. Николай, *Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня*, Изв. ЛПИ, 31, 1928.
23. S. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill, 1961. *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.
24. А. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Москва 1967.
25. Cz. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powierzchniowe*, Warszawa 1970.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛОСКОГО ТИПА ИЗГИБА ДВУХПОЯСНЫХ ФЕРМ ПРИ ДЕЙСТВИИ СИЛЫ НАПРАВЛЕННОЙ К ПОЛЮСУ

Предметом работы является задача устойчивости плоского типа изгиба ферм подвергнутых действию сил в свете критерия устойчивости по Эйлеру. Получена система шести уравнений равновесия фермы в состоянии плиточного продольного изгиба, из которых вычислены критическое значение внешней нагрузки и вид продольного изгиба фермы. Исследовано влияние таких параметров, как: значение расстояния полюса, который следит внешняя сила, способ критической нагрузки.

SUMMARY

STABILITY OF PLANE BENDING SHAPE OF TWO-LAYER LATTICE GIRDER UNDER ACTION OF A FORCE DIRECTED TO THE POLE

The paper deals with the problem of stability of plane bending shape of lattice girders under action of tracing forces in the light of Euler criterion stability. The system of six equilibrium equations for the girder in a plate buckling state is obtained from which the critical value of external load and buckling shape of girder are evaluated. The influence of such parameters as the value of pole distance which is traced by external force, the way of loading and crossing the bars on the value of critical load was examined.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 marca 1974 r.