

PRZYSZYNEK DO WYZNACZANIA STANU ODKSZTAŁCENIA SPRĘŻYN O DOWOLNEJ GEOMETRII

PAWEŁ CZERWIŃSKI

W pracy podano metodę wyznaczania stanu odkształcenia sprężyny o dowolnej geometrii. Współczynniki równania różniczkowego jednorodnego (4.2) są wyznaczone przez funkcje określające krzywiznę i skręcenie. Z tego względu w pracy dokonano klasyfikacji postaci tego równania z punktu widzenia własności geometrycznych osi sprężyny, tj. krzywizny i skręcenia. Otrzymanym w ten sposób równaniom przyporządkowano rodzaje sprężyn — według nowego zaproponowanego w pracy ich podziału — i podano sposoby rozwiązywania tych równań.

W zakończeniu pracy podano przykład rozwiązywania równania (4.2) dla walcowej sprężyny śrubowej o zmiennym skoku, który ilustruje zastosowanie wyprowadzonych w niej wzorów.

I. WSTĘP

Zasadniczym celem pracy jest określenie metody wyznaczania stanu odkształcenia sprężyny o dowolnej geometrii. Sprężynami nazywamy elementy maszyn, wykonane z materiału, który podlega małym odkształceniom pod wpływem przyłożonych obciążeń, w których duże przemieszczenia uzyskano dzięki nadaniu ich materiałom szczególnej geometrii. Pod pojęciem szczególnej geometrii rozumiemy tu zarówno kontur i kształt przekroju poprzecznego sprężyny oraz charakter jego zmiany, jak również *krzywiznę i skręcenie* linii śrubowej sprężyny. Współczynniki odpowiedniego równania różniczkowego jednorodnego są wyznaczone przez funkcje określające krzywiznę i skręcenie.

Z tego względu w pracy dokonano klasyfikacji postaci tego równania z punktu widzenia własności geometrycznych osi sprężyny, tj. krzywizny i skręcenia. Dla otrzymanych w ten sposób równań podano sposoby ich rozwiązywania. W tabelicy 1 zamieszczono wzory określające własności geometryczne powszechnie znanych sprężyn, ale stan odkształcenia jest znany tylko dla sprężyn podanych w wierszach 1–3 [3, 10 i 1].

Niniejsza praca podaje metodę pokonania pierwszej i zasadniczej trudności stojącej na drodze do wyznaczenia stanu odkształcenia dla sprężyn podanych przykładowo w wierszu 4–5 lub mówiąc ogólniej — dla *sprężyn o dowolnej geometrii*.

Równania sprężyn podane w tabelicy są związane z prawoskrętnym prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych. Oś z pokrywa się z osią sprężyny.

Symbole użyte we wzorach tabelicy 1 mają następujące znaczenie:

- t kąt obrotu wokół osi sprężyny,
- r promień sprężyny,
- r_1, r_2 mały i duży promień sprężyny,

h skok sprężyny,
 n liczba zwojów sprężyny,
 α kąt nachylenia osi zwojów sprężyny,
 2γ kąt rozwarcia stożka,

$$m = \frac{1}{2\pi n} \ln \left| \frac{r_2}{r_1} \right|,$$

$$b = r_1 \operatorname{ctg} \gamma$$

$$A = \sqrt{a^2 r_1^2 + b^2 m^2},$$

$$a^2 = 1 + m^2,$$

$$a_0 = \frac{r_2 - r_1}{2\pi n},$$

$$b_0 = \frac{h}{2\pi}.$$

Tablica 1

Lp.	Nazwa sprężyny i jej (*) równanie parametryczne	Wzory		$\frac{dt}{ds}$
		krzywizna k	skreślenie κ	
1	Śrubowa walcowa o stałym skoku (rys. 1a, b, c) $x = r \cos t, y = r \sin t, z = rat$	$\frac{1}{r(1+\alpha^2)}$	$\frac{\alpha}{r(1+\alpha^2)}$	$\frac{1}{r\sqrt{1+\alpha^2}}$
2	Stożkowa o stałym kącie pochylenia osi zwojów (rys. 1d) $x = r_1 e^{mt} \cos t, y = r_1 e^{mt} \sin t, z = b(e^{mt} - 1)$	$\frac{ar_1}{A^2 e^{mt}}$	$\frac{bm}{A^2 e^{mt}}$	$\frac{1}{A^2 e^{mt}}$
3	Śrubowa paraboliczna $x = r(\cos t + t \sin t), y = r(\sin t - t \cos t), z = \frac{rt^2}{2c \operatorname{tg} \alpha}$	$\frac{\cos^2 \alpha}{rt}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha}{rt}$	$\frac{\cos \alpha}{rt}$
4	Śrubowa walcowa o zmiennym skoku $x = r \cos t, y = r \sin t, z = r(e^t - 1)$	$\frac{\sqrt{1+2e^{2t}}}{r\sqrt{1+e^{2t}}}$	$\frac{2e^t}{r(1+2e^{2t})}$	$\frac{1}{r\sqrt{1+e^{2t}}}$
5	Stożkowa o stałym skoku $x = (r_2 - a_0 t) \cos t, y = (r_2 - a_0 t) \sin t, z = b_0 t$	Znajdują się w pracy [10, s. 35]		

(*) Opis symboli podano w tekście.

2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Odształcenie osi pręta sprężyny jest jednoznacznie określone, jeżeli są znane następujące wektory: wektor kąta obrotu dowolnego elementu pręta $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$; wektor kąta obrotu przekroju poprzecznego pręta $\beta = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$; wektor przemieszczenia dowolnego punktu pręta $w = \{w_1, w_2, w_3\}$.

Między składowymi dwóch pierwszych wektorów zachodzą następujące proste związki:

$$(2.1) \quad \varphi_1 = \beta_1, \quad \varphi_2 = \beta_2 - \frac{Q_3}{\alpha_3 GF}, \quad \varphi_3 = \beta_3 + \frac{Q_2}{\alpha_2 GF}.$$

W tych wzorach Q_2, Q_3 oznaczają obciążenia działające w kierunku osi y i z , $1/\alpha_2, 1/\alpha_3$ współczynniki rozkładu naprężeń stycznych na powierzchni przekroju, G moduł oskształcenia postaciowego oraz F pole przekroju pręta.

Zależności między składowymi wektora przemieszczenia w i wektora kąta obrotu φ nie są już takie proste:

$$(2.2) \quad \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{ds} \mathbf{e}_1 + \varphi \times \mathbf{e}_1,$$

$$\frac{d}{ds} (\varphi_1 \times \mathbf{e}_1) + \frac{d}{ds} \left(\mathbf{e}_1 \times \frac{dw}{ds} \right) = \psi^{(M)} + \frac{d}{ds} (\mathbf{e}_1 \times \epsilon^{(Q)}),$$

gdzie

$$(2.3) \quad \psi^{(M)} = \{ \psi_1^{(M)}, \psi_2^{(M)}, \psi_3^{(M)} \} = \left\{ \frac{M_1}{GI_1}, \frac{M_2}{EI_2}, \frac{M_3}{EI_3} \right\},$$

$$\epsilon^{(Q)} = \{ \epsilon_1^{(Q_1)}, \epsilon_2^{(Q_2)}, \epsilon_3^{(Q_3)} \} = \left\{ \frac{Q_1}{EF}, \frac{Q_2}{\alpha_2 GF}, \frac{Q_3}{\alpha_3 GF} \right\}$$

są to związki fizyczne, znane z wytrzymałości materiałów.

Te dwa różniczkowe równania wektorowe, jak wiadomo, są równoważne układowi sześciu różniczkowych równań skalarnych. Wszakże można je przekształcić do dwóch równań różniczkowych niejednorodnych trzeciego rzędu ze względu na φ_1 i w_1 oraz czterech wzorów [1, s. 277]. Równania różniczkowe jednorodne tych równań są identyczne i mają postać

$$(2.4) \quad \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k} \frac{d\varphi_1}{ds} \right) \right] + \frac{d}{ds} \left(\frac{\kappa}{k} \varphi_1 \right) + \frac{\kappa}{k} \frac{d\varphi_1}{ds} = 0.$$

Przeło jedna z najważniejszych trudności merytorycznych, wyznaczenia stanu odkształcenia sprężyny o dowolnej geometrii, sprowadza się do rozwiązania jednego równania różniczkowego (2.4) rzędu trzeciego jednorodnego. Przyjmujemy następującą kolejność postępowania: najpierw dokonamy podziału sprężyn ze względu na krzywiznę i skręcenie, co pozwoli nam z kolei przypisać do tak dokonanego podziału odpowiednie warianty równania (2.4); następnie poszukamy algorytmu rozwiązania najtrudniejszej odmiany tego równania i wreszcie podamy poglądowy przykład zastosowania tego algorytmu.

3. PODZIAŁ SPRĘŻYN

W literaturze przedmiotu [7, s. 264] podziału sprężyn dokonuje się najczęściej z punktu widzenia warunków pracy oraz celu zastosowania połączenia sprężystego. Niekiedy w tym podziale uwzględnia się rodzaj naprężenia pojawiającego się w materiale sprężyny, jak to pokazano na rys. 1 zaczerpniętym z pracy [2, s. 571].

Jak widać ze wzoru (2.4) na stan odkształcenia sprężyny ma również wpływ jej geometria (krzywizna i skręcenie). Wykorzystamy ten fakt w sposób naturalny dla podziału sprężyn na *przestrzenne* i *plaskie*. Sprężyny, w których linie osi mają krzywizny i skręcenia różne od zera, nazywać będziemy *sprężynami przestrzennymi*

gdzie t oznacza kąt obrotu wokół osi z oraz s – długość łuku. W wyniku tego otrzymamy równanie różniczkowe rzędu trzeciego jednorodne związane z prostokątnym kartezjańskim układem współrzędnych:

$$(4.2) \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \frac{1}{k\kappa} + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \left\{ \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \left[\frac{1}{k} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \right) + \frac{2}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{3}{k\kappa} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right) \right\} + \frac{d\varphi_1}{dt} \left\{ \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k} \right) + \frac{1}{\kappa} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{k} \right) \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \cdot \frac{1}{k} \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right) + \frac{3}{\kappa} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right) + \frac{1}{k\kappa} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{dt}{ds} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{dt}{ds} \left[\frac{1}{k\kappa} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{dt}{ds} \right) \right]^2 + \frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right] + \varphi_1 \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left(\frac{k}{\kappa} \right) \right\} = 0.$$

Równanie (4.2) odnosi się do specjalnych sprężyn śrubowych, podczas gdy dla sprężyn śrubowych równanie to nieco się uprości, ponieważ zniknie ostatni wyraz, gdyż $d/dt(k/\kappa) = 0$. Oprócz tego dla sprężyn podanych w 2 i 3 wierszu tablicy 1 znika również drugi wyraz równania (4.2). Dla zwyczajnych sprężyn śrubowych równanie (4.2) uprości się znacznie i przyjmie postać

$$(4.3) \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} \left(\frac{dt}{ds} \right)^3 \frac{1}{k\kappa} + \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{dt}{ds} \left(\frac{k}{\kappa} + \frac{\kappa}{k} \right) = 0.$$

Widzimy więc, że w najogólniejszym przypadku, gdy oś pręta sprężyny jest opisana krzywą przestrzenną, dla której $k \neq \text{const}$, $\kappa \neq \text{const}$ i $k/\kappa \neq \text{const}$ równanie (4.2) jest równaniem trzeciego rzędu o współczynnikach zmiennych. Współczynniki te, jak pokażemy to w p. 6, zawsze można przedstawić w postaci pewnych wielomianów zmiennej niezależnej. Uwzględniając ten fakt, współczynniki równania (4.2) przy pochodnych i funkcji możemy zapisać jak następuje:

$$\sum_{\lambda=0}^m a_{3\lambda} t^\lambda, \quad \sum_{\lambda=0}^m a_{2\lambda} t^\lambda, \quad \sum_{\lambda=0}^m a_{1\lambda} t^\lambda, \quad \sum_{\lambda=0}^m a_{0\lambda} t^\lambda,$$

gdzie $\lambda = 0, 1, 2, \dots, m$.

Tak więc, równanie (4.2) przyjmie nową postać:

$$\frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} \sum_{\lambda=0}^m a_{3\lambda} t^\lambda + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \sum_{\lambda=0}^m a_{2\lambda} t^\lambda + \frac{d\varphi_1}{dt} \sum_{\lambda=0}^m a_{1\lambda} t^\lambda + \varphi_1 \sum_{\lambda=0}^m a_{0\lambda} t^\lambda = 0,$$

a to z kolei da się napisać krócej:

$$(4.4) \quad \sum_{v=0}^3 \left(\sum_{\lambda=0}^m a_{v\lambda} t^\lambda \right) \frac{d^v \varphi_1}{dt^v} = 0,$$

przy czym $d^0 \varphi_1 / dt^0 = \varphi_1$.

Dla specjalnych sprężyn śrubowych wielomiany w równaniu (4.4) są tego rodzaju, że uniemożliwiają otrzymanie rozwiązania efektywnego lub w postaci kwadratury [4, s. 20 – 23].

5. ALGORYTM POSZUKIWANIA ROZWIĄZAŃ RÓWNIANIA (4.4)

Literatura poświęcona rozwiązywaniu różniczkowych równań zwyczajnych udziela mniej miejsca dla równań różniczkowych rzędu $n \geq 3$ niż dla równań rzędu $n=2$. Typowe tłumaczenie tego faktu znajduje się w pracy [8, s. 199].

Z tego względu zajmiemy się formalno-rachunkową stroną algorytmu poszukiwania rozwiązań równania (4.4) metodą rozwinięcia w szereg i porównania współczynników; dla rozszerzenia wzorów, które wprowadzimy na równania o wyższych rzędach od trzech, przyjmijmy $v=1, 2, 3, \dots, n$ i $m=0, 1, 2, \dots$. Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu

$$(5.1) \quad \varphi_1 = \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{\beta} t^{\mu+\beta},$$

gdzie μ jest pewną liczbą rzeczywistą. Postać rozwiązania podana w pracy [6, s. 12]

$$(5.2) \quad \varphi_1 = t^{\mu} \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{\beta} t^{\beta}$$

jest rachunkowo mniej wygodna, gdyż obliczanie kolejnych pochodnych sprawia więcej kłopotów. Tak więc, ze związku (5.1) wynika, że v -ta pochodna wyraża się wzorem

$$(5.3) \quad \frac{d^v \varphi_1}{dt^v} = \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{\beta} (\mu + \beta)(\mu + \beta - 1) \dots (\mu + \beta - v + 1) t^{\mu + \beta - v},$$

gdzie $v=0, 1, 2, 3, \dots$.

Wprowadzimy symbol

$$(5.4) \quad \rho(\mu, \beta, v) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } v=0, \\ (\mu + \beta)(\mu + \beta - 1) \dots (\mu + \beta - v + 1), & \text{gdy } v=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Dzięki niemu wzór (5.3) przyjmie postać

$$(5.5) \quad \frac{d^v \varphi_1}{dt^v} = \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{\beta} \rho(\mu, \beta, v) t^{\mu + \beta - v},$$

gdzie $v=0, 1, 2, 3, \dots$ oraz $d^0 \varphi_1 / dt^0 = \varphi_1$.

Po podstawieniu (5.5) do (4.4) otrzymamy

$$(5.6) \quad \sum_{v=0}^n \left[\left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{v\lambda} t^{\lambda} \right) \left(\sum_{\beta=0}^{\infty} (b_{\beta} \rho(\mu, \beta, v) t^{\mu + \beta - v}) \right) \right] = 0.$$

Lewą stronę \mathcal{L} równania (5.6) przekształcamy, stosując formalne twierdzenie Cauchy'ego o iloczynie szeregów [11, s. 198 - 199], do postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{v=0}^n \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^t a_{vj} t^j b_{t-j} \rho(\mu, t-j, v) t^{\mu + t - j - v} \right] \right\} = \\ &= \sum_{v=0}^n \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^t a_{vj} b_{t-j} \rho(\mu, t-j, v) t^{\mu + t - v} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Wprowadzimy drugi z kolei symbol

$$(5.7) \quad \sigma(\mu, v, i) = \sum_{j=0}^i a_{vj} b_{i-j} \rho(\mu, i-j, v).$$

Uwzględniając go, poprzednią zależność napiszemy w postaci

$$\mathcal{Z} = \sum_{v=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(\mu, v, i) t^{\mu+i-v} \right\} = t^{\mu} \sum_{v=0}^n \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(\mu, v, i) t^{i-v} \right\}.$$

Niech $s = i - v$; skąd

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \mathcal{Z} &= t^{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{v=0}^n \sigma(\mu, v, i) t^{i-v} = t^{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{s=i-n}^i \sigma(\mu, i-s, i) t^s = \\ &= t^{\mu} \left\{ \sum_{s=-n}^{-1} \left[\sum_{i=0}^{s+n} \sigma(\mu, i-s, i) \right] t^s + \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i=s}^{s+n} \sigma(\mu, i-s, i) \right] t^s \right\} = \\ &= t^{\mu} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=0}^{i-1} \sigma(\mu, i, i-l) \right] t^{-l} + \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i=s}^{s+n} \sigma(\mu, i-s, i) \right] t^s \right\} = \\ &= t^{\mu} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{l=i}^n \sigma(\mu, i, i-l) \right] t^{-l} + \sum_{s=0}^{\infty} \left[\sum_{i=0}^n \sigma(\mu, i, i+s) \right] t^s \right\}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma(\mu, i, i-l)$ jest określone wzorami (5.7) i (5.4)

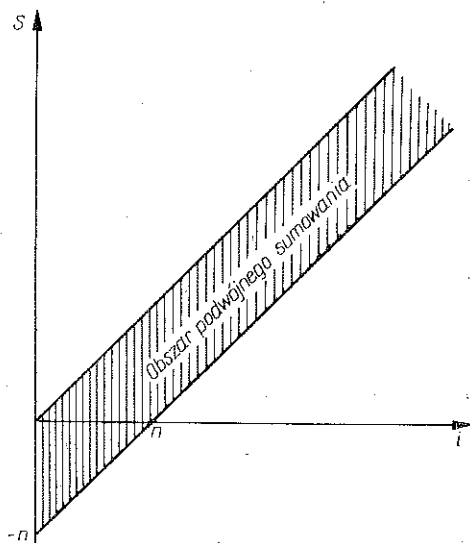
Przyrównując w równaniu (5.8) do zera współczynniki przy potęgach: $t^{\mu-n}$, $t^{\mu-n+1}$, $t^{\mu-n+2}$, ..., otrzymamy nieskończony ciąg równań:

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \sum_{i=l}^n \sigma(\mu, i, i-l) &= 0, & l=1, 2, 3, \dots, n, \\ \sum_{i=0}^n \sigma(\mu, i, i+s) &= 0, & s=0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Wzory (5.9) znakomicie upraszczają obliczanie współczynników szeregu (5.1) w przypadku, kiedy współczynniki równania (4.4) są wielomianami wysokich stopni, co zachodzi dla sprężyn, których

$k \neq \text{const}$, $\kappa \neq \text{const}$ i $k/\kappa \neq \text{const}$. Z tych wzorów otrzymuje się równanie wskaźnikowe służące do wyznaczenia μ ; następnie wylicza się b_0, b_1, b_2, \dots .

Podstawiając znalezione współczynniki do wzoru (5.1) otrzymujemy niekiedy n liniowo niezależnych całek równania (4.4). Jeżeli się zdarzy, że całki są liniowo zależne, to brakujące rozwiązania można znaleźć metodami opisanymi w pracy [8, s. 200 - 210].



Rys. 2

Wyprowadzone w tym paragrafie wzory (5.9) są poprawne dla równania

$$(5.10) \quad \sum_{v=0}^n \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{v\lambda} t^\lambda \right) \frac{d^v \varphi_1}{dt^v} = 0,$$

przy czym $d^0 \varphi_1 / dt^0 = \varphi_1$, albo po podstawieniu do (5.10) $\varphi_1 = y$, $t = x$

$$(5.11) \quad \sum_{v=0}^n \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{v\lambda} t^\lambda \right) \frac{d^v y}{dx^v} = 0,$$

które zawiera jako szczególny przypadek równanie postaci

$$(5.12) \quad x^n y^n + x^{n-1} p_1(x) y^{n-1} + \dots + x p_{n-1}(x) y + p_n(x) y = 0,$$

gdzie $p_k(x) = p_{0k} + p_{1k}x + p_{2k}x^2 + \dots$

Równanie (5.12) jest rozważane w pracy [8, s. 201] jako równanie ogólne. Łatwo zauważyć, że wzory (5.9) dla równania (5.12) znacznie się uproszczą.

6. PRZYKŁAD

Rozwiążemy równanie (4.2) dla sprężyny, której linię śrubową opisują równania:

$$(6.1) \quad x = r \cos t, \quad y = r \sin t, \quad z = r(e^t - 1).$$

Jest to sprężyna, którą zaliczymy wg podziału podanego w p. 3 do klasy specjalnych sprężyn śrubowych.

Do wyznaczenia krzywizny k i skręcenia κ potrzebne są podane niżej pochodne promienia wodzącego \mathbf{r} linii śrubowej [wzór (6.1)]

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \mathbf{r}^I &= r \{-\sin t, \cos t, e^t\}, \\ \mathbf{r}^{II} &= r \{-\cos t, -\sin t, e^t\}, \\ \mathbf{r}^{III} &= r \{\sin t, -\cos t, e^t\}. \end{aligned}$$

Krzywizna wyraża się wzorem [5, s. 179]

$$(6.3) \quad k = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{II}|}{|\mathbf{r}|^3}.$$

Wiemy, że

$$(6.4) \quad |\mathbf{r}| = r \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + e^{2t}} = r \sqrt{1 + e^{2t}},$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{r}^{II} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -r \sin t & r \cos t & r e^t \\ -r \cos t & -r \sin t & r e^t \end{vmatrix} = r^2 \{e^t [\mathbf{e}_1 (\cos t + \sin t) + \mathbf{e}_2 (\sin t - \cos t)] + \mathbf{e}_3\}, \\ |\mathbf{r} \times \mathbf{r}^{II}| &= r^2 \sqrt{1 + 2e^{2t}}. \end{aligned}$$

Podstawienie wzorów (6.4) i (6.5) do wzoru (6.3) prowadzi do wzoru

$$(6.6) \quad k = \frac{\sqrt{1+2e^{2t}}}{r(\sqrt{1+e^{2t}})^3}.$$

Skreślenie określa wzór [5, s. 179]

$$(6.7) \quad \kappa = \frac{|\mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}})|}{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|^2}.$$

Wiadomo, że

$$(6.8) \quad \mathbf{r}(\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \begin{vmatrix} -r \sin t & r \cos t & re^t \\ -r \cos t & -r \sin t & re^t \\ r \sin t & -r \cos t & re^t \end{vmatrix} = 2r^3 e^t.$$

Podstawienie wzorów (6.8) i (6.5) do wzoru (6.7) daje

$$(6.9) \quad \kappa = \frac{2e^t}{r(1+2e^{2t})}.$$

Do wyznaczenia współczynników równania (4.2) potrzebna będzie jeszcze pochodna kąta t względem długości łuku s linii śrubowej. Zgodnie ze wzorem (6.4) otrzymujemy wzór

$$(6.10) \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{r\sqrt{1+e^{2t}}}.$$

Oprócz tego potrzebne nam będą następujące pochodne. Pierwsza pochodna $1/k$ względem t

$$(6.11) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{re^{2t} \sqrt{1+e^{2t}} (1+4e^{2t})}{(1+2e^{2t})^{3/2}}.$$

Druga pochodna $1/k$ względem t

$$(6.12) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{k} \right) = \frac{r(16e^{8t} + 28e^{6t} + 17e^{4t} + 2e^{2t})}{(1+2e^{2t})^{5/2} (1+e^{2t})^{1/2}}.$$

Pierwsza pochodna $1/\kappa$ względem t

$$(6.13) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\kappa} \right) = \frac{r(2e^{2t} - 1)}{2e^t}.$$

Po podstawieniu do równania (4.4) następujących wzorów: (6.6), (6.9) – (6.13) i wykonaniu wskazanych w tym równaniu działań otrzymamy

$$(6.14) \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} \frac{(1+2e^{2t})^{1/2}}{2re^t} + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} \frac{(1+2e^{2t})^{1/2} (2e^{2t} - 1)}{2e^t r(1+e^{2t})} + \\ + \frac{d\varphi_1}{dt} \frac{8e^{8t} + 32e^{6t} + 30e^{4t} + 10e^{2t} + 1}{2re^t (1+e^{2t})^2 (1+2e^{2t})^{3/2}} - \varphi_1 \frac{(1+2e^{2t})^{1/2} (2e^{4t} + 1)}{2e^t r(1+e^{2t})^3} = 0.$$

W celu otrzymania w równaniu (6.14) współczynników w postaci wielomianów sprowadzamy równanie do wspólnego mianownika. W ten sposób otrzymamy

$$(6.15) \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} (4e^{10t} + 16e^{8t} + 25e^{6t} + 19e^{4t} + 7e^{2t} + 1) + \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} (8e^{10t} + 20e^{8t} + 14e^{6t} - e^{4t} - 4e^{2t} - 1) + \frac{d\varphi_1}{dt} (8e^{10t} + 40e^{8t} + 62e^{6t} + 40e^{4t} + 11e^{2t} + 1) - \varphi_1 (8e^{8t} + 8e^{6t} + 6e^{4t} + 4e^{2t} + 1) = 0.$$

Przy rozwiązywaniu równania niejednorodnego należy pamiętać, że jego prawą stronę trzeba pomnożyć przez wyrażenie (wspólny mianownik)

$$2re^t (1 + e^{2t})^3 (1 + 2e^{2t})^{3/2}.$$

Po uwzględnieniu w równaniu (6.15) następujących zależności: $z = e^t$

$$\frac{d^3 \varphi_1}{dt^3} = 8z^3 \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} + 24z^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + 8z \frac{d\varphi_1}{dz},$$

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = 4z^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} + 4z \frac{d\varphi_1}{dz}, \quad \frac{d\varphi_1}{dt} = 2z \frac{d\varphi_1}{dz}$$

i uporządkowaniu otrzymamy

$$(6.16) \quad \frac{d^3 \varphi_1}{dz^3} (32z^8 + 128z^7 + 200z^6 + 152z^5 + 56z^4 + 8z^3) + \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} (128z^7 + 46z^6 + 656z^5 + 452z^4 + 152z^3 + 20z^2) + \frac{d\varphi_1}{dz} (80z^6 + 288z^5 + 380z^4 + 288z^3 + 62z^2 + 6z) - \varphi_1 (8z^4 + 8z^3 + 6z^2 + 4z + 1) = 0.$$

W tym równaniu współczynniki mają postać wielomianów, a zatem możemy zastosować wzory (5.9). Dla wygody obliczeń symbole współczynników i ich wartości numeryczne zestawiono w tabelicy 2. Równania (5.9) w zastosowaniu do rozwiązywanego równania różniczkowego (6.16) prowadzą do tabelicy 2.

Tablica 2

$a_{38} = 32$	$a_{37} = 128$	$a_{36} = 200$	$a_{35} = 152$	$a_{34} = 56$	$a_{33} = 8$
$a_{27} = 128$	$a_{26} = 464$	$a_{25} = 656$	$a_{24} = 452$	$a_{23} = 152$	$a_{22} = 20$
$a_{16} = 80$	$a_{15} = 288$	$a_{14} = 380$	$a_{13} = 288$	$a_{12} = 62$	$a_{11} = 6$
	$a_{04} = -9$	$a_{03} = -8$	$a_{02} = -6$	$a_{01} = -6$	$a_{00} = -1$

Dla $s=0$ i $n=3$ otrzymujemy

$$(6.17) \quad \sum_{i=0}^3 \sigma(\mu, i, i) = \sigma(\mu, 0, 0) + \sigma(\mu, 1, 1) + \sigma(\mu, 2, 2) + \sigma(\mu, 3, 3) = 0,$$

gdzie na podstawie wzorów (5.7), (5.4) i tablicy 2 znajdziemy $\sigma(\mu, 0, 0) = a_{00} b_0$
 $\rho(\mu, 0, 0) = -b_0$,

$$\begin{aligned}\sigma(\mu, 1, 1) &= \sum_{j=0}^1 a_{1j} b_{1-j} \rho(\mu, 1-j, 1) = a_{10} b_1 \rho(\mu, 1, 1) + a_{11} b_0 \rho(\mu, 0, 1) = \\ &= 6b_0 \mu, \\ \sigma(\mu, 2, 2) &= \sum_{j=0}^2 a_{2j} b_{2-j} \rho(\mu, 2-j, 2) = a_{20} b_2 \rho(\mu, 2, 2) + a_{21} b_1 \rho(\mu, 1, 2) + \\ &+ a_{22} b_0 \rho(\mu, 0, 2) = 20b_0 \mu(\mu-1), \\ \sigma(\mu, 3, 3) &= \sum_{j=0}^3 a_{3j} b_{3-j} \rho(\mu, 3-j, 3) = a_{30} b_3 \rho(\mu, 3, 3) + a_{31} b_2 \rho(\mu, 2, 3) + \\ &+ a_{32} b_1 \rho(\mu, 1, 3) + a_{33} b_0 \rho(\mu, 0, 3) = 8b_0 \mu(\mu-1)(\mu-2).\end{aligned}$$

Podstawiając otrzymane wartości do równania (6.17) otrzymamy po uporządkowaniu tzw. równanie wskaźnikowe:

$$b_0(2\mu-1)(4\mu^2+1)=0.$$

Rozwiązanie tego równania daje

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = -\frac{i}{2}, \quad \mu_3 = \frac{i}{2},$$

przy czym możemy przyjąć $b_0 = 1$.

Należy więc przypuszczać, że istnieją trzy rozwiązania liniowo niezależne równania (6.16) w postaci następujących szeregów:

$$\begin{aligned}(6.18) \quad \varphi_1^{(1)} &= C_1 z^{1/2} \left(1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{1\beta} z^\beta \right), \\ \varphi_1^{(2)} &= C_2 z^{i/2} \left(1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{2\beta} z^\beta \right), \\ \varphi_1^{(3)} &= C_3 z^{-i/2} \left(1 + \sum_{\beta=1}^{\infty} b_{3\beta} z^\beta \right).\end{aligned}$$

Współczynniki dla tych szeregów od b_1 do b_5 obliczymy ze wzoru (5.9) zmieniając w nim s od 1 – 5. Natomiast pozostałe współczynniki można obliczyć z następującego wzoru rekurencyjnego powstałego także ze wzoru (5.9) (jest on poprawny dla $s \geq 5$, przy czym $r = 0, 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned}(6.19) \quad b_r [a_{16}(\mu+r) + a_{27}(\mu+r)(\mu+r-1) + a_{38}(\mu+r)(\mu+r-1)(\mu+r-2)] + \\ + b_{r+1} [a_{04} + a_{15}(\mu+r+1) + a_{26}(\mu+r+1)(\mu+r) + a_{37}(\mu+r+1)(\mu+r) \times \\ \times (\mu+r-1)] + b_{r+2} [a_{03} + a_{14}(\mu+r+2) + a_{25}(\mu+r+2)(\mu+r+1) + \\ + a_{36}(\mu+r+2)(\mu+r+1)(\mu+r)] + b_{r+3} [a_{02} + a_{13}(\mu+r+3) + \\ + a_{24}(\mu+r+3)(\mu+r+2) + a_{35}(\mu+r+3)(\mu+r+2)(\mu+r+1)] +\end{aligned}$$

$$(6.19) \quad +b_{r+4} [a_{01} + a_{12}(\mu+r+4) + a_{23}(\mu+r+4)(\mu+r+3) + a_{34}(\mu+r+4)(\mu+r+3)(\mu+r+2)] + b_{r+5} [a_{00} + a_{11}(\mu+r+5) + a_{22}(\mu+r+5)(\mu+r+4) + a_{33}(\mu+r+5)(\mu+r+4)(\mu+r+3)] = 0.$$

[c.d.]

7. WNIOSKI

1. Równanie (4.4) dla specjalnych sprężyn śrubowych można rozwiązać metodą rozwinięcia w szereg i równych współczynników, albo w przypadku gdy $\lambda < v$ metodą podaną w pracy [8, s. 214, pkt 6].

2. W dyscyplinach technicznych coraz większego znaczenia nabierają równania różniczkowe zwyczajne rzędu trzeciego.

3. Wydaje się, że podział sprężyn z punktu widzenia ich geometrii jest podziałem poglądowym, gdyż daje pogląd o różnicach w stanach odkształcenia poszczególnych sprężyn i z tego powodu powinien znaleźć odbicie w Polskich Normach.

LITERATURA

1. P. CZERWIŃSKI, *Stan odkształcenia śrubowej sprężyny paraboloidalnej*, Archiwum Budowy Maszyn, 20, 2, 1973.
2. В. А. Добровольский, К. И. Заблонский, С. А. Мак, А. С. Радчик, Л. Б. Эрих, *Детали машин*, Машигиз, Москва 1962.
3. E. GRODZKI, *Obliczanie walcowych sprężyn śrubowych*, Praca doktorska, Politechnika Poznańska, Poznań 1970.
4. R. GUTOWSKI, *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa 1971.
5. E. KARAŚKIEWICZ, *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa 1964.
6. N. W. McLACHLAN, *Funkcje Bessela dla inżynierów*, PWN [tłum. z angielskiego], Warszawa 1964.
7. W. MOSZYŃSKI, *Wykład elementów maszyn. Cz. I*, PWT, Warszawa 1955.
8. George M. MURPHY, *Ordinary differential equations and their solutions*, 1960.
9. G. RAKÓWSKI, R. SOLECKI, *Pręty zakrzywione*, Arkady, Warszawa 1965.
10. W. SAŁATA, *Obliczanie sprężyn stożkowych*. Praca doktorska. Politechnika Poznańska, Poznań 1971.
11. W. ŻAKOWSKI, *Matematyka. Część II*, WNT, Warszawa 1970.

Резюме

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДЕФОРМАЦИОННОГО СОСТОЯНИЯ ПРУЖИН ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В работе дается метод определения деформационного состояния пружины произвольной геометрии. Коэффициенты дифференциального однородного уравнения (4.2) определяются функциями обозначающими кривизну и кручение. Из-за этого в работе проведена классификация вида этого уравнения с точки зрения геометрических свойств оси пружины т.е. кривизны и кручения. Полученным таким образом уравнениям ставят в соответствие роды пружин—согласно новопредложенному в работе их разделению—и даются способы решения этих уравнений.

В заключению работы приведен пример решения уравнения (4.2) для цилиндрической винтовой пружины с переменным шагом, который иллюстрирует применение выведенных в работе формул.

SUMMARY

A CONTRIBUTION TO THE DEFINITION OF THE STATE OF DEFORMATION OF SPRINGS WITH ARBITRARY GEOMETRY

This paper presents the method of defining the state of deformation of springs of arbitrary geometry. Coefficients of the homogeneous differential equation (4.2) are determined by the functions defining the curvature and torsion. Therefore in this paper classification of this from of equation is made from the point of view of geometric properties of the spring axle, i.e., of its curvature and torsion. To the equations obtained in this way, the kinds of spring have been assigned according to their new division proposed in this paper; new methods of solution of these equations have been given.

In conclusion, the paper presents an example of solution of Eq. (4.2) for the cylindrical screw spring of variable pitch showing the application of the formulae derived.

Praca została złożona w Redakcji dnia 4 czerwca 1974 r.
