

## STAN NAPRĘŻENIA W PÓŁPŁASZCZYŹNIE O WZMOCNIONEJ KRAWĘDZI

JAN GRABĄCKI, GWIDON SZEFER (KRAKÓW)

W pracy podano rozwiązanie zagadnienia półpłaszczyzny o brzegu wzmocnionym pasmem płytowym. Rozwiązanie skonstruowane zostało przy użyciu transformacji Fouriera, uogólnionej na przestrzeń ultradystybcji. Otrzymane rezultaty porównano z dotychczas znanymi, przy czym uwzględniono zarówno aspekt jakościowy jak i ilościowy. Jako ilustrację zamieszczono przykłady liczbowe. Zakończenie stanowią wnioski o charakterze postulatów praktycznych.

### 1. WSTĘP

Problem półpłaszczyzny o wzmocnionej krawędzi należy do tych zadań, których rozwiązanie obok walorów czysto poznawczych ma istotne znaczenie praktyczne. W zależności od charakteru wzmocnienia oraz ewentualnych dodatkowych założeń może on być traktowany jako idealizacja rozmaitych konstrukcji lub ich części spotykanych w praktyce inżynierskiej. Jako przykład wymienić można belkę podsuwnicową. Przykład ten jest o tyle charakterystyczny, że belki podsuwnicowe należą do tych elementów konstrukcji hal przemysłowych, które najczęściej ulegają uszkodzeniom. Szereg obserwacji charakteru tych uszkodzeń oraz ich związku z czasem eksploatacji skłania do przypuszczenia, iż przyczyną może być zmęczenie materiału.

Racjonalne uwzględnienie zmęczenia w wymiarowaniu wymaga znajomości rzeczywiście panującego w środku stanu naprężenia, wywołanego obciążeniami eksploatacyjnymi. Tymczasem znane rozwiązania półpłaszczyzny o wzmocnionej krawędzi skonstruowane zostały przy dosyć daleko idących założeniach upraszczających.

Pierwszą pracą podejmującą wymieniony w tytule problem jest pochodząca z roku 1932 praca MELANA [1]. Rozwiązany w niej został przypadek półpłaszczyzny, której krawędź wzmocniona została prętem pryzmatycznym, a obciążenie stanowi para przeciwnie skierowanych sił, działających wzdłuż osi pręta.

Następnym badaczem, który podjął temat, był GIRKMANN. W pracy [2] pochodzącej z roku 1936 podał on rozwiązanie dla półpłaszczyzny o krawędzi wzmocnionej prętem pryzmatycznym lecz w przypadku, gdy obciążenie stanowi siła skupiona, przyłożona do pręta i działająca normalnie do jego osi. Rozwiązanie skonstruowane zostało przy założeniu, że naprężenia styczne wzdłuż kontaktu pręta i półpłaszczyzny równe są zeru. Wyniki tej pracy zyskały szerokie zastosowanie w praktyce projektowej i do chwili obecnej są podstawą normowych zasad wymiarowania belek podsuwnicowych.

W roku 1950 BROUDE w pracy [3] adaptował wyniki GIRKMANNNA dla belek nitowanych uwzględniając jednocześnie wpływ uźebrowania őrnodnika na rozkład naprężeń kontaktowych.

Następnym badaczem, który podjął temat jest SZEREMIETIEW. Uzyskane wyniki opublikował w pracach [4 i 5] odpowiednio w roku 1961 oraz 1963. Zwłaszcza druga z wymienionych prac stanowi istotny krok naprzód pod względem adekwatności rozważanego modelu. SZEREMIETIEW podał w niej rozwiązanie dla pasma tarczowego, którego obydwie krawędzie wzmocnione są prętami przyzmatycznymi. Obciążenie stanowią siły styczne i normalne przyłożone do wzmocnienia zarówno górnego jak i dolnego. W pracy obok konstrukcji rozwiązania znaleźć można przykład liczbowy. Autor dochodzi do dwu istotnych spostrzeżeń. Zgodnie z pierwszym z nich pomijane dotychczas naprężenia styczne osiągnają znaczne wartości, zgodnie zaś z drugim — zastąpienie pasma tarczowego modelującego őrnodnik półpłaszczyzną prowadzi do istotnych błędów jedynie w przypadku przekrojów «krępych».

Wymienione wyżej prace <sup>(1)</sup> mają, jak łatwo zauważyć, pewną cechę wspólną. Posługują się mianowicie modelem, w którym stan naprężenia we wzmocnieniu daje się opisać wystarczająco dokładnie formułami elementarnej wytrzymałości materiałów. Wyniki można więc uznać za dokładne jedynie w przypadku, gdy największy i najmniejszy z rozmiarów przekroju wzmocnienia różnią się dostatecznie mało. Jest to szczególnie dobrze widoczne w następującym przejściu granicznym. Załóżmy, że wzmocnienie posiada przekrój prostokątny o szerokości  $2b$  i wysokości  $2h$ . Badając granicę  $\lim_{b \rightarrow \infty}$  rozwiązań, o których mowa, łatwo stwierdzić, że każdorazowo jest ona równa zero. Oznaczałoby to, że w przypadku, gdy wzmocnieniem jest nieskończona płyta cienka, stan naprężeń w półpłaszczyźnie jest tensorem zerowym.

Celem niniejszej pracy jest rozwiązanie zadania półpłaszczyzny o wzmocnionej krawędzi przy przyjęciu takiego modelu teoretycznego, który pozwoliłby uniknąć wspomnianego wyżej mankamentu.

W dalszym ciągu rozważane będą następujące modele układu pas-őrnodnik:

Model A. Półpłaszczyzna sprężysta ma krawędź wzmocnioną pasmem płytowym o szerokości  $2b$  i stałej grubości  $2h$ . Obciążenie stanowi siła skupiona, skierowana normalnie do płaszczyzny őrnodkowej wzmacniającego pasma płytowego. Zakłada się ponadto, że naprężenia styczne w kontakcie równe są zero. Jest to więc model analogiczny do modelu Girkmanna.

Model B. Półpłaszczyzna sprężysta ma krawędź wzmocnioną pasmem płytowo-tarczowym o szerokości  $2b$  i stałej grubości  $2h$ . Obciążenie stanowią dwie siły skupione, z których jedna skierowana jest normalnie, a druga stycznie do płaszczyzny őrnodkowej wzmacniającego pasma. Zakłada się jednocześnie, że kontakt położony

(1) Ograniczono się jedynie do tych prac, które zdaniem autorów są najbardziej charakterystyczne w procesie ewolucji modelu belki podsuwnicowej. Literatura przedmiotu jest znacznie bogatsza, a niektóre z prac podano na końcu.

jest na płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny środkowej pasma wzmacniającego odległej o  $h$  od niej.

Model jest więc porównywalny z modelem Szeremietiewa. Różnica — obok charakteru wzmocnienia — polega na lokalizacji kontaktu (w modelu Szeremietiewa położony jest on na osi pręta wzmacniającego). Ponadto w przypadku obu modeli zakłada się izotropię i jednorodność utrzymując wszystkie niezbędne założenia, aby zadanie mogło być rozpatrywane w kategoriach płaskiego uogólnionego stanu naprężenia oraz aby «stan tarczowy» pasma mógł być rozpatrywany niezależnie od «stanu płytowego». Funkcjami poszukiwanymi są: w przypadku modelu A — rozkład naprężeń normalnych, w przypadku zaś modelu B — rozkład naprężeń normalnych i stycznych wzdłuż kontaktu.

W celu znalezienia tych funkcji przyjęto zwykły sposób postępowania, polegający na rozwiązaniu kolejno pasma płytowego, pasma tarczowego oraz półpłaszczyzny, a następnie «zszyciu» otrzymanych rozwiązań przez wykorzystanie warunku równości przemieszczeń wzdłuż kontaktu.

W pracy niniejszej wykorzystano wyniki wcześniejszych publikacji [6 i 7], w których podano odpowiednio: w pierwszej konstrukcję funkcji Greena dla pasma płytowego, w drugiej zaś konstrukcję funkcji Greena dla pasma tarczowego przy wykorzystaniu funkcji Greena dla pasma płytowego. W obu pracach konstruując rozwiązania posługiwano się transformacją Fouriera uogólnioną na przestrzeń ultradystrybucji<sup>(2)</sup>. Również w niniejszej pracy posłużono się tą metodą jako wyjątkowo efektywną i ogólną, w szczególności pozwalającą zrezygnować z kłopotliwych założeń dotyczących zachowania się funkcji w nieskończoności oraz ich regularności, a ponadto bardzo wygodną przy stosowaniu przybliżonych metod dla znalezienia transformat odwrotnych (szczegółowiej korzyści te omówiono w pracy [6]).

Rozwiązanie półpłaszczyzny jest ogólnie znane (zadanie Flamanta). Tutaj należy jedynie zaznaczyć, że na mocy inkluzji:  $S^* \subset Z^*$ , gdzie  $S^*$  oznacza przestrzeń dystrybucji temperowanych oraz  $Z^*$  przestrzeń ultradystrybucji; może być ono traktowane jak ultradystrybucja.

## 2. ROZWIĄZANIE PÓŁPŁASZCZYŹNY ZE WZMOCNIENIEM KRAWĘDZI W POSTACI PASMA PŁYTOWEGO

Model A. Celem jest opis stanu naprężenia na styku półpłaszczyzny ze wzmacniającym jej krawędź pasmem przy następujących założeniach: 1) naprężenia styczne wzdłuż prostej idealizującej styk półpłaszczyzny i pasma płytowego równe są zeru:  $[\sigma_{12}]_{x_1=0} = 0$ ; 2) układ rozważa się w kategoriach płaskiego, uogólnionego stanu naprężenia; 3) jedynym obciążeniem układu jest jednostkowa siła skupiona, przyłożona w punkcie  $x_2 = x_3 = 0$ , normalna do wzmocnienia.

<sup>(2)</sup> Wyczerpujący wykład znaleźć można w pracach [8, 9, 10, 11, 12 i 13]. Podstawowe definicje i określenia podano również w pracach [6 i 7].

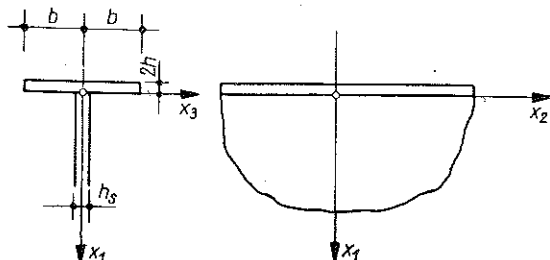
Układ współrzędnych przyjęto w sposób uwidoczniony na rys. 1. Przyjmujemy następujące oznaczenia:

${}^1\bar{u}$  ( ${}^1u_1, {}^1u_2$ ) wektor przemieszczenia wzmacniającego pasma płytowego, obciążonego obciążeniem normalnym do jego płaszczyzny środkowej;

${}^2\bar{u}$  ( ${}^2u_1, {}^2u_2$ ) wektor przemieszczenia półpłaszczyzny obciążonej obciążeniem normalnym do jej krawędzi;

$K = \frac{E_1 (2h)^3}{12 (1-\nu_1^2)} = \frac{2E_1 h^3}{3 (1-\nu_1^2)}$  sztywność płytowa pasma, przy czym stałe materiałowe dla pasma wyróżniono indeksem 1;

$p(x_2) = [\sigma_{11}]_{x_1=0, x_3=0}$  naprężenia normalne w półpłaszczyźnie wzdłuż prostej  $x_1=0, x_3=0$ .



Rys. 1

Niewiadomą jest w zadaniu funkcja  $p(x_2)$  opisująca rozkład naprężeń normalnych wzdłuż prostej  $x_1 = x_3 = 0$ .

Równania niezbędne do wyznaczenia tej funkcji dostarcza warunek nałożony na przemieszczenia wzmacniającego pasma płytowego oraz półpłaszczyzny:

$$(2.1) \quad [{}^1u_1]_{x_1=0, x_3=0} = [{}^2u_1]_{x_1=0, x_3=0}.$$

Jak wspomniano w p. 1, rozwiązanie półpłaszczyzny jest ogólnie znane, a transformata<sup>(3)</sup> przemieszczeń  $\mathcal{F}_0$  jej krawędzi ma postać

$$(2.2) \quad [{}^2\bar{u}_1]_{x_1=0, x_3=0} = \frac{2}{\alpha E} \bar{p}$$

przy tradycyjnym oznaczeniu  $\approx = \mathcal{F}_0 [\dots]$ .

Do wyznaczania pozostają przemieszczenia pasma płytowego  ${}^1u_1$ . Wykorzystując skonstruowaną w pracy [6] funkcję Greena, której transformata  $\mathcal{F}_0$  ma postać:

$$(2.3) \quad \bar{G} = \frac{1}{4K\alpha^3} \left\{ \operatorname{sgn} x_3 (\alpha x_3 \operatorname{ch} \alpha x_3 - \operatorname{sh} \alpha x_3) - \frac{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda - 4 \operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2}{(1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]} \operatorname{ch} \alpha x_3 - \frac{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda + 2 \operatorname{ch}^2 \lambda}{(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)} \alpha x_3 + \operatorname{sh} \alpha x_3 \right\},$$

<sup>(3)</sup> Symbol  $\mathcal{F} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \dots e^{-i\alpha x_2} dx_2$  oznacza uogólnioną transformację Fouriera  $\alpha \in Z$ , a  $Z$  płaszczyznę zespoloną.

gdzie  $\lambda = \alpha b$  oraz  $E \doteq E_1$ ,  $\nu = \nu_1$ , poszukiwane przemieszczenia można napisać w postaci splotu

$$(2.4) \quad {}^1u_1 = G * [\delta(x_2, x_3) - p(x_2) \delta(x_3)] = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-b}^b G(x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3) [\delta(\xi_2, \xi_3) - p(\xi_2) \delta(\xi_3)] d\xi_2 d\xi_3.$$

Uwzględniając własności splotu oraz działając na (2.4) operatorem  $\mathcal{F}_0$ , otrzymuje się

$$(2.5) \quad {}^1\tilde{u}_1 = \tilde{G}(\alpha, x_3) [1 - \tilde{p}(\alpha)],$$

a stąd uwzględniając, że

$$(2.6) \quad \tilde{G}(\alpha, 0) = \frac{-1}{4K} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2}{\alpha^3 (1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]},$$

otrzymuje się

$$(2.7) \quad [{}^1\tilde{u}_1]_{x_3=0} = \frac{-1}{4K} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2}{\alpha^3 (1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]} [1 - \tilde{p}(\alpha)];$$

przy oznaczeniu

$$(2.8) \quad \Phi(\alpha) = \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2}{(1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]}$$

znajdziemy

$$(2.9) \quad {}^1\tilde{u}_1 = \frac{-1}{4K\alpha^3} \Phi(\alpha) [1 - \tilde{p}(\alpha)].$$

Poddając równanie (2.1) działaniu operatora  $\mathcal{F}_0$  wyraża się ono przez transformaty przemieszczeń w następujący sposób:

$$(2.10) \quad [{}^1\tilde{u}_1]_{x_1=0} = [{}^2\tilde{u}_1]_{x_1=0},$$

a stąd po podstawieniu (2.9) oraz (2.2) równanie przybiera postać

$$(2.11) \quad \frac{-1}{4K\alpha^3} \Phi [1 - \tilde{p}] = \frac{2}{\alpha E} \tilde{p}.$$

Rozwiązując (2.11) ze względu na  $\tilde{p}$ , otrzymuje się

$$(2.12) \quad \tilde{p} = \frac{\Phi}{\Phi - 8\alpha^2 \frac{K}{E}}$$

albo po podstawieniu (2.8)

$$(2.13) \quad \tilde{p} = \\ = \frac{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu)^2 \lambda^2}{(1+\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - (1-\nu) \lambda^2 [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]} 8 \frac{K}{E} b^2 - (1-\nu)^2 \lambda^2.$$

Transformacja odwrotna  $\mathcal{F}_0^{-1}[\tilde{p}]$  wyrażenia (2.13) jest poszukiwanym rozwiązaniem zadania.

Pewne cechy tego rozwiązania można jednak wskazywać posługując się postacią (2.13). Można mianowicie pokazać, że ma ono trzy następujące własności.

1. Rozkład naprężeń normalnych w kontakcie spełnia warunek równowagi.

Aby uzyskać tę własność rozwiązania (2.13) wykorzystano następujące własności transformacji  $\mathcal{F}_0$ :

$$(2.14) \quad \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f e^{-i\alpha x} dx \right]_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} f dx = \mathcal{F}_0[f]_{\alpha=0} = [f]_{\alpha=0}.$$

Jak łatwo zauważyć

$$(2.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) dx_2 = \tilde{p}(0) = 1.$$

2. W granicznym przypadku, kiedy sztywność płytowa pasma jest równa zero, rozkład naprężeń w półpłaszczyźnie powinien być identyczny z rozwiązaniem zadania Flamanta, czyli  $p(x_2) = \delta(x_2)$  lub równoważnie  $\tilde{p}(\alpha) = 1$ .

Łatwo zauważyć, że

$$(2.16) \quad \lim_{K \rightarrow 0} \tilde{p}(\alpha) = 1,$$

a więc rozwiązanie ma omówioną własność.

3. Rozwiązanie jest wolne od omówionego w p. 1 mankamentu, związanego z przejściem granicznym  $b \rightarrow \infty$ .

Istotnie

$$(2.17) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{p}(\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{8(1-\nu)(3+\nu)}{3+\nu^2} \frac{K}{E} \alpha^2}.$$

Formuła (2.17) jest więc rozwiązaniem zadania w przypadku, kiedy wzmocnienie krawędzi półpłaszczyzny stanowi nieskończona płyta o sztywności  $K$ .

Jak wspomniano wyżej rozwiązanie zadania wymaga wykonania na wyrażeniu (2.13) operacji  $\mathcal{F}_0^{-1}$ , co ze względu na jego budowę nastęrcza zasadnicze trudności. Z tego też powodu zastosowano w dalszym ciągu przybliżoną metodę obliczania całek Fouriera podaną przez KRYŁOWA [14], co pozwoliło uzyskać wyniki liczbowe przy ustalonych wartościach parametrów. Zaznaczyć należy, że aczkolwiek konstruując rozwiązanie (2.13) posługiwano się uogólnioną transformacją Fouriera, z czego wynika, że należy ono do przestrzeni ultradystrybucji, to jednak na mocy inkluzji  $S^* \subset Z^*$  może być traktowane jako dystrybucja temperowana, a więc spełnia warunki stosowalności metody Kryłowa, które żądają, aby funkcja podcałkowa dawała się przedstawić w postaci

$$(2.18) \quad f(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{(1+\alpha)^s},$$

gdzie  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} F(\alpha) = \text{const}$ . Można bowiem napisać

$$(2.19) \quad \tilde{p}(\alpha) = \frac{\psi}{(1+\alpha)^2},$$

gdzie

$$(2.20) \quad \psi = \frac{\Phi(1+\alpha)^2}{\Phi - 8\alpha^2 \frac{K}{E}}$$

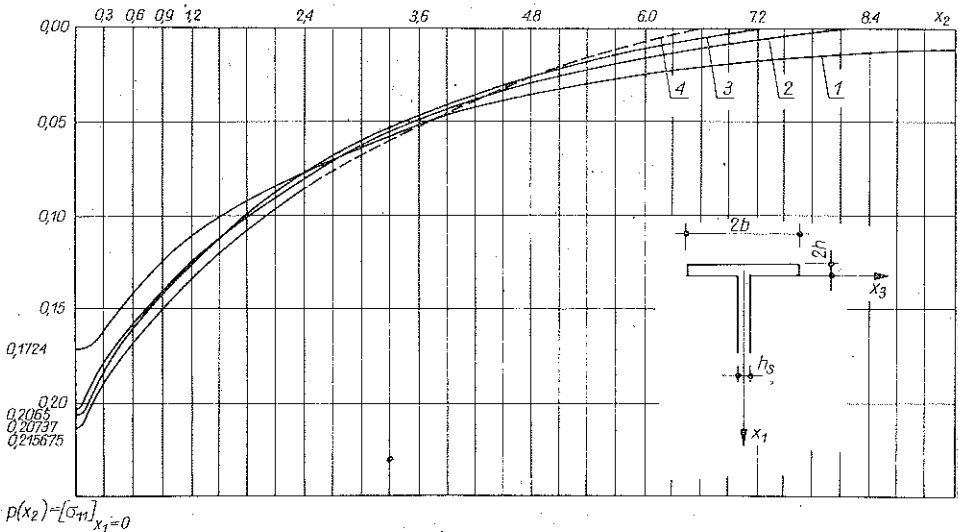
Postać (2.18) pozwala zauważyć, że  $s=2$ , co dopuszcza aproksymację wielomianami Legendre'a; zapewnia to w zasadzie dowolnie wysoką dokładność procedury przybliżonej przy dostatecznie dużej liczbie węzłów interpolacji (będących miejscami zerowymi wielomianów aproksymujących). Ze względów technicznych wzięto 9 węzłów interpolacji i posługując się tablicami współczynników interpolacji, które podaje KRYŁOW w pracy [14], wykonano niezbędne obliczenia na maszynie cyfrowej ODRA 1013 przy przyjęciu następujących wartości parametrów:

- 1  $b=50, \quad h=1, \quad h_s=1;$
- 2  $b=30, \quad h=1, \quad h_s=1;$
- 3  $b=15, \quad h=1, \quad h_s=1;$
- 4  $b=5, \quad h=1, \quad h_s=1$

oraz  $P=1, \nu=\nu_1=0,3$  we wszystkich przypadkach.

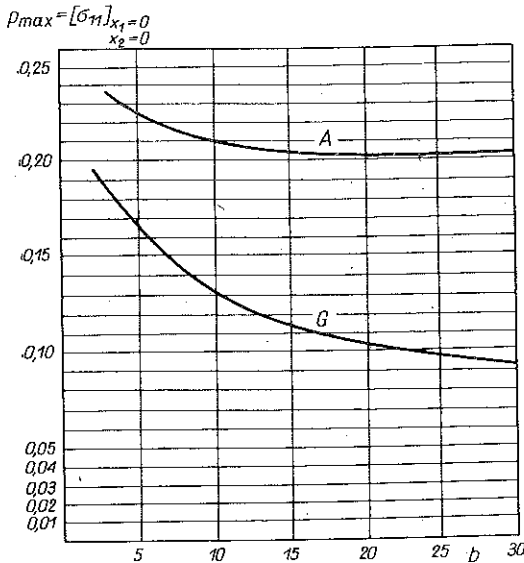
Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 2 zachowując wyżej podaną numerację przypadków.

Dla porównania dla każdego ze wspomnianych przypadków wyliczono maksymalną wartość naprężeń w kontakcie wg modelu Girkmanna. Wyniki porównania



Rys. 2

przedstawiono na wykresie na rys. 3. Zaznaczyć należy, że różnice  $p_{max}$  w przypadkach 1 i 2 wg modelu A są już nieznaczne, co uzasadniałoby stosowanie dla przekroju wzmocnienia spełniającego warunek  $b/h \geq 30$  formuły (2.17). Jest ona znacznie prostsza i można by w tym przypadku uzyskać ogólną i ścisłą postać retransformaty. Jest to jednakże o tyle nie celowe, że w praktyce projektowej tak smukłych przekrojów pasów nie stosuje się ze względu na niebezpieczeństwo utraty stateczności lokalnej.



Rys. 3

spostrzeżenie, że model Girkmanna zakładając, iż stan naprężeń we wzmocnieniu daje się opisać formułami elementarnej wytrzymałości materiałów, jednocześnie przyjmuje  $[G_{12}]_{x_1=0, x_3=0} = 0$ . Założenia te prowadzą do niwelujących się błędów

(w granicach praktycznie stosowanych przekrojów pasów) w ocenie naprężeń normalnych. Model A natomiast utrzymuje tylko drugie z założeń Girkmanna, a zatem rozbieżność z doświadczeniem, uzyskiwanych na jego podstawie wielkości naprężeń normalnych, wynika z niespełnienia w praktyce warunku  $[G_{12}]_{x_1=0, x_3=0} = 0$ .

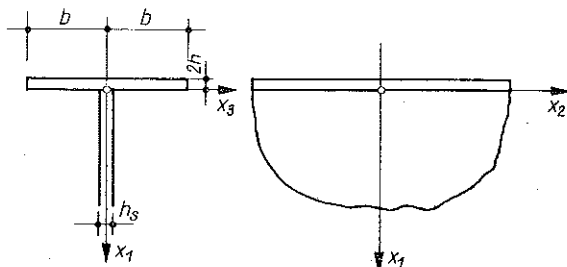
Uwagi te uzasadniają potrzebę budowy modelu uwzględniającego pojawienie się naprężeń stycznych, mających jak się okazuje istotne znaczenie dla prawidłowej oceny stanu naprężenia w kontakcie. Cechę tę posiada model B, będący przedmiotem rozważań przytoczonych w następnym punkcie.

### 3. ROZWIĄZANIE PÓŁPŁASZCZYZNY ZE WZMOCNIENIEM KRAWĘDZI W POSTACI PASMA PLYTOWO-TARCZOWEGO

Model B. Celem jest opis stanu naprężenia w styku półpłaszczyzny ze wzmocniającym jej krawędź pasmem przy następujących założeniach: 1) układ złożony z półpłaszczyzny i wzmocniającego jej brzeg pasma rozważa się w kategoriach płaskiego,



uogólnionego stanu naprężenia; 2) obciążenie układu stanowi siła skupiona  $P\delta(x_2, x_3)$ , skierowana normalnie do płaszczyzny środkowej pasma, oraz siła skupiona  $T\delta(x_2, x_3)$ , przyłożona stycznie do płaszczyzny środkowej pasma. Obydwie siły przyłożone są w punkcie  $x_2 = x_3 = 0$ .



Rys. 4

Układ współrzędnych przyjęto w sposób uwidoczniony na rys. 4. Przyjęto również oznaczenia:

${}^1\bar{u}({}^1u_1, {}^1u_2)$  wektor przemieszczenia pasma wzmacniającego, obciążonego obciążeniem normalnym do jego płaszczyzny środkowej;

${}^2\bar{u}({}^2u_1, {}^2u_2)$  wektor przemieszczenia pasma wzmacniającego obciążonego obciążeniem stycznym do jego płaszczyzny środkowej;

${}^3\bar{u}({}^3u_1, {}^3u_2)$  wektor przemieszczenia półpłaszczyzny obciążonej obciążeniem normalnym do jego krawędzi;

${}^4\bar{u}({}^4u_1, {}^4u_2)$  wektor przemieszczenia półpłaszczyzny obciążonej obciążeniem stycznym do jej krawędzi;

$s(x_2) = [G_{12}]_{x_1=0, x_3=0}$  naprężenia styczne wzdłuż prostej  $x_1 = x_3 = 0$ .

Pozostałe oznaczenia jak w p. 2.

Niewiadomymi w zadaniu są funkcje  $p(x_2)$  oraz  $s(x_2)$ , opisujące rozkład naprężeń, odpowiednio normalnych i stycznych wzdłuż prostej  $x_1 = x_3 = 0$ .

Równań niezbędnych do rozwiązania zadania dostarczają warunki nałożone na przemieszczania pasma i półpłaszczyzny:

$$(3.1) \quad [{}^1u_1]_{x_1=0, x_3=0} = [{}^3u_1 + {}^4u_1]_{x_1=0, x_3=0},$$

$$(3.2) \quad [{}^1u_2 + {}^2u_2]_{x_1=0, x_3=0} = [{}^3u_2 + {}^4u_2]_{x_1=0, x_3=0}.$$

Dla wyznaczenia występujących w równaniach (3.1) i (3.2) przemieszczeń zgodnie z uwagami z p. 1. posłużono się wynikami prac [6 i 7].

W sposób analogiczny do pokazanego w poprzednim punkcie można uzyskać wyrażenie dla przemieszczeń:

$$(3.3) \quad [{}^1\bar{u}_1]_{x_3=0} = -\frac{P - \tilde{p} - i\alpha h \tilde{s}}{4K\alpha^3} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4ch^2 \lambda - \lambda^2 (1-\nu)^2}{(1-\nu) [(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda (1-\nu)]},$$

a wykorzystując zasadę Kirchhoffa bez trudu otrzymuje się składową  ${}^1u_2$ :

$$(3.4) \quad [{}^1\ddot{u}_2]_{x_3=0} = \frac{ih(P-\tilde{p}-i\alpha h\tilde{s})}{4K\alpha^2} \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - \lambda^2 (1-\nu)^2}{(1-\nu)[(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda(1-\nu)]}$$

Przemieszczenia pasma tarczowego  ${}^2\ddot{u}$  otrzymać można wykorzystując funkcje Greena dla pasma płytowego (w obu przypadkach w równaniach występuje bowiem ten sam typ operatora). Szczegółowo konstrukcja rozwiązania pokazana została w pracy [7]. Postępując się jej wynikami można napisać

$$(3.5) \quad [{}^2\ddot{u}_2]_{x_3=0} = \frac{\tilde{s}-T}{8h\alpha E} \frac{4\operatorname{ch}^2 \lambda + (1+\nu)^2 \lambda^2 - (1-\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda}$$

Pozostałe przemieszczenia na podstawie znanych rozwiązań półpłaszczyzny i uwzględniając uwagi z p. 1 dotyczące zależności pomiędzy przestrzenią dystrybucji temperowanych i przestrzenią ultradystrybucji, można napisać w postaci

$$(3.6) \quad [{}^3\ddot{u}_1]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}} = \frac{2}{\alpha E} \tilde{p}(\alpha),$$

$$(3.7) \quad [{}^3\ddot{u}_2]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}} = \frac{-i(1-\nu)}{\alpha E} \tilde{p}(\alpha),$$

$$(3.8) \quad [{}^4\ddot{u}_1]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}} = \frac{i(1-\nu)}{\alpha E} \tilde{s}(\alpha),$$

$$(3.9) \quad [{}^4\ddot{u}_2]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}} = \frac{2}{\alpha E} \tilde{s}(\alpha).$$

Kolejnym krokiem jest rozwiązanie równań (3.1), (3.2). Działając operatorem  $\mathcal{F}_0$  otrzymuje się

$$(3.10) \quad [{}^1\ddot{u}_1]_{\substack{x_3=0 \\ x_1=0}} = [{}^3\ddot{u}_1 + {}^4\ddot{u}_1]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}},$$

$$(3.11) \quad [{}^1\ddot{u}_2 + {}^2\ddot{u}_2]_{\substack{x_3=0 \\ x_1=0}} = [{}^3\ddot{u}_2 + {}^4\ddot{u}_2]_{\substack{x_1=0 \\ x_3=0}},$$

a stąd po podstawieniu (3.3) do (3.9) i przyjmując oznaczenia

$$(3.12) \quad \psi(\alpha) = \frac{4\operatorname{ch}^2 \lambda + (1+\nu)^2 \lambda^2 - (1-\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} = \frac{\varphi_1(\alpha)}{\varphi_3(\alpha)},$$

$$(3.13) \quad \Phi(\alpha) = \frac{(1+\nu)^2 \operatorname{sh}^2 \lambda - 4\operatorname{ch}^2 \lambda - \lambda^2 (1-\nu)^2}{(1-\nu)[(3+\nu) \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda(1-\nu)]} = \frac{\varphi_2(\alpha)}{\varphi_4(\alpha)}$$

równaniom nadamy postać

$$(3.14) \quad \frac{\tilde{p} + ih\alpha\tilde{s} - P}{4K\alpha^3} \Phi = \frac{2}{\alpha E} \tilde{p} + \frac{i(1-\nu)}{\alpha E} \tilde{s},$$

$$(3.15) \quad \frac{ih(P-\tilde{p}-i\alpha h\tilde{s})}{4K\alpha^2} \Phi - \frac{\tilde{s}-T}{8h\alpha E} \psi = \frac{-i(1-\nu)}{\alpha E} \tilde{p} + \frac{2}{\alpha E} \tilde{s}.$$

Rozwiązując równania (3.14), (3.15) otrzymano następujące wzory na transformaty  $\mathcal{F}_0$  poszukiwanych funkcji:

$$(3.16) \quad \tilde{p} = \frac{P [\varphi_1 \varphi_2 KE + 16\varphi_2 \varphi_3 KEh + 8\varphi_2 \varphi_3 (1-\nu) h^2 KE\alpha - iT [\varphi_1 \varphi_2 hKE\alpha - 4(1-\nu) \varphi_1 \varphi_4 K^2 \alpha^2]]}{\varphi_1 \varphi_2 KE + 8\varphi_2 \varphi_3 KEh [h^2 \alpha^2 - (1-\nu)h\alpha + 1] - 8K^2 \varphi_1 \varphi_4 \alpha^2 - 32K^2 h\varphi_3 \varphi_4 (3+2\nu-\nu^2) \alpha^2},$$

$$(3.17) \quad \tilde{s} = \frac{iP \varphi_2 \varphi_3 [16KEh^2 \alpha - 8(1-\nu)hKE] + T [\varphi_1 \varphi_2 KE - 8K^2 \varphi_1 \varphi_4 \alpha^2]}{\varphi_1 \varphi_2 KE + 8\varphi_2 \varphi_3 KEh [h^2 \alpha^2 - (1-\nu)h\alpha + 1] - 8K^2 \varphi_1 \varphi_4 \alpha^2 - 32K^2 h\varphi_3 \varphi_4 (3+2\nu-\nu^2) \alpha^2}.$$

Podobnie jak w przypadku modelu A wykazać można, że otrzymane rozwiązanie ma następujące własności:

1. Spełnione są warunki równowagi, co można wykazać wykorzystując wspomnianą już własność transformaty  $\mathcal{F}_0$ :

$$(3.18) \quad [\tilde{p}(\alpha)]_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x_2) dx_2 = P,$$

$$(3.19) \quad [\tilde{s}(\alpha)]_{\alpha=0} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x_2) dx_2 = T.$$

2. W granicznym przypadku  $h=0$ , przy czym jednocześnie  $K \neq 0$ , a więc wzmocnienie nie posiada «sztywności tarczowej», rozwiązanie (3.16), (3.17) jest identyczne z rozwiązaniem przy założeniu modelu A i przy założonych obciążeniach.

Wspomnianą wyżej własność rozwiązania można wykazać badając granicę

$$(3.20) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{p}(\alpha) = \frac{\varphi_2 P}{\varphi_2 - 8 \frac{K}{E} \varphi_4 \alpha^2} + \frac{i4T(1-\nu) K^2 \alpha^2 \varphi_1 \varphi_4}{\varphi_1 \varphi_2 KE - 8K^2 \varphi_1 \varphi_4 \alpha^2},$$

$$(3.21) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \tilde{s}(\alpha) = T.$$

Aby zinterpretować otrzymany wynik wygodnie jest wprowadzić oznaczenia

$$(3.22) \quad \tilde{p}_1 = \frac{\varphi_2 P}{\varphi_2 + 8 \frac{K}{E} \varphi_4 \alpha^2} = \frac{P\Phi}{\Phi - 8 \frac{K}{E} \alpha^2},$$

$$(3.23) \quad \tilde{p}_2 = \frac{4iT(1-\nu) K^2 \alpha^2}{\Phi KE - 8K^2 \alpha^2},$$

przy takich oznaczeniach naprężenia normalne w kontakcie można przedstawić w postaci sumy:

$$(3.24) \quad \tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2.$$

Pierwszy składnik tej sumy jest identyczny z rozwiązaniem modelu A przy obciążeniu siłą normalną  $P$ . Drugi składnik po przekształceniach daje się doprowadzić do postaci

$$(3.25) \quad \frac{iT(1-\nu)}{\alpha E} + \frac{2\tilde{p}_2}{\alpha E} = \frac{\tilde{p}_2\Phi}{4K\alpha^3},$$

a stąd, uwzględniając (3.6) oraz (3.8) oraz fakt, że

$$\frac{\tilde{p}\Phi}{4K\alpha^3} = \mathcal{F}_0[-p_2 * G]_{x_3=0},$$

łatwo zauważyć, że równanie (3.25) jest identyczne z następującym warunkiem nałożonym na przemieszczenia:

$$(3.26) \quad 4\tilde{u}_1(T) + {}^3\tilde{u}_1(p_2) = {}^1\tilde{u}_1[p_2].$$

Warunek ten wymaga, aby przemieszczenia pasma i półpłaszczyzny były równe przy założeniu, że jedynym obciążeniem modelu A jest siła  $T$ . A więc wyrażenia (3.20) i (3.21) są istotnie rozwiązaniem modelu A przy założeniu, że jest on obciążony siłą normalną  $P$  oraz styczną  $T$  (przyłożoną bezpośrednio do krawędzi półpłaszczyzny).

3. Przy przyjęciu  $K=0$  oraz jednocześnie  $h=0$  rozważane zadanie przechodzi w zwykły przypadek półpłaszczyzny o swobodnym brzegu, obciążonej siłami  $P$  oraz  $T$ . Łatwo to stwierdzić wykonując przejście graniczne:

$$(3.27) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tilde{p} = P,$$

$$(3.28) \quad \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ K \rightarrow 0}} \tilde{s} = T.$$

4. Rozwiązanie jest wolne od wspomnianego w p. 1 mankamentu związanego z przejściem granicznym  $b \rightarrow \infty$ .

Istotnie

$$(3.29) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{p}(\alpha) = \frac{PKE \left[ 1 - \frac{1}{4-(1-\nu)^2} [16h - (1-\nu)h^2\alpha] - iT \left[ hKE\alpha - \frac{4(1-\nu)^2(3+\nu)}{\nu-3} K^2\alpha^2 \right] \right]}{KE \left[ 1 + 8h \frac{h^2\alpha^2 - (1-\nu)h\alpha + 1}{4-(1-\nu)^2} \right] + 8K^2 \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{3-\nu} + \frac{3-\nu}{[4-(1-\nu)^2](1-\nu)(3+\nu)}},$$

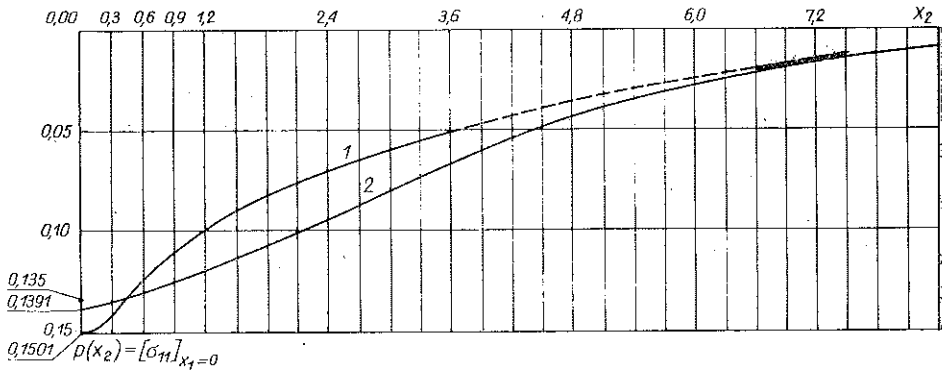
$$(3.30) \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \tilde{s}(\alpha) = \frac{Pi \frac{16KEh^2\alpha - 8(1-\nu)hKE}{4-(1-\nu)^2} + T \left[ KE + 8K^2\alpha^2 \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{3-\nu} \right]}{KE \left[ 1 + 8h \frac{h^2\alpha^2 - (1-\nu)h\alpha + 1}{4-(1-\nu)^2} \right] + 8K^2 \frac{(1-\nu)(3+\nu)}{3-\nu} + \frac{3-\nu}{[4-(1-\nu)^2](1-\nu)(3+\nu)}},$$

a więc naprężenia mają wartość różną od zera.

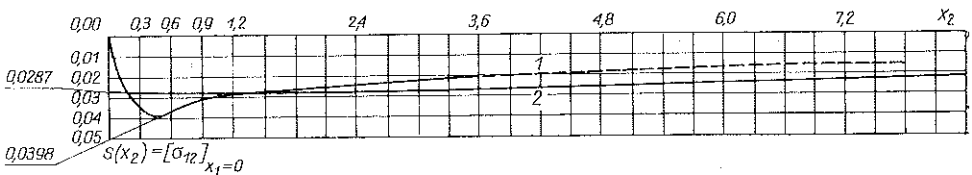
Formuły (3.29) i (3.30) dają opis stanu naprężenia w kontakcie półpłaszczyzny i nieskończonej płyty i można je traktować jako dodatkowo otrzymany wynik. Wynikiem końcowym byłyby retransformaty funkcji (3.16) i (3.17).

Skomplikowana budowa skłania do rezygnacji z poszukiwania ogólnej ich postaci na rzecz wspomnianej już przybliżonej procedury Kryłowa, pozwalającej otrzymać wyniki liczbowe (dostatecznie dokładne) dla każdego ustalonego układu wartości parametrów.

Podobnie jak w przypadku modelu A transformaty rozkładu naprężeń w kontakcie określone formułami (3.16) i (3.17) spełniają warunki stosowalności metody Kryłowa z tą różnicą, że w przedstawieniu analogicznym do (2.18) wykładnik potęgowy  $s=1$ . Z tego też powodu funkcje podcałkowe aproksymowano funkcjami wymiernymi o wykładniku potęgowym  $s=1$ . Podobnie jak poprzednio ilość węzłów interpolacji przyjęto  $n=9$ .



Rys. 5



Rys. 6

Jeśli chodzi o pozostałe parametry to dobrano je tak, aby były maksymalnie zbliżone do rozmiarów przekroju radzieckiego dwuteownika NP 60a, dla którego wykonał obliczenia SZEREMIETEW, co umożliwia porównanie wyników. Tak więc przyjęto:  $b=9$ ,  $h=1$ ,  $h=1$ ,  $P=1$ . Obliczenia podobnie jak w przypadku modelu A wykonywane były na maszynie cyfrowej ODRA 1013, a ich wyniki przedstawiono na rys. 5 i 6, gdzie krzywa 1 przedstawia wyniki dla modelu B, krzywa zaś 2 wyniki Szeremietiewa. Porównanie wyników pozwala zauważyć, że maksymalna wartość naprężeń normalnych jest w obu przypadkach zbliżona. Różnica wynosi około 8,5%. Znaczniejsze różnice wykazują jedynie krzywe rozkładu. Najogólniej można by

powiedzieć, że w przypadku modelu B występuje większa koncentracja naprężeń normalnych.

Jeśli chodzi o naprężenia styczne, to ich maksymalne wartości różnią się około 28%, a ich rozkład jest zdecydowanie różny. O ile wyniki obliczeń Szeremietiewa nie wykazują koncentracji naprężeń stycznych, o tyle rezultaty otrzymane przy przyjęciu modelu B wskazują, że zjawisko koncentracji dotyczy również naprężeń stycznych.

Na wykresie naprężeń normalnych oprócz krzywych 1 i 2 naniesiono również wartość maksymalnych naprężeń normalnych obliczonych przy założeniu modelu Girkmanna. Jak widać, nie różnią się one zasadniczo od wartości otrzymanych dla obu porównywanych modeli, co przemawia za poprawnością hipotezy wspomnianej w punkcie 2, a dotyczącej niwelującego się wpływu założeń uczynionych przez Girkmanna.

#### 4. WNIOSKI

Otrzymane rezultaty wydają się uzasadniać stwierdzenia, że:

1) pomijane w dotychczasowych obliczeniach naprężenia styczne odgrywają istotną rolę i powinny być uwzględniane;

2) koncentracja dotyczy nie tylko naprężeń normalnych ale i stycznych;

3) w praktyce inżynierskiej należałoby w przypadku ruchomego obciążenia jako kryterium wytrzymałościowe stosować hipotezę wyteżeniową, która uwzględniałaby jednocześnie zmęczenie i płaski charakter stanu naprężenia;

4) dotychczasowe modele teoretyczne nie opisywały dostatecznie adekwatnie stanu naprężenia we wzmocnieniu, co uniemożliwiało między innymi racjonalną ocenę niebezpieczeństwa utraty stateczności lokalnej; proponowany opis daje te możliwości, a analiza tego problemu może prowadzić do ciekawych wyników.

Na zakończenie stwierdzić należy, że temat stanu naprężeń w półpłaszczyźnie o wzmocnionej krawędzi jest ciągle daleki od wyczerpania, a jednocześnie posiada duże znaczenie praktyczne. Jest więc, jak się wydaje, wdzięcznym tematem do dalszych studiów.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. E. MELAN, *Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen*, Ing-Archiv., 3, 3, 1932.
2. K. GIRKMANN, *Stegblech beulung unter örtlichem Lastangriff*, Sitz.-Ber. Öster. Akad. d. Wiss., Wien, Math-Nat, Kl. 145, 1936.
3. Броуде, *Распределение сосредоточенного давления в металлических балках*, Москва 1950.
4. М. П. Шереметев, Д. Хлебников, *Згин нескінченної сміги з підкріпленням краєм*, Прикл. Мех., 7, 2, 1961.
5. М. П. Шереметев, *Определение напряженного состояния тавровых и двутавровых балок методами плоской задачи теории упругости*, Труды Межд. Симп., I, Тбилиси, 1963.
6. J. GRABACKI, G. SZEFER, *Uogólniona funkcja Greena dla nieskończonego pasma płytowego*, Mech. Teoret. i Stos., 11, 1, 1973.
7. J. GRABACKI, G. SZEFER, *Przykłady ultradystrybucyjnych rozwiązań pasma płytowego*, Mech. Teoret. i Stos., 11, 1, 1973.

8. L. SCHWARZ, *Théorie des distributions*, 1, Paris 1950.
9. L. SCHWARZ, *Théorie des distributions*, 2, Paris 1950.
10. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные функции и действия над ними*, Москва 1951.
11. Я. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Обобщенные Функции. Пространства основных и обобщенных функций*, Москва 1958.
12. K. MAURIN, *Analiza. Cz. II. Wstęp do analizy globalnej*, Warszawa 1971.
13. A. H. ZEMANIAN, *Teoria dystrybucji i analiza transformat*, Warszawa 1969.
14. В. Я. Крылов, Л. Г. Крудилькова, *Справочная книга по численному гармоническому анализу*, Минск 1968.
15. H. BENSCOTER, *Analysis of single stiffener on an infinite sheet*, J. App. Mech., 16, 3, 1949.
16. H. L. BROWN, *The diffusion of load from a stiffener into an infinite elastic sheet*, Quart. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 239, 1218, 1958.
17. W. T. KOITER, *On diffusion of load from a stiffened into a sheet*, J. Appl. Math., 8, 1955.
18. П. И. Ларкин, *Напряженное состояние полуплоскости с подкрепленным краем загруженной сосредоточенной силой*, Изв. Вузав., 10, 12, 1967.

## Резюме

## НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРОЧНЕННЫМ КРАЕМ

В работе дается решение задачи полуплоскости с упрочненным, плиточной полосой, краем. Решение построено при использовании преобразования Фурье обобщенного на пространство ультрадистрибуций. Полученные результаты сравнены с известными до сих пор результатами, причем учтены так качественный, как и количественный аспекты. Для иллюстрации помещены числовые примеры. Заключение составляют выводы о характере практических постулатов.

## SUMMARY

## THE STRESS STATE IN A HALF SPACE WITH A STIFFENED WEDGE

In a paper the solution of the problem of half plane with a stiffened edge by means of a plate layer is presented. The solution was constructed by use of the Fourier transforms generalized to the space of ultradistributions. The results obtained were compared qualitatively and quantitatively with the results known up to now. As an illustration the numerical examples are presented. The conclusions which have the character of practical postulates end the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 20 lutego 1974 r.*