

OKREŚLENIE GEOMETRYCZNIE ZMIENNYCH KSZTAŁTÓW KONSTRUKCJI SIATEK STOŻKOWO KULISTYCH

ZBIGNIEW ALABRUDZIŃSKI (PŁOCK) i HENRYK FRĄCKIEWICZ (KIELCE)

W pracy rozważono problem geometrycznej zmienności zamkniętych siatkowych powłok stożkowo- i walcowo-kulistych. Opierając się na kryterium statycznym geometrycznej zmienności zamkniętych konstrukcji siatkowych, określono związki między parametrami geometrycznymi badanych powłok w przypadku ich geometrycznie zmiennych kształtów. Pracę zilustrowano wykresami przedstawiającymi wpływ poszczególnych parametrów geometrycznych na geometrycznie zmienny kształt konstrukcji. Dla powłoki stożkowo-kulistej podano także związki przybliżone między geometrycznie zmiennymi parametrami konstrukcji oraz podano zakres ich stosowalności.

1. WSTĘP

1.1. Własność powłok, polegająca na zdolności do takiej zmiany ich konfiguracji, przy której zostaje zachowana metryka powierzchni, nazywamy geometryczną zmiennością. Fakt, że konfiguracja powłoki ulega zmianie, objawia się zmianą innych wielkości charakteryzujących własności geometryczne powierzchni: w przypadku powierzchni gładkich zmiana konfiguracji polega na zmianie współczynników drugiej formy kwadratowej, natomiast w przypadku powierzchni niegładkich zmiana konfiguracji polega na nieznacznej zmianie obiektów najeżenia [1].

Badanie geometrycznej zmienności powłok może być przeprowadzone na podstawie kryterium kinematycznego lub statycznego.

Kryterium kinematyczne wynika bezpośrednio z określenia geometrycznej zmienności i ma następujące brzmienie: powłokę (konstrukcję) uważa się za geometrycznie zmienną, jeżeli jej punktom można nadać przemieszczenia wywołujące zmianę współczynników drugiej formy kwadratowej powierzchni (obiektów najeżenia) bez zmiany współczynników pierwszej formy kwadratowej (metryki). Dowodzi się, że wszystkie powłoki otwarte są geometrycznie zmienne; istotne z punktu widzenia praktyki konstrukcyjnej jest poszukiwanie geometrycznie zmiennych kształtów konstrukcji w klasie powłok zamkniętych.

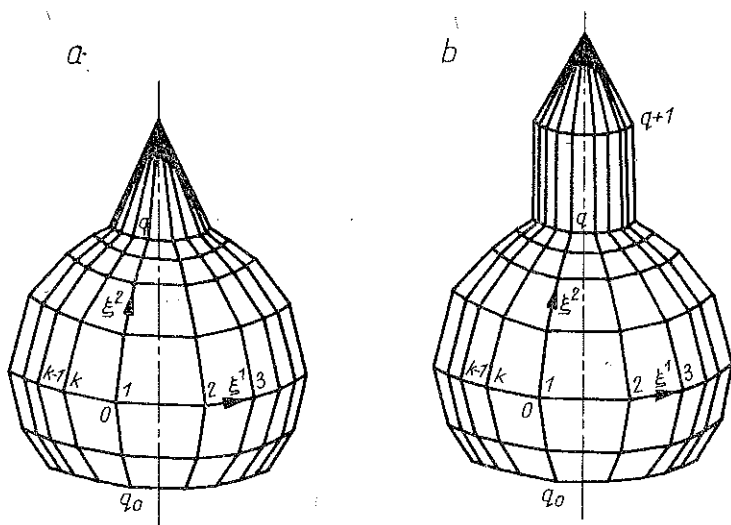
Geometrycznie zmienną powłokę zamkniętą będziemy zgodnie z [3] nazywać powłoką (konstrukcją) o postaci osobliwej (osobliwą).

Kryterium statyczne jest następujące: powłoką (konstrukcją) o postaci osobliwej nazywamy taką powłokę o powierzchni zamkniętej, dla której wyznacznik główny jednorodnego układu sił wewnętrznych jest równy zeru (rys. 3). Wynika stąd, że w powłokach (konstrukcjach) geometrycznie zmiennych pewne obciążenia nie mogą być przeniesione błonowym stanem sił wewnętrznych, a wyłącznie stanem zgięciowym. Nieuwzględnienie tego faktu przez konstruktora mogłoby doprowadzić do zniszczenia konstrukcji.

1.2. Niniejsza praca jest następną z szeregu prac poświęconych badaniu geometrycznej zmienności niegładkich zamkniętych konstrukcji powierzchniowych [1 – 7].

W pracy [1] podano kryterium kinematyczne dla powłok siatkowych i opierając się na nim wyprowadzono związki pozwalające na badanie geometrycznej zmienności dowolnych powłok siatkowych. Dla powłok siatkowych z węzłami zarówno przegubowymi jak i sztywnymi podano sens fizyczny zjawiska geometrycznej zmienności. Na podstawie wyprowadzonych związków rozwiązano kompleksowo zagadnienie geometrycznej zmienności walcowej powłoki siatkowej. W pracy [4] podano treść kryterium statycznego oceny geometrycznej zmienności konstrukcji siatkowych i opierając się na nim zbadano liczbowo kilka wybranych konstrukcji siatkowych. Stosując przejście graniczne otrzymano geometrycznie zmienne kształty dla odpowiednich konstrukcji gładkich. Prace [5 – 7] zajmują się poszukiwaniem geometrycznie zmiennych kształtów wybranych ze względu na znaczenie praktyczne powłok siatkowych — na podstawie kryterium statycznego.

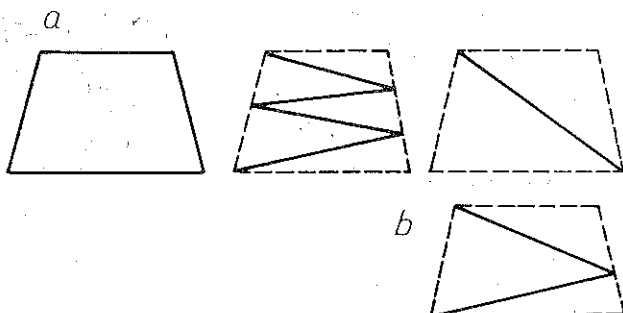
W przedstawionej pracy, wykorzystując kryterium statyczne, rozpatrzmy dwa typy siatkowych powłok osiowosymetrycznych, będących połączeniem powierzchni kulistej ze stożkową oraz walcową zakończoną stożkiem (rys. 1). Wybrane powłoki, zdaniem autorów, mają duże znaczenie praktyczne w wielu konstrukcjach inżynierskich (budownictwo).



Rys. 1

Fakt, że rozpatrywane konstrukcje są niegładkie, upoważnia autorów do ściślej-szego określenia takich pojęć, jak powierzchnia kulista, walcowa, stożkowa — w klasie konstrukcji siatkowych. Powierzchnią siatkową kulistą nazywać będziemy konstrukcję, której węzły spoczywają na powierzchni czaszy kulistej. Analogicznie zdefiniujemy powierzchnię siatkową: walcową i stożkową.

Rozpatrywane powłoki rozpięte są na dyskretnym powierzchniowym zbiorze punktów pokrywających się z węzłami siatki i tworzącym dwie rodziny linii parametrycznych, których współrzędne krzywoliniowe oznaczono symbolami ξ^1, ξ^2 . Konstrukcje zbudowane są ze sztywnych łączników leżących na liniach parame-



Rys. 2

trycznych ξ^1, ξ^2 oraz zamknięte przeponami (rys. 3). Rzeczywistą przeponą siatkową (rys. 2b) zastąpiono modelem obliczeniowym w postaci przepony ciągłej sztywnej w swej płaszczyźnie, natomiast niesztywnej w kierunku do niej prostopadłym. Przyjęty model obliczeniowy przepony pozwala na określenie geometrycznie zmiennych kształtów badanych powłok bez wnikania w konstrukcję rzeczywistej przepony siatkowej. Powłoka kulista zamknięta jest z jednej strony powłoką walcową lub stożkową (rys. 1), natomiast z drugiej strony tzw. «przeponą dolną», której konstrukcję pokazano na rys. 3a.

2. ROZWIĄZANIE OGÓLNE

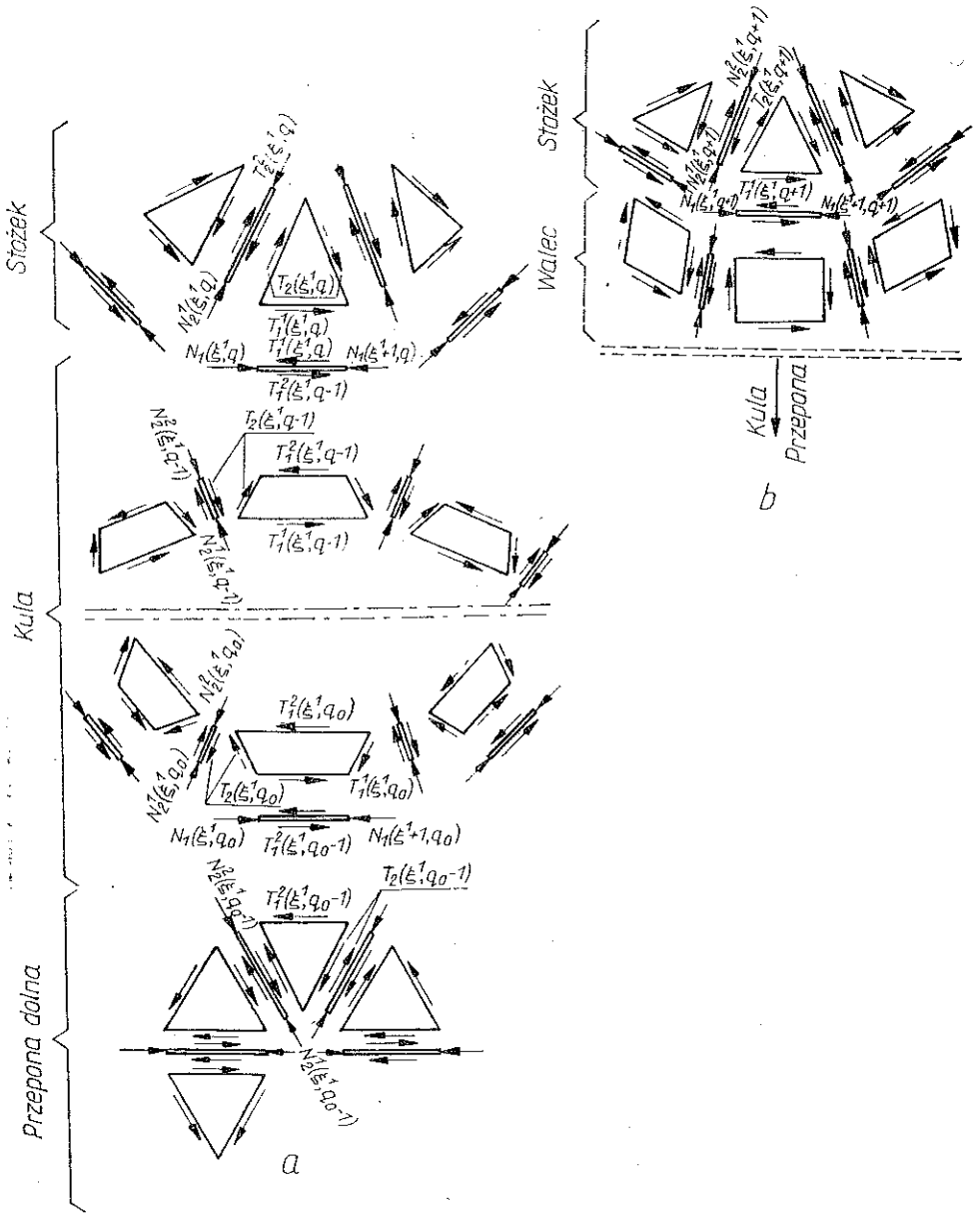
Zgodnie z kryterium statycznym geometrycznie zmienne kształty rozpatrywanych powłok otrzymamy żądając, aby wyznacznik główny układu sił wewnętrznych był równy zeru.

2.1. W pracy [3] na podstawie równania równowagi węzła, łącznika i przepony — otrzymano układ równań, który można sprowadzić do równania równowagi węzła o dowolnych współrzędnych.

Przyjmijmy siły wewnętrzne (rys. 3) w postaci (2.1.):

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T_1^1(\xi^1, \xi^2) &= T_{10}^1(\xi^2) (\cos n\varphi (\xi^1 + 1) - \cos n\varphi \xi^1), & N_1(\xi^1, \xi^2) &= N_{10}(\xi^2) \cos n\varphi \xi^1, \\ T_1^2(\xi^1, \xi^2) &= T_{10}^2(\xi^2) (\cos n\varphi (\xi^1 + 1) - \cos n\varphi \xi^1), & N_1^1(\xi^1, \xi^2) &= N_{20}^1(\xi^2) \cos n\varphi \xi^1, \\ T_2(\xi^1, \xi^2) &= T_{20}(\xi^2) (\cos n\varphi (\xi^1 + 1) - \cos n\varphi \xi^1), & N_2^2(\xi^1, \xi^2) &= N_{20}^2(\xi^2) \cos n\varphi \xi^1, \end{aligned}$$

$$1 \leq \xi^1 \leq k, \quad \varphi = \frac{2\pi}{k}, \quad n = 2, 3, 4, \dots, \frac{k}{2}.$$



Rys. 3

Równanie równowagi węzła ma postać

$$(2.2) \quad AT_{20} + B(1 + \delta_2)T_{20} + C(1 + \delta_2)(1 + \delta_2)T_{20} = 0,$$

gdzie

$$A = \sqrt{\frac{g_{11}}{g_{22}} \frac{\sin \delta_2 (1 + \delta_2) \beta}{\sin \delta_2 \beta} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos (1 + \delta_2) (1 + \delta_2) \beta}}$$

$$B = \sqrt{\frac{(1+\delta_2)g_{11}}{(1+\delta_2)g_{22}}} + \sqrt{\frac{(1+\delta_2)(1+\delta_2)g_{11}}{(1+\delta_2)g_{22}}} \frac{\sin \delta_2(1+\delta_2)\beta}{\sin \delta_2\beta} \times$$

$$\times \frac{\cos \beta}{\cos(1+\delta_2)(1+\delta_2)\beta} - 2 \frac{\sin \delta_2(1+\delta_2)\beta}{\cos(1+\delta_1)(1+\delta_2)\beta} \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

$$C = -\sqrt{\frac{(1+\delta_2)(1+\delta_2)(1+\delta_2)g_{11}}{(1+\delta_2)(1+\delta_2)g_{22}}}.$$

Macierz

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$$

określa metrykę powierzchni (zdefiniowana w pracy [1]).

2.2. Metrykę oraz kąt β rozpatrywanych powłok (rys. 4b) określają następujące wzory:

część kulista powłoki $q_0 \leq \xi^2 \leq q-1$

$$(2.3) \quad g_{11} = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \alpha \xi^2, \quad g_{22} = 4R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \beta = -\alpha \left(\xi^2 + \frac{1}{2} \right);$$

stąd $\delta_2 \beta = -\alpha$, $\delta_2 \delta_2 \beta = 0$;

część stożkowa powłoki (rys. 4a) $\xi^2 = q$

$$(2.4) \quad g_{11} = g_{11}(q) = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \alpha q, \quad g_{22} = g_{22}(q) = h^2 + r^2,$$

$$\sin \beta(q) = -\frac{r}{\sqrt{g_{22}(q)}}, \quad \cos \beta(q) = \frac{h}{\sqrt{g_{22}(q)}}.$$

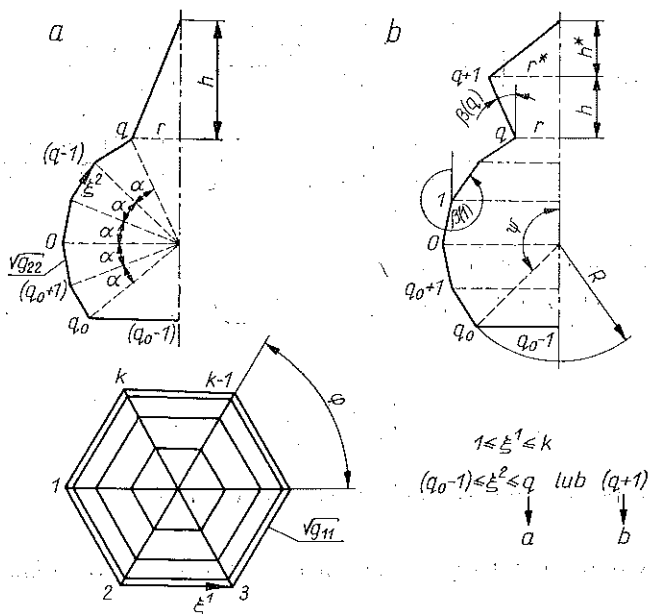
Powierzchnia walcowa, zakończona stożkiem ostrym (rys. 1b), jest szczególnym przypadkiem powierzchni przedstawionej schematycznie na rys. 4b dla $r^* = r$, której metrykę i kąt β opisują wzory następujące:

$$(2.5) \quad g_{11}(q) = 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \alpha q, \quad g_{11}(q+1) = 4(r^*)^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$g_{22}(q) = (r^* - r)^2 + h^2, \quad g_{22}(q+1) = (h^*)^2 + (r^*)^2,$$

$$\sin \beta(q) = \frac{r^* - r}{\sqrt{g_{22}(q)}}, \quad \sin \beta(q+1) = -\frac{r^*}{\sqrt{g_{22}(q+1)}},$$

$$\cos \beta(q) = \frac{h}{\sqrt{g_{22}(q)}}, \quad \cos \beta(q+1) = \frac{h^*}{\sqrt{g_{22}(q+1)}}.$$



Rys. 4

2.3. Warunki brzegowe wynikają bezpośrednio z równowagi dolnej przepony oraz przepony stożka ostrego (rys. 3). Z równań równowagi dolnej przepony (rys. 3) otrzymamy:

$$T_1^2(\xi^1, q_0-1) = T_2(\xi^1, q_0-1) = 0, \quad \beta(q_0-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Uwzględniając wzory (2.1) otrzymujemy

$$(2.6) \quad T_{20}(q_0-1) = 0, \quad \beta(q_0-1) = \frac{\pi}{2}.$$

Z równowagi przepony stożka ostrego (rys. 2) wynika, że $T_1^1 = T_2 = 0$, co po uwzględnieniu (2.1) prowadzi do następującego warunku brzegowego:

$$(2.7) \quad T_{20}(q) = 0 \quad \text{dla konstrukcji stożkowo-kulistej (rys. 3a),}$$

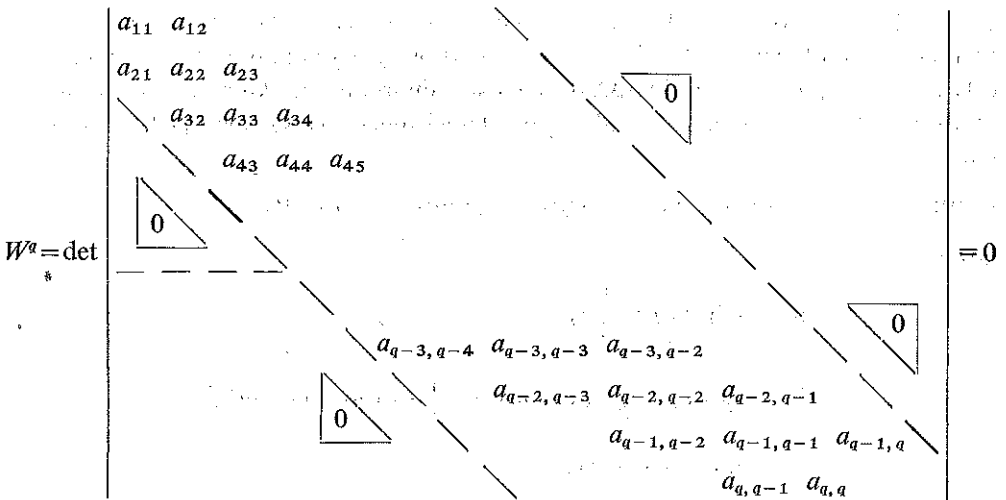
$$(2.8) \quad T_{20}(q+1) = 0 \quad \text{dla konstrukcji walcowo-kulistej (rys. 3b).}$$

Podstawiając (2.3) i (2.4) do (2.2) z uwzględnieniem warunków brzegowych (2.6) i (2.7) po wprowadzeniu oznaczeń:

$$\frac{r^*}{r} = m, \quad \frac{h^*}{r} = \lambda, \quad \frac{h}{r} = x, \quad \frac{h}{R} = z = x \cos \alpha q, \quad \frac{\sin^2 \frac{n\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \kappa$$

otrzymamy (dla $\xi^2 = q_0-1, q_0, q_0+1, \dots, g-1, q$) jednorodny układ sił wewnętrznych w powłoce.

Zgodnie z kryterium statycznym zerowanie się wyznacznika głównego jednorodnego układu sił wewnętrznych



jest warunkiem geometrycznej zmienności rozpatrywanej powłoki. Wyrazy a_{ik} w każdym wierszu wyznacznika są kolejno wartościami współczynników A, B, C równania (2.2) dla określonego ξ^2 . Rozwijając wyznacznik W^q względem ostatniego wiersza otrzymamy

$$a_{q,q} W^{q-1} - a_{q,q-1} a_{q-1,q} W^{q-2} = 0.$$

Ponieważ metryka i kąt β zgodnie z (2.4) tylko dla $\xi^2 = q$ zależy od $x = h/r$, więc zmienna x nie występuje w podwyznacznikach W^{q-1} i W^{q-2} .

Po podstawieniu wartości i odpowiednich przekształceniach warunek geometrycznej zmienności powłoki przedstawionej na rys. 1a przybiera postać:

$$(2.9) \quad x = -\frac{C_2}{b_2},$$

gdzie

$$b_2 = \left[\cos \alpha (q-1) - \frac{\cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha q \sin \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right)}{\sin \alpha} - 2\kappa \sin \frac{\alpha}{2} \times \right. \\ \left. \times \sin \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \right] W^{q-1} + \frac{\cos \alpha (q-2) \cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha q \sin \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right)}{\sin \alpha} W^{q-2}, \\ C_2 = \frac{\left\{ \cos \alpha (q-2) \cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \cos \alpha q \right. \\ \left. + \frac{\left[\cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \cos \alpha q \right]}{\sin \alpha} + \right. \\ \left. + 2\kappa \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \right\} W^{q-1}}{\sin \alpha} \} (m-1), \\ m=0.$$

Równanie (2.9) posłużyło do narysowania wykresów 5, 6, 7a, 7b. Podstawiając (2.3) i (2.5) do (2.2) z uwzględnieniem warunków brzegowych (2.6) i (2.8) otrzymano (dla $\xi^2 = q_0 - 1, q_0, \dots, q, q + 1$) układ równań jednorodnych, którego wyznacznik główny $W^{q+1} = 0$ daje się sprowadzić po odpowiednich przekształceniach do równania

$$(2.10) \quad (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(b_2 x + c_2) + a_3 x^2 + b_3 x = 0,$$

gdzie

$$a_1 = \kappa m \operatorname{tg} \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right),$$

$$b_1 = \lambda \operatorname{tg} \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \left[1 + (m-1)\kappa \right] + m(m-1)\kappa - m^2,$$

$$c_1 = \lambda (m-1)^2 (\kappa - 1),$$

$$a_3 = m^2 W^{q-1} \cos \alpha (q-1),$$

$$b_3 = \lambda m (n-1) W^{q-1} \cos \alpha (q-1);$$

W^{q-1}, W^{q-2} są odpowiednimi podwyznacznikami wyznacznika głównego jednorodnego układu sił wewnętrznych w powłoce. Wartości tych wyznaczników zależą od geometrii części kulistej powłoki, tj. od α, q_0, q, k oraz od parametru n . Wyrazy tych podwyznaczników otrzymamy mnożąc współczynniki A, B, C układu równań (2.2) przez $\sin \frac{\alpha}{2} / \sin \frac{\varphi}{2}$:

$$a_{11} = \cos \alpha q_0 + \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{\cos \alpha \left(q_0 + \frac{3}{2} \right)} \kappa,$$

$$a_{12} = -\cos \alpha (q_0 + 2).$$

Pozostałe wyrazy różne od zera określają następujące wzory rekurencyjne:

$$a(i - q_0 + 2)(i - q_0 + 1) = -\cos \alpha i \frac{\cos \alpha \left(i + \frac{1}{2} \right)}{\cos \alpha \left(i + \frac{5}{2} \right)},$$

$$a(i - q_0 + 2)(i - q_0 + 2) = \cos \alpha (i + 1) + \cos \alpha (i + 2) \frac{\cos \alpha \left(i + \frac{1}{2} \right)}{\cos \alpha \left(i + \frac{5}{2} \right)} + \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha}{\cos \alpha \left(i + \frac{5}{2} \right)} \kappa,$$

$$a(i - q_0 + 2)(i - q_0 + 3) = -\cos \alpha (i + 3),$$

gdzie

$$i = q_0, q_0 + 1, \dots, (q-3) \quad \text{dla} \quad W^{q-1},$$

$$i = q_0, q_0 + 1, \dots, (q-4) \quad \text{dla} \quad W^{q-2}.$$

Przyjmując w równaniu (2.10) $m=1$, otrzymamy równanie (2.11), określające geometrycznie zmienny kształt powłoki walcowo-kulistej (rys. 1b):

$$c_1 = c_2 = b_3 = 0.$$

Ponieważ $x \neq 0$, więc równanie (2.10) przybierze postać

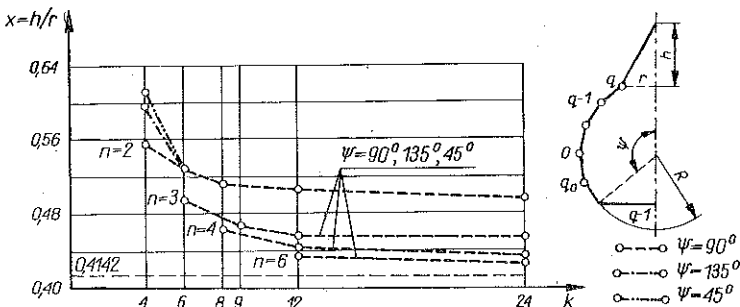
$$(2.11) \quad x = -\frac{b_1 b_2 + a_3}{a_1 b_2}.$$

Z rozwiązania ogólnego (2.9) i (2.11) geometrycznej zmienności rozpatrywanych powłok (rys. 1) wynika, że geometrycznie zmienny kształt powłok określają następujące parametry: n — parametr charakteryzujący rozkład sił wewnętrznych w kierunku ξ^1 ; parametry charakteryzujące geometrię konstrukcji: k — zagęszczenie siatki powłoki wzdłuż ξ^1 , α — zagęszczenie siatki powłoki wzdłuż ξ^2 , $\eta = r/R$ — miejsce połączenia kuli ze stożkiem (rys. 1a) lub walcem (rys. 1b), ψ — położenie przepony dolnej.

W dalszej części pracy zależności pomiędzy geometrycznie zmiennymi parametrami powłok przedstawiono na wykresach $x = x(k)$ przy ustalonych parametrach pozostałych.

3. ROZWIĄZANIA LICZBOWE POWŁOKI STOŻKOWO-KULISTEJ (RYS. 1a)

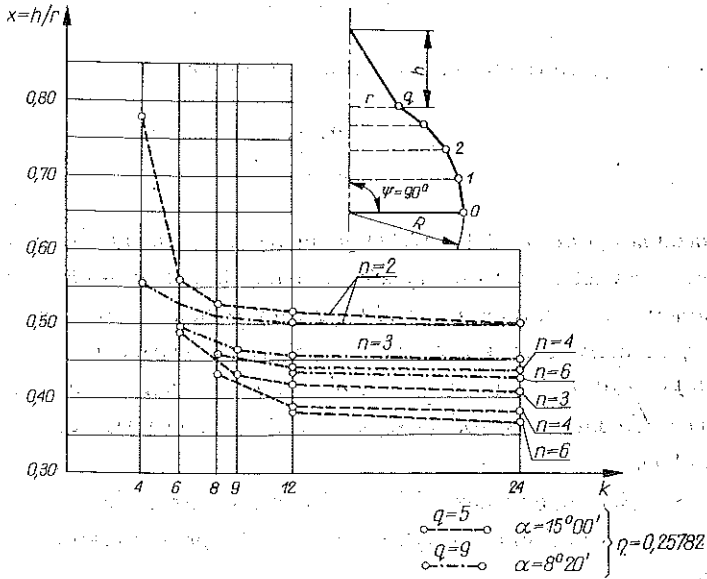
Geometrycznie zmiennie kształty powłoki stożkowo-kulistej określono wykorzystując wzór (2.9).



Rys. 5

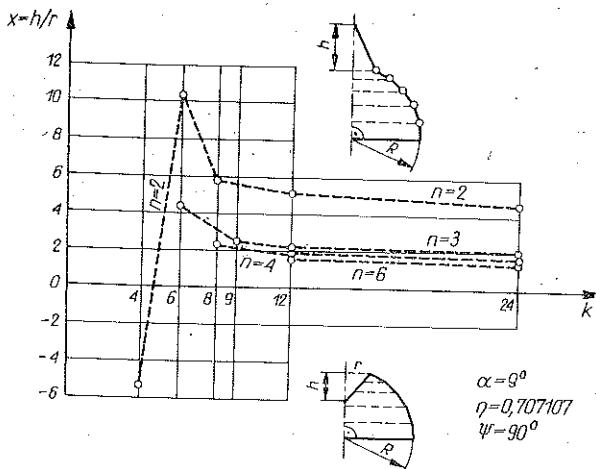
Wpływ położenia przepony na geometrycznie zmiennie kształty powłoki stożkowo-kulistej przedstawiono na rys. 5 przy parametrach: $\alpha = 15^\circ$, $\eta = 0,25882$, $n = 2, 3, 4, 6$ dla trzech wartości parametru ψ .

Z wykresów wynika, że położenie przepony nie ma istotnego wpływu na geometrycznie zmienne kształty rozpatrywanych powłok stożkowo-kulistych.



Rys. 6

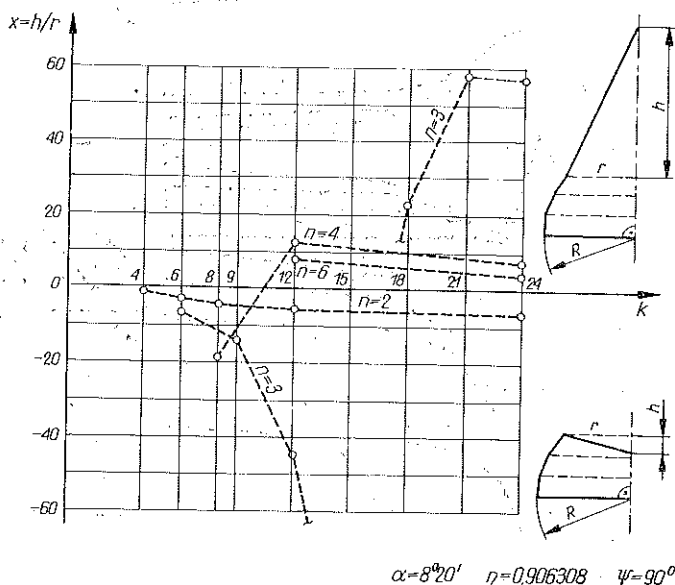
Na rys. 6 przedstawiono wpływ zagęszczenia siatki powłoki w kierunku ξ^2 przy parametrach $\psi=90^{\circ}$, $\eta=0,25882$ dla dwóch wartości parametru α . Wzrost zagęszczenia siatki powłoki w kierunku ξ^2 powoduje zwiększenie się obszaru x , w którym powłoka może być geometrycznie zmienna. Dla rozpatrywanych powłok



Rys. 7a

geometrycznie zmienny przedział x siatek o mniejszym zagęszczeniu zawiera się w przedziale x siatek o większym zagęszczeniu.

Wpływ $\eta = r/R$ pokazano na rys. 7 i 5. Można z nich odczytać, że dla małych η (rys. 5) geometrycznie zmiennie kształty powłok występują dla stożków skierowanych na zewnątrz kuli. Przy stopniowym wzroście η (rys. 7) pojawiają się rozwiązania x ujemnie, które oznaczają, że geometrycznie zmiennie kształty powłok występują



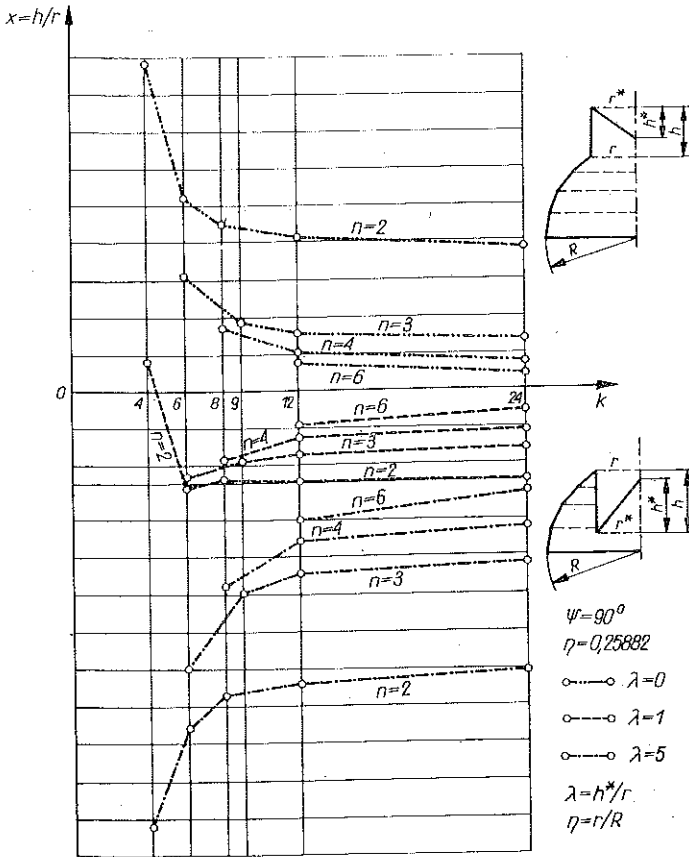
Rys. 7b

dla stożków skierowanych wierzchołkiem do wewnątrz kuli. Proces ten postępuje najszybciej dla małych n i k . Stwierdzono, że dla $\eta = 0,52500$ geometrycznie zmiennie kształty powłok stożkowo-kulistych występują tylko dla stożków skierowanych wierzchołkiem na zewnątrz kuli. Wraz ze wzrostem k i n od ich pewnej wartości granicznej wartość $x = h/r$ dąży asymptotycznie do wartości

$$x_A = \operatorname{ctg} \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right).$$

4. ROZWIĄZANIE LICZBOWE POWŁOKI WALCOWO-KULISTEJ (RYS. 1b)

Geometrycznie zmiennie kształty powłok walcowo-kulistych określono na podstawie wzoru (2.11). Dla takich powłok zbadano wpływ wysokości stożka ostrego (wpływ λ) na geometrycznie zmiennie kształty konstrukcji. Wyniki przeprowadzonych obliczeń zamieszczono na rys. 8 przy następujących parametrach: $\psi = 90^{\circ}$, $\eta = 0,25882$. Stwierdzono, że wraz ze wzrostem k i n wartość x dąży asymptotycznie od pewnych granicznych wartości k i n do $x_A = 0$.



Rys. 8

5. ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONE

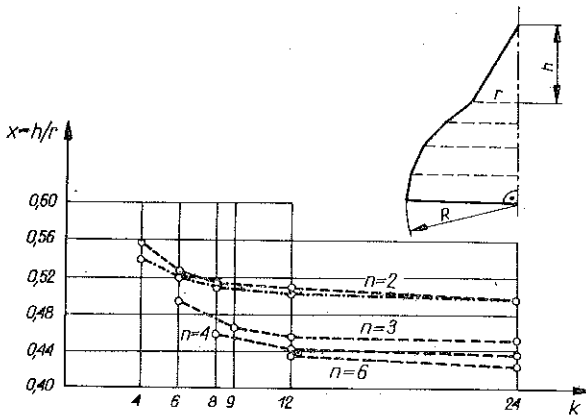
Geometrycznie zmienne kształty powłok stożkowo-kulistych (rys. 1a) można w pewnym zakresie η określić z następującego wzoru przybliżonego:

$$(5.1) \quad x = \frac{\frac{\cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) \cos \alpha q}{\sin \alpha} + 2\kappa \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right)}{\frac{\cos \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right) \cos \alpha q \sin \alpha \left(q - \frac{3}{2} \right)}{\sin \alpha} + 2\kappa \sin \frac{\alpha}{2} \sin \alpha \left(q - \frac{1}{2} \right) - \cos \alpha (q-1)}$$

Dokładność metody przybliżonej zależy przede wszystkim od n i k , przy czym wartość błędu jest tym mniejsza, im mniejsze jest η oraz większe n i k . Tak np., gdy $\eta=0,52500$, to

dla $k=4$, $n=2$	błąd wynosi 300%,
$k=24$, $n=2$	błąd wynosi 39%,
$n=4$	max błąd wynosi 21%,
$n=6$	max błąd wynosi 6,2%.

Na rys. 9 na tle rozwiązania pełnego (linia przerywana) zaznaczono na linii punktowej rozwiązania określone na podstawie wzoru przybliżonego (5.1) dla parametrów $\alpha=15^\circ$, $\psi=90^\circ$, $\eta=0,25882$. Maksymalny błąd rozwiązania przybliżonego występuje dla $k=4$, $n=2$ i nie przekracza 3,3%. Jeżeli $n>2$ lub $k>24$, rozwiązania



Rys. 9

praktycznie pokrywają się. Zaletą metody przybliżonej jest uniknięcie określenia wartości wyznaczników W^{q-1} i W^{q-2} , co przy znacznym zagęszczeniu siatki w kierunku ξ^2 wydatnie zmniejsza pracochłonność obliczeń. Wadą rozwiązania przybliżonego jest jego ograniczoność ($\eta \leq 0,25882$). Metoda przybliżona daje zawsze wartości x zaniżone w stosunku do wartości otrzymanych metodą «pełną».

6. WNIOSKI

Rozpatrywane w pracy konstrukcje (rys. 1) przy ustalonych parametrach k , n , α , η , ψ , λ mają tylko jedno rozwiązanie x [(2.9), (2.11)], dla którego powłoki mają geometrycznie zmiennie kształty. Powłoka stożkowa-kulista (rys. 1a) dla $\eta \leq 0,52500$ nie może być geometrycznie zmienną dla stożków skierowanych wierzchołkiem do wewnątrz kuli. Dla takiej powłoki istnieją także graniczne wartości k , n , powyżej których x dąży asymptotycznie do wartości $x_A = \text{ctg } \alpha (q - \frac{1}{2})$. Powłoka walcowo-kulista (rys. 1b) w pewnych przedziałach zmienności λ nie może być geometrycznie zmienną. Na przykład dla $\eta=0,25882$, $\psi=90^\circ$ geometrycznie zmienny kształt powłoki występuje tylko dla walca skierowanego na zewnątrz kuli, gdy $\lambda \leq 0$, natomiast do wewnątrz kuli, gdy $\lambda \geq 2$. Wartość x , przy której powłoka walcowo-kulista przybiera kształt geometrycznie zmienny od pewnych granicznych wartości k i n , dąży asymptotycznie do wartości $x_A=0$.

Położenie przepony nie ma istotnego wpływu na geometrycznie zmiennie kształty powłok stożkowo-kulistych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Kinematic criteria of geometric non-rigidity of discrete lattices*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **17**, 5, 1969.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Teoria powłok siatkowych* [w przygotowaniu do druku].
4. H. FRĄCKIEWICZ, A. LEGAT, *O osobliwości pewnych niégładkich konstrukcji powierzchniowych*. (I). Rozpr. Inż., **15**, 2, 1967.
5. H. FRĄCKIEWICZ, A. LEGAT, *O osobliwości pewnych niégładkich konstrukcji powierzchniowych*. (II). Rozpr. Inż. **16**, 1, 1968.
6. H. FRĄCKIEWICZ, J. LEWIŃSKI, *Geometrical variability of regular multisegmental structures*. Part I., Arch. Inżyn., **14**, 4, 1968.
7. H. FRĄCKIEWICZ, J. LEWIŃSKI, *Geometrical variability of regular multisegmental surface structures*. Part II., Arch. Inżyn., **16**, 1, 1970.

Резюме

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ ФОРМ КОНСТРУКЦИЙ
КОНУСНО-СФЕРИЧЕСКИХ СЕТОК

В работе рассмотрена проблема геометрической изменчивости замкнутых сеточных конусно- и цилиндрически-сферических оболочек. Опираясь на критерий статической геометрической изменчивости замкнутых сеточных конструкций определены соотношения между геометрическими параметрами исследуемых оболочек и случае их геометрически изменяющихся форм. Работу иллюстрируют диаграммы представляющие влияние отдельных геометрических параметров на геометрически изменяющуюся форму конструкции. Для конусно-сферической оболочки даются также приближенные соотношения между геометрически изменяющимися геометрическими параметрами конструкции, а также дается область их применимости.

SUMMARY

DETERMINATION OF GEOMETRICALLY VARIABLE SHAPES
OF CONICALLY-SPHERICAL LATTICE STRUCTURES

In a paper the problem of geometrical variability of the closed conical and cylindrically spherical lattice shells is considered. Basing on the static criterion of geometrical variability of closed lattice structures the relations between geometrical parameters of shells considered in a case of their geometrically variable shapes are determined. For illustration of the problem the diagrams showing the influence of the particular geometrical parameters on the geometrically variable shape of structure are presented. For conically-spherical shell the approximate relations between geometrically variable geometrical parameters of the structure are also given and a range of their applicability is determined.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 19 listopada 1973 r.

ZASTOSOWANIE CZUŁOŚCI OBIEKTU NA ZMIANY PARAMETRÓW JAKO METODY OPTIMALIZACJI

CZESŁAW CEMPEL (POZNAŃ)

W pracy przedstawiono propozycję metody optymalizacji dynamiczności obiektu w obecności wymuszeń o szerokim widmie. Zastosowana tu do oceny dynamiczności podatność szerokopasowa jest wyrażona w funkcji parametrów strukturalnych. To z kolei umożliwia konstrukcję wektora czułości obiektu, którego znajomość ułatwia zadanie optymalizacji.

1. WSTĘP

Ocena zachowania się obiektów mechanicznych pod wpływem wymuszeń związana jest z pojęciem miary dynamiczności obiektu. Dla wymuszeń najprostszych — typu harmonicznego — miarą taką może być amplituda drgań. Dla ogólnej klasy złożonych wymuszeń zdeterminowanych i przypadkowych wąskopasmowych jedną z miar może być podatność maksymalna obiektu, wprowadzona w pracy [1]. Z kolei zachowanie się obiektu przy wymuszeniach szerokopasmowych dogodnie jest oceniać za pomocą tzw. podatności szerokopasmowej [2]. Tę ostatnią wielkość można wyrazić wprost w funkcji parametrów strukturalnych obiektu, w związku z czym istnieje możliwość optymalizacji parametrycznej jego dynamiczności. Minimalizacja podatności szerokopasmowej, jako miary dynamiczności, związana jest z koniecznością rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych dla określenia optymalnych wartości parametrów strukturalnych. Okazuje się, że procedurę tę można ominąć przez określenie tzw. współczynników czułości obiektu na zmiany parametrów. Znajomość tych współczynników umożliwia z kolei wybór dróg postępowania dla uzyskania minimalnej dynamiczności w interesującej nas współrzędnej obserwowanej. Zagadnieniu temu poświęcona jest niniejsza praca.

2. RÓWNANIA RUCHU OBIEKTU

Weźmy pod uwagę dowolny liniowy dyskretny obiekt mechaniczny. Równania ruchu wokół ustalonego położenia równowagi lub też równania ruchu zaburzonego we współrzędnych centrowanych mogą mieć następującą postać operatorową:

$$(2.1) \quad \{s^2 M + sC + K\} X = F,$$

$$X = \text{col} \{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

$$F = \text{col} \{F_1, F_2, \dots, F_n\}.$$