

## ANALIZA STATECZNOŚCI PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DŹWIGARÓW KRATOWYCH

HENRYK FRĄCKIEWICZ (KIELCE) I JAN MISIAK (RADOM)

Przedmiotem pracy jest analiza stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych. Zbadano w niej wpływ sposobu podparcia, obciążenia i wykrzyżowania dźwigara na wartość globalnej siły krytycznej. Określenie wpływu powyższych parametrów na wielkość obciążenia krytycznego ma szczególne znaczenie dla prawidłowego projektowania tych dźwigarów. Z przeprowadzonej analizy wynika, że dobierając odpowiednio te parametry (przy tej samej wielkości obciążenia) można zaprojektować dźwigar o minimalnym ciężarze.

W pracy wykazano ponadto, że stateczność lokalna prętów, którą wprowadzano w dotychczasowych obliczeniach projektowych, nie może być uznana jako jedyne kryterium wymiarowania dźwigarów.

### WSTĘP

Płaskie dźwigary kratowe dzięki swoim zaletom znajdują szerokie zastosowanie w wielu konstrukcjach inżynierskich. Wyznaczenie sił wewnętrznych w prętach tych dźwigarów, gdy traktujemy je jako kratownice płaskie z węzłami przegubowymi, jest zadaniem elementarnym. Dla prawidłowego zaprojektowania dźwigara niezbędna jest jednak znajomość jego własności wybożeniowych, a w szczególności znajomość utraty stateczności płaskiej postaci zginania.

Dotychczasowe metody obliczania stateczności dźwigarów kratowych polegały na traktowaniu tych dźwigarów jako ram wieloobwodowych. Stopień trudności obliczeń wzrasta jednak bardzo gwałtownie wraz ze wzrostem liczby prętów dźwigara. W obliczeniach tych zachodzi potrzeba sformalizowania metody. Próbę taką podjęli J. BAUER i W. GUTKOWSKI w pracy [1]. Metodą zaproponowaną przez tych autorów również nie jest łatwa do obliczeń numerycznych, ponieważ prowadzi do rozwiązania złożonych układów równań przestępnych. Dla celów inżynierskich istnieje konieczność opracowania metody bardziej efektywnej: prostszej obliczeniowo, chociażby to miało się wiązać z przyjęciem pewnych założeń upraszczających.

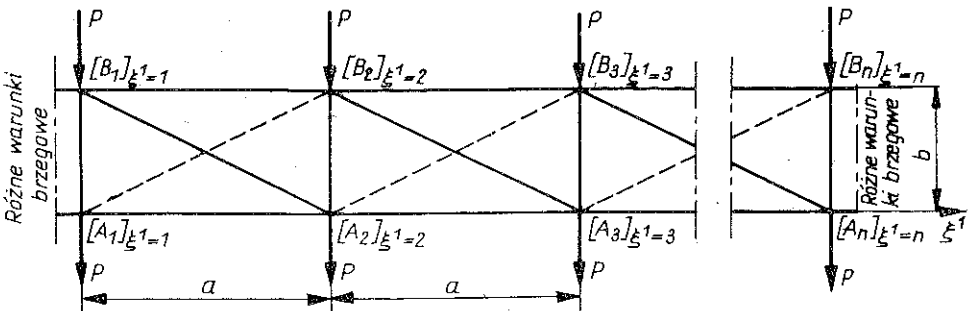
H. FRĄCKIEWICZ w pracy [3] przedstawił przybliżoną metodę obliczania stateczności układów siatkowych, opartą na teorii ośrodka dyskretnego, wprowadzonej w pracy [2]. J. MISIAK opierając się na tej ogólnej metodzie, opracował w pracach [5 i 6] metodę obliczania stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów siatkowych, polegającą na sprowadzeniu problemu stateczności, sformułowanego w pracy [3], do zagadnienia jednowymiarowego. Pozwoliło to na poważne uproszczenie obliczeń i uczynienie metody bardziej efektywną. Metodę tę autor zilustrował liczbowymi przykładami.

Cel, jaki postawili przed sobą autorzy w niniejszej pracy, polega na zbadaniu wpływu takich parametrów, jak sposób wykrzyżowania, sposób obciążenia, rodzaj podparcia na stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych. Zbadanie wpływu powyższych parametrów na wielkość obciążenia krytycznego ma wielkie znaczenie dla prawidłowego projektowania tych konstrukcji. Z przeprowadzonej analizy wynika, że dobierając odpowiednio sposób wykrzyżowania, obciążenia i podparcia, można zaprojektować (przy tej samej wielkości obciążenia) dźwigar o minimalnym ciężarze. Zysk na ciężarze jest tak poważny, że uzasadnia potrzebę dokonywania proponowanej analizy.

W pracy wykazano ponadto, że stateczność lokalna prętów, którą przeprowadzano w dotychczasowych obliczeniach projektowych, nie może być uznana jako wymiarująca stateczność dźwigarów.

### 1. METODA BADANIA STATECZNOŚCI PŁASKIEJ POSTACI ZGINANIA DŹWIGARÓW KRATOWYCH

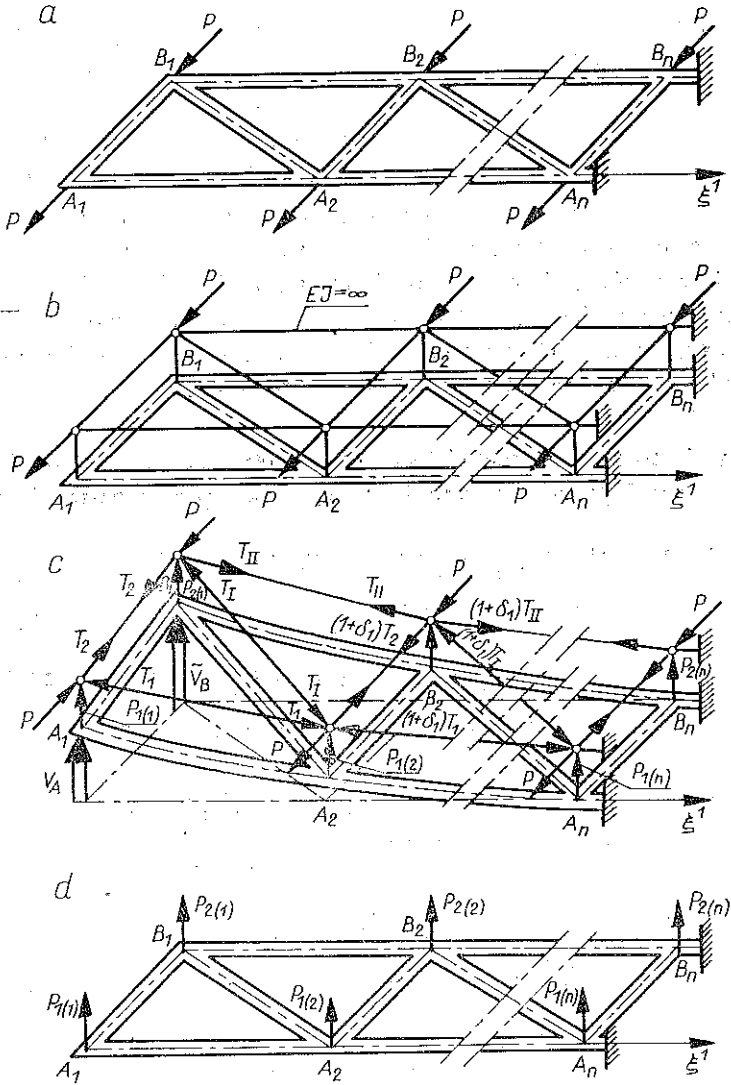
Przedmiotem rozważań jest regularny, płaski dźwigar prostokątny z przekątniowym wykrzyżowaniem, którego proste pręty sprężyste połączone są w węzłach przegubami płaskimi, tworząc siatkę trójkątną (rys. 1). Przekrój pręta jest stały na odcinku między węzłami, a główna centralna oś bezwładności przekroju leży w płaszczyźnie dźwigara. Dźwigar obciążony jest w węzłach dolnego i górnego pasa stałymi potencjalnymi siłami  $P$ , leżącymi w jego płaszczyźnie.



Rys. 1

Jak to stwierdziliśmy we wstępie, opierać się będziemy na przybliżonej metodzie obliczania wybożenia płytowego płaskich dźwigarów siatkowych, omówionej w pracy [3]. Przybliżenie to polega na takim wymodelowaniu zjawiska wybożenia, które daje się opisać prostymi liniowymi równaniami algebraicznymi. Według tej metody wybożeniowymi równaniami równowagi dla dowolnych siatek stają się równania statycznego zginania płyty siatkowej; w równaniach tych miejsce dowolnego obciążenia zewnętrznego przyjmuje obciążenie szczególne, będące pewną pochodną tarczowego stanu napięć i stanu przemieszczeń, powodujące płytowe wygięcie dźwigara. W pracy [3] przedstawiony został model ilustrujący sposób obliczania tego obciążenia. Podobny model można zbudować w celu opisanego zagadnienia

stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów kratowych (rys. 2). Nad dźwigarem (rys. 2a) rozpiną się siatkę zbudowaną z prętów sztywno-sprężystych ( $EJ = \infty$ ), połączonych z sobą przegubowo oraz poprzez sztywne łączniki, połączone przegubowo z dźwigarem (rys. 2b). Powstaje w ten sposób układ składający się ze sztywno-



Rys. 2

-przegubowej tarczy i sprężystej płyty siatkowej. Sposób połączenia węzłów sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty jest taki, że umożliwia przeniesienie niecrównoważonych obciążeń w obrębie tarczowego stanu napięć z tarczy na płytę. Nadając węzłom tarczy przemieszczenia  $V_A$  i  $V_B$  powoduje się przejście tego układu od płaskiej postaci do konfiguracji wygiętej (rys. 2c).

Obciążeniem krytycznym nazywać będziemy taką wartość obciążenia tarczowego  $P$ , przy którym jest możliwa równowaga układu złożonego ze sztywno-przegubowej tarczy i sprężystej płyty w płytowej konfiguracji wygiętej. Jak widać z rys. 2c pręty tarczy po nadaniu tych wychyleń pozostają proste, a płyta wygina się sprężysto. W efekcie siły pojawiające się w prętach tarczy ( $T_1, T_2, T_1, T_{11}$ ) dają rzut na kierunek prostopadły do jej płaszczyzny i powstałe w ten sposób siły  $P_{1(1)}, P_{1(2)}, P_{2(1)}, P_{2(2)}$  nie mogą być zrównoważone w obrębie tarczowego stanu napięć i obciążają sprężoną z tarczą płytę. Siły te są liniową funkcją sił tarczowych i założonego wychylenia płytowego. Zagadnienie w efekcie sprowadza się do rozwiązania płyty obciążonej w węzłach siłami liniowo zależnymi od ugięcia tych węzłów (rys. 2d).

Zgodnie z przedstawionym schematem metoda rozwiązania polegać będzie na określeniu tarczowego stanu napięć, wyprowadzeniu równań równowagi płyty obciążonej w węzłach dowolnym obciążeniem, obliczeniu obciążenia płytowego zgodnie z przedstawionym wyżej modelem oraz na ustaleniu wybozeniowych równań równowagi. Zaletą tej metody jest to, że nie prowadzi ona do złożonych równań różnicowych przestępnych i jest bardzo dokładna dla szerokiej klasy siatek.

Stosownie do przyjętej metody wybozeniowe równania równowagi dla rozpatrywanego prostokątnego dźwigara kratowego mają postać następującą:

$$\begin{aligned}
 & E_{11}^1 \Omega_{(\xi^1)}^1 + E_{12}^1 \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + E_{13}^1 \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + E_{22}^1 \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + \tilde{E}_{11}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \\
 & \quad + \tilde{E}_{12}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \tilde{E}_{21}^1 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + E_2^1 V_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}_1^1 \tilde{V}_{(\xi^1)} + \tilde{E}_2^1 \tilde{V}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & E_{12}^2 \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + E_{21}^2 \Omega_{(\xi^1)}^2 + E_{22}^2 \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + E_{23}^2 \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + \tilde{E}_{11}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \tilde{E}_{21}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \\
 & \quad + \tilde{E}_{22}^2 \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + E_1^2 V_{(\xi^1)} + E_2^2 V_{(\xi^1+1)} + E_3^2 V_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}_1^2 \tilde{V}_{(\xi^1)} = 0, \\
 & E_{12}^I \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + E_{13}^I \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + E_{23}^I \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + \tilde{E}_{11}^I \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \tilde{E}_{12}^I \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \\
 & \quad + \tilde{E}_{13}^I \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^1 + \tilde{E}_{22}^I \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + E_2^I V_{(\xi^1+1)} + E_3^I V_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}_2^I \tilde{V}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 (1.1) \quad & E_{13}^{II} \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + E_{22}^{II} \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + E_{23}^{II} \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + \tilde{E}_{12}^{II} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \tilde{E}_{21}^{II} \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \tilde{E}_{22}^{II} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + \\
 & \quad + \tilde{E}_{23}^{II} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^2 + E_3^{II} V_{(\xi^1+2)} + \tilde{E}_1^{II} \tilde{V}_{(\xi^1)} + \tilde{E}_2^{II} \tilde{V}_{(\xi^1+1)} + \tilde{E}_3^{II} \tilde{V}_{(\xi^1+2)} = 0, \\
 & E'_{12} \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + E'_{21} \Omega_{(\xi^1)}^2 + E'_{22} \Omega_{(\xi^1+1)}^2 + E'_{23} \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + \tilde{E}'_{11} \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1 + \\
 & \quad + \tilde{E}'_{12} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \tilde{E}'_{21} \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + (E'_1 + E'_{1p}) V_{(\xi^1)} + (E'_2 + E'_{2p}) V_{(\xi^1+1)} + \\
 & \quad + (E'_3 + E'_{3p}) V_{(\xi^1+2)} + (\tilde{E}'_1 + \tilde{E}'_{1p}) \tilde{V}_{(\xi^1)} + (\tilde{E}'_2 + \tilde{E}'_{2p}) \tilde{V}_{(\xi^1+1)} = 0, \\
 & E''_{12} \Omega_{(\xi^1+1)}^1 + E''_{13} \Omega_{(\xi^1+2)}^1 + E''_{23} \Omega_{(\xi^1+2)}^2 + \tilde{E}''_{12} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1 + \tilde{E}''_{21} \tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2 + \\
 & \quad + \tilde{E}''_{22} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2 + \tilde{E}''_{23} \tilde{\Omega}_{(\xi^1+2)}^2 + (E''_2 + E''_{2p}) V_{(\xi^1+1)} + (E''_3 + E''_{3p}) V_{(\xi^1+2)} + \\
 & \quad + (\tilde{E}''_1 + \tilde{E}''_{1p}) \tilde{V}_{(\xi^1)} + (\tilde{E}''_2 + \tilde{E}''_{2p}) \tilde{V}_{(\xi^1+1)} + (\tilde{E}''_3 + \tilde{E}''_{3p}) \tilde{V}_{(\xi^1+2)} = 0.
 \end{aligned}$$

Brzeg podparty prze	
$\Omega^2_{(\xi^1-1)}$	
0	
$\frac{a^3 (\eta - \mu)}{A^3}$	
Brzeg $A_1 B_1 (\xi^1 = 1)$	
$1 + \frac{a(a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	
0	
$\frac{a^3 (\mu - \eta)}{A^3}$	
$\frac{a(a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	

Brzeg podparty prze	
$\Omega^2_{(\xi^1+1)}$	
0	
0	-
Brzeg $A_n B_n (\xi^1 = n)$	
1	$\frac{a^2}{}$
0	
0	$\frac{a}{}$
1	$-\frac{ab}{}$

Tablica 1

ny			Brzeg podparty przegubowo						Brzeg sztywno zamocowany					
(1)	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2$	$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2$	$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2$
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	$\frac{ba^4(2\eta-\mu)}{2A^3}$	$1 + \frac{a(4b^2\eta+a^2\mu)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\eta-\mu)}{A^3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	$ab + \frac{a^2b^2(b^2\mu+2a^2\eta)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta-\mu)}{\psi A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	$\frac{ba^4\mu}{2A^3}$	$\frac{a(a^2\mu-2b^2\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\mu-\eta)}{A^3}$	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	$\frac{a^2b^2(2a^2\eta+b^2\mu)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(\mu-4\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	ab	0	1	0	0	0	0	0	0
ny			Brzeg podparty przegubowo						Brzeg sztywno zamocowany					
(1)	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2$	$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2$	$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2$
$\frac{\eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{b\mu}{A^3}$	$\frac{a(2b^2\eta+\mu a^2)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(\mu-\eta)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4b(4\eta+\mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{a(2b^2\eta+\mu a^2)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(5\eta+\mu)}{\beta A^3}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{a^2\eta+b^2\mu}{A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$\frac{a(\eta a^2+b^2\mu)}{\beta A^3}$	-ab	0	1	$\frac{a^2b(6\eta a^2+b^2\mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$\frac{a(7a^2\eta+b^2\mu)}{\beta A^3}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{\eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{\eta+\mu}{A^3}$	$1 + \frac{a(a^3\mu-4b^2\eta)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(\eta+\mu)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4b(\mu-6\eta)}{2\beta A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\mu-4b^2\eta)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(7\eta+\mu)}{\beta A^3}$	0	0	0	0	0	0
$\frac{a^2\eta+b^2\mu}{A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\eta+\mu b^2)}{\beta A^3}$	ab	0	1	$-\frac{ab^2b(6a^2\eta+b^2\mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$1 + \frac{a(7a^2\eta+b^2\mu)}{\beta A^3}$	0	0	0	0	0	0

Tablica 1

		Brzeg swobodny — nie obciążony						Brzeg podparty przegubowo			
		$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2$	$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$
Brzeg $A_1 B_1$ ( $\xi^1 = 1$ )	$V_{(\xi^1)}$	$1 + \frac{a^3 \eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\psi A^3}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^1$	$\frac{ba^4 (2\eta - \mu)}{2A^3}$	$1 + \frac{a (4b^2 \eta + a^2 \mu)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3 (\eta - \mu)}{A^3}$	0	0	0	$\frac{ba^4 (2\eta - \mu)}{2A^3}$	$1 + \frac{a (4b^2 \eta + a^2 \mu)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3 (\eta - \mu)}{A^3}$	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^2$	$ab + \frac{a^2 b^2 (b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3}$	$\frac{ab^2 (4\eta - \mu)}{\psi A^3}$	$1 + \frac{a (a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	0	0	0	$ab + \frac{a^2 b^2 (b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3}$	$\frac{ab^2 (4\eta - \mu)}{\psi A^3}$	$1 + \frac{a (a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	0
	$\tilde{V}_{(\xi^1)}$	$\frac{a^3 \eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\psi A^3}$	0	1	0	0	0	0	0	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1$	$\frac{ba^4 \mu}{2A^3}$	$\frac{a (a^2 \mu - 2b^2 \eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3 (\mu - \eta)}{A^3}$	0	1	0	$\frac{ba^4 \mu}{2A^3}$	$\frac{a (a^2 \mu - 2b^2 \eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3 (\mu - \eta)}{A^3}$	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2$	$\frac{a^2 b (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3}$	$\frac{ab^2 (\mu - 4\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a (a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	ab	0	1	$\frac{a^2 b^2 (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3}$	$\frac{ab^2 (\mu - 4\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a (a^2 \eta + b^2 \mu)}{A^3}$	ab
		Brzeg swobodny — nie obciążony						Brzeg podparty przegubowo			
		$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2$	$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$
Brzeg $A_n B_n$ ( $\xi^1 = n$ )	$V_{(\xi^1)}$	1	0	0	$\frac{a^3 \eta}{\beta A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^1$	0	1	0	$\frac{a^4 b \mu}{2\beta A^3}$	$\frac{a (2b^2 \eta + \mu a^2)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3 (\mu - \eta)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4 b (4\eta + \mu)}{2\beta A^3}$
	$\Omega_{(\xi^1)}^2$	-ab	0	1	$\frac{a^2 b (2\eta a^2 + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{ab^2 (4\eta + \mu)}{\delta A^3}$	$\frac{a (\eta a^2 + b^2 \mu)}{\beta A^3}$	-ab	0	1	$\frac{a^2 b (6\eta a^2 + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$
	$\tilde{V}_{(\xi^1)}$	0	0	0	$1 + \frac{a^3 \eta}{\beta A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1$	0	0	0	$\frac{a^4 b (2\eta + \mu)}{2\beta A^3}$	$1 + \frac{a (a^3 \mu - 4b^2 \eta)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3 (\eta + \mu)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4 b (\mu - 6\eta)}{2\beta A^3}$
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2$	0	0	0	$-ab - \frac{a^2 b (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$	$-\frac{ab^2 (4\eta + \mu)}{\delta A^3}$	$1 + \frac{a (a^2 \eta + \mu b^2)}{\beta A^3}$	ab	0	1	$-ab - \frac{a^2 b (6a^2 \eta + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$

Tablica 1

		Brzeg swobodny — nie obciążony						Brzeg podparty przegubowo			
		$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1-1)}^2$	$V_{(\xi^1-1)}$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1-1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1-1)}$
Brzeg $A_1, B_1$ ( $\xi^1=1$ )	$V_{(\xi^1)}$	$1 + \frac{a^3 \eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\psi A^3}$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^1$	$\frac{ba^4(2\eta-\mu)}{2A^3}$	$1 + \frac{a(4b^2\eta+a^2\mu)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\eta-\mu)}{A^3}$	0	0	0	$\frac{ba^4(2\eta-\mu)}{2A^3}$	$1 + \frac{a(4b^2\eta+a^2\mu)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\eta-\mu)}{A^3}$	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^2$	$ab + \frac{a^2 b^2 (b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta-\mu)}{\psi A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	0	0	0	$ab + \frac{a^2 b^2 (b^2 \mu + 2a^2 \eta)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta-\mu)}{\psi A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	0
	$\tilde{V}_{(\xi^1)}$	$\frac{a^3 \eta}{A^3}$	$\frac{6b\eta}{\psi A^3}$	0	1	0	0	0	0	0	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1$	$\frac{ba^4 \mu}{2A^3}$	$\frac{a(a^2\mu-2b^2\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\mu-\eta)}{A^3}$	0	1	0	$\frac{ba^4 \mu}{2A^3}$	$\frac{a(a^2\mu-2b^2\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a^3(\mu-\eta)}{A^3}$	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2$	$\frac{a^2 b (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(\mu-4\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	ab	0	1	$\frac{a^2 b^2 (2a^2 \eta + b^2 \mu)}{2A^3}$	$\frac{ab^2(\mu-4\eta)}{\psi A^3}$	$\frac{a(a^2\eta+b^2\mu)}{A^3}$	ab
		Brzeg swobodny — nie obciążony						Brzeg podparty przegubowo			
		$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^1$	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1+1)}^2$	$V_{(\xi^1+1)}$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^1$	$\Omega_{(\xi^1+1)}^2$	$\tilde{V}_{(\xi^1+1)}$
Brzeg $A_n, B_n$ ( $\xi^1=n$ )	$V_{(\xi^1)}$	1	0	0	$\frac{a^3 \eta}{\beta A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0
	$\Omega_{(\xi^1)}^1$	0	1	0	$\frac{a^4 b \mu}{2\beta A^3}$	$\frac{a(2b^2\eta+\mu a^2)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(\mu-\eta)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4 b(4\eta+\mu)}{2\beta A^3}$
	$\Omega_{(\xi^1)}^2$	-ab	0	1	$\frac{a^2 b(2\eta a^2 + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$\frac{a(\eta a^2 + b^2 \mu)}{\beta A^3}$	-ab	0	1	$\frac{a^2 b(6\eta a^2 + b^2 \mu)}{2\beta A^3}$
	$\tilde{V}_{(\xi^1)}$	0	0	0	$1 + \frac{a^3 \eta}{\beta A^3}$	$\frac{6b\eta}{\delta A^3}$	0	0	0	0	0
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^1$	0	0	0	$\frac{a^4 b(2\eta+\mu)}{2\beta A^3}$	$1 + \frac{a(a^3\mu-4b^2\eta)}{\delta A^3}$	$\frac{a^3(\eta+\mu)}{\beta A^3}$	0	1	0	$\frac{a^4 b(\mu-6\eta)}{2\beta A^3}$
	$\tilde{\Omega}_{(\xi^1)}^2$	0	0	0	$-ab - \frac{a^2 b(2a^2\eta+b^2\mu)}{2\beta A^3}$	$\frac{ab^2(4\eta+\mu)}{\delta A^3}$	$1 + \frac{a(a^2\eta+\mu b^2)}{\beta A^3}$	ab	0	1	$-ab - \frac{a^2 b(6a^2\eta+b^2\mu)}{2\beta A^3}$



Równania (1.1) są uogólnieniem równań otrzymanych w pracy [6]. Wyprowadzając je uzależniono cechy geometryczne dźwigara, stan przemieszczenia i napięcia od jednej zmiennej  $\xi^1$ , co uprościło znacznie zagadnienie warunków brzegowych. Jest to układ jednorodny sześciu równań różnicowych liniowych o stałych współczynnikach. Niewiadomymi funkcjami współrzędnej  $\xi^1$  węzłów dźwigara jest sześć składowych  $\Omega^1, \Omega^2, V, \tilde{\Omega}^1, \tilde{\Omega}^2, \tilde{V}$  stanu przemieszczenia tych węzłów. Wewnętrzne siły tarczowe  $T_1, T_2, T_I, T_{II}$  dla konkretnego dźwigara będą obliczone ze statyki tarczy i wyrażone przez zewnętrzne obciążenie  $P$ .

Operatory równań (1.1) wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 E_{11}^1 = E_{13}^1 = a\psi, \quad E_{12}^1 &= -\frac{4a^2 b^2 \eta + a^4 \mu}{A^3} - 2a\psi - \frac{4a^2 \alpha}{b}, \\
 E_{22}^1 = E_{12}^2 = \tilde{E}_{22}^2 = \tilde{E}_{12}^{II} &= \frac{a^2 b^2 (\mu - 4\eta)}{A^3}, \quad \tilde{E}_{11}^1 = E_{13}^1 = \frac{a^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\
 \tilde{E}_{12}^1 = E_{12}^1 &= -\frac{2a^2 \alpha}{b}, \quad \tilde{E}_{21}^1 = \tilde{E}_{11}^2 = E_{23}^1 = E_{13}^{II} = -\frac{a^2 b^2 (2\eta + \mu)}{A^3}, \\
 E_2^1 = -\tilde{E}_2^1 = E_2' &= -\tilde{E}_{12}'' = -\left(\frac{6ab\eta}{A^3} + \frac{6a\alpha}{b^2}\right), \quad \tilde{E}_1^1 = -E_2^2 = \tilde{E}_1^2 = -E_3^1 = \\
 &= -E_3^{II} = \tilde{E}_2^{II} = -E_{22}' = -\tilde{E}_{11}' = -\tilde{E}_{21}' = E_{13}'' = E_{23}'' = \tilde{E}_{22}'' = \frac{6ab\eta}{A^3}, \\
 \tilde{E}_2' &= -E_2^1 = -\tilde{E}_{12}' = E_{12}'' = \frac{6a\alpha}{b^2}, \quad E_{21}^2 = E_{22}^1 = -\frac{2b^2}{a}, \\
 E_{22}^2 = \tilde{E}_{22}^{II} &= -\left(\frac{8b^2}{a} + \frac{4a^2 b^2 \eta + b^4 \mu}{A^3} + \gamma b\right), \quad \tilde{E}_{21}^2 = E_{23}^{II} = \frac{b^4 \mu - 2a^2 b^2 \eta}{A^3}, \\
 \tilde{E}_{22}^2 = E_{22}^{II} &= b\gamma, \quad E_1^2 = -E_3^2 = -E_{21}' = E_{23}' = \frac{6b}{a^2}, \quad \tilde{E}_{11}^1 = \tilde{E}_{13}^1 = \delta a, \\
 \tilde{E}_{12}^1 &= -\left(\frac{a^4 \mu + 4a^2 b^2 \eta}{A^3} + 2a\delta + \frac{4a^2 \alpha}{b}\right), \quad \tilde{E}_{21}^{II} = \tilde{E}_{23}^{II} = -\frac{2b^2 \beta}{a}, \\
 \tilde{E}_1^{II} &= -\tilde{E}_3^{II} = -\tilde{E}_{21}'' = \tilde{E}_{23}'' = \frac{6b\beta}{a^2}, \quad E_1' = E_3' = \frac{12}{a^3}, \\
 E_2' &= -12\left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3}\right), \quad \tilde{E}_1' = E_3'' = \frac{12\eta}{A^3}, \quad \tilde{E}_2' = \tilde{E}_2'' = \frac{12\alpha}{b^3}, \\
 \tilde{E}_1'' &= \tilde{E}_3'' = \frac{12\beta}{a^3}, \quad \tilde{E}_2'' = -12\left(\frac{\eta}{A^3} + \frac{2\beta}{a^3} + \frac{\alpha}{b^3}\right), \\
 E_{1p}' &= \frac{T_1(\xi^1)}{a_1 a}, \quad E_{2p}' = -\frac{1}{a_1} \left[ \frac{T_1(\xi^1+1) + T_1(\xi^1)}{a} + \frac{T_1(\xi^1)}{A} + \frac{T_2(\xi^1+1)}{b} \right],
 \end{aligned}$$

(1.2)

$$(1.2) \quad \begin{aligned} E'_{3p} &= \frac{T_1(\xi^{1+1})}{a_1 a}, & \tilde{E}'_{1p} &= \frac{T_1(\xi^1)}{a_1 A}, & \tilde{E}'_{2p} &= \frac{T_2(\xi^{1+1})}{a_1 b}, & E''_{2p} &= \frac{T_2(\xi^{1+1})}{a_1 b}, \\ E''_{3p} &= \frac{T_1(\xi^{1+1})}{a_1 A}, & \tilde{E}''_{1p} &= \frac{T_{II}(\xi^1)}{a_1 a}, & \tilde{E}''_{3p} &= \frac{T_{II}(\xi^{1+1})}{a_1 a}, \\ \tilde{E}''_{2p} &= -\frac{1}{a_1} \left[ \frac{T_{II}(\xi^1) + T_{II}(\xi^{1+1})}{a} + \frac{T_2(\xi^{1+1})}{b} + \frac{T_1(\xi^{1+1})}{A} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{a_I}{a_1}, & \alpha &= \frac{a_2}{a_1}, & \beta &= \frac{a_{II}}{a_1}, & \mu &= \frac{b_1}{a_1}, & \gamma &= \frac{b_2}{a_1}, \\ \delta &= \frac{b_{II}}{a_1}, & \psi &= \frac{b_1}{a_1}, & A &= (a^2 + b^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Symbole  $a_1, a_2, a_I, a_{II}$  oznaczają sztywności zginania łączników,  $b_1, b_2, b_I, b_{II}$  sztywności skręcania łączników. Sposób oznaczenia sztywności jest zgodny z pracą [6].

W tabelicy 1 zestawiono wartości przemieszczeń węzłów fikcyjnych  $A_0 B_0$  i  $A_{n+1} B_{n+1}$ , odpowiadających różnym warunkom brzegowym rozpatrywanego dźwigara.

## 2. ANALIZA WPŁYWU PRZYŁOŻENIA OBCIĄŻENIA, ZAMOCOWANIA I WYKRATOWANIA DŹWIGARÓW

Obliczenie z równań (1.1) krytycznej wartości zewnętrzno obciążenia tarczowego  $P$  dokonuje się za pomocą metody numerycznej, która została opisana w pracach [4, 5 i 6]. Dla przykładów zestawionych w tablicach 2 – 7 metoda ta została opracowana na maszynę cyfrową GIER w języku ALGOL-4. W celu otrzymania wyników niezależnych od konkretnej wartości sztywności zginania lub skręcania poszczególnych łączników dźwigara, podzielono wszystkie równania (1.1) przez sztywność zginania pasa dolnego,  $a_1$  [kGm<sup>2</sup>]. W efekcie tego przekształcenia operatory tych równań posiadają odpowiednie stosunki sztywności, a siły tarczowe zostały podzielone przez tę sztywność. Ostatecznie z rozwiązania równań (1.1) otrzymuje się wartość siły krytycznej podzieloną przez sztywność zginania  $a_1$  ( $P_{kr}/a_1$ ). Umożliwia to określenie wartości sił krytycznych dla danego dźwigara przy dowolnych sztywnościach pasa dolnego.

Wszystkie obliczenia numeryczne przeprowadzono dla prętów o przekrojach osiowosymetrycznych przy następujących stosunkach sztywności:

$$\eta = \alpha = \beta = 1, \quad \mu = \gamma = \delta = \varphi = 0,8$$

oraz wymiarach gabarytowych dźwigara  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 0,5\text{m}$ .

W tablicach 2–5 zestawiono wartości sił krytycznych (globalnych) odpowiadających stateczności płaskiej postaci zginania oraz wartości współczynników bezpieczeństwa  $n$  obliczonych ze względu na stateczność lokalną. Dla dźwigarów zamocowanych wspornikowo (tablice 2 i 3) przeanalizowano wpływ sposobu obciążenia i wykratowania prętów na wartość globalnej siły krytycznej. Przy tej samej wartości obciążenia najbardziej korzystne jest jego przyłożenie do węzłów dolnego pasa. Najmniej korzystne jest obciążenie przyłożone do węzłów górnego pasa. Natomiast obciążenie rozłożone równomiernie do węzłów górnego i dolnego pasa (wiersz 5) daje wyniki pośrednie.

Z porównania sposobów wykratowania prętów (dla różnych obciążeń) wynika, że dźwigary przedstawione w tablicy 2 są korzystniej wykratowane (siły krytyczne są około 30% większe) niż dźwigary zamieszczone w tablicy 3. Porównując współczynniki bezpieczeństwa  $n$  stwierdzono, że tylko niektóre dźwigary utracą wcześniej stateczność lokalnie aniżeli globalnie. Dwa dźwigary w tablicy 3: wiersz 3 (kolumna c) i wiersz 4 (kolumna d), tracą stateczność globalnie i lokalnie przy tych samych wartościach sił krytycznych. W tablicach 4 i 5 przedstawiono dźwigary o jednym systemie wykratowania prętów i obciążeniu przyłożonym do węzłów górnego lub dolnego pasa, lecz o różnych warunkach brzegowych. Najbardziej podatne na globalną utratę stateczności są dźwigary przedstawione w tablicy 4 (wiersz 1). Natomiast dźwigary zamieszczone w tablicy 5 (wiersz 6, 7 i 8) tracą stateczność najpierw lokalnie. Ponadto potwierdza się dla wszystkich przypadków zamocowania poprzednio wysnuty wniosek, że korzystniej jest przykładać obciążenie do węzłów dolnego pasa.

Należy podkreślić, iż w praktyce inżynierskiej stosowane są już konstrukcje obciążane w węzłach dolnego pasa, ale jest to raczej wynik wyczucia projektantów aniżeli analizy teoretycznej.

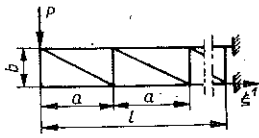
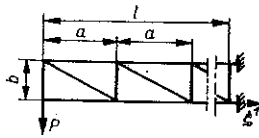
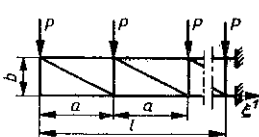
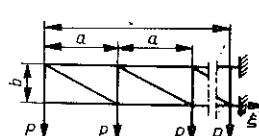
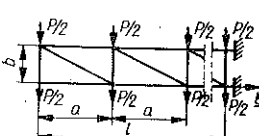
Na podstawie wyników zamieszczonych w tablicach 2–5 można stwierdzić, że sposób zamocowania dźwigarów ma decydujący wpływ na wartość globalnej siły krytycznej. Biorąc pod uwagę dźwigary, dla których wymiarującą będzie globalna siła krytyczna, wybrać można najbardziej korzystne dla nich podparcie.

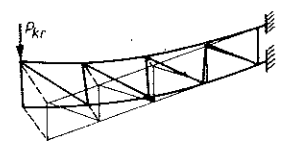
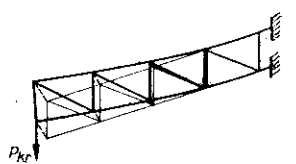
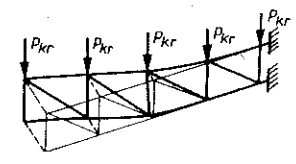
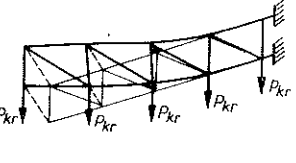
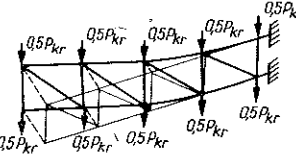
Dobierając prawidłowy sposób podparcia, przyłożenia obciążenia i wykorzystania przy projektowaniu dźwigarów na odpowiednią wartość globalnej siły krytycznej, otrzymuje się je znacznie lżejsze.

Zamieszczone w tablicach 2–5 funkcje sił wewnętrznych w zagadnieniu tarczy (kolumna b) zostały każdorazowo uwzględnione w operatorach (1.2) przy rozwiązywaniu poszczególnych dźwigarów.

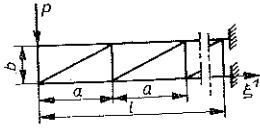
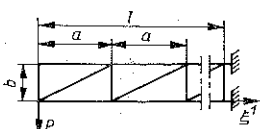
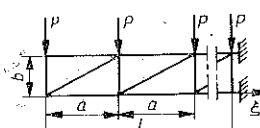
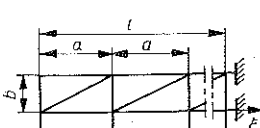
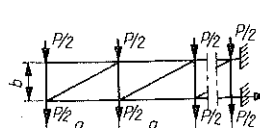
Wszystkim obliczonym globalnym siłom krytycznym odpowiadają przestrzenne giętno-skretne postacie równowagi dźwigara (postacie wyboczenia). Przykładowo dla wartości globalnych sił krytycznych z kolumny e przedstawiono w kolumnie g postacie wyboczenia tych dźwigarów.

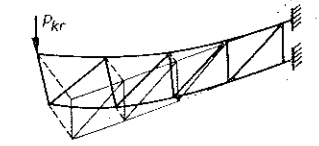
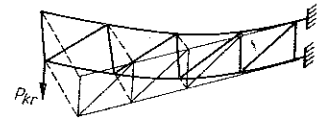
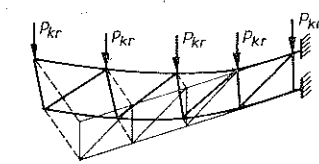
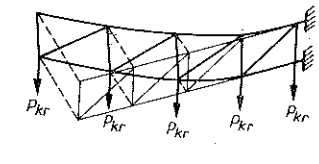
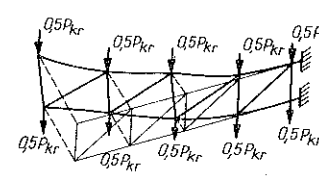
Tablica 2

Kol. Wiersz	a Rodzaj obciążenia i wykrzywiania prętów	b Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy	c $l=2a=2m$ $b=0,5m$
1		$T_1(\xi^1+1) = -P \frac{a}{b} \xi^1$ $T_2(\xi^1+1) = P$ $T_1(\xi^1) = -\frac{P(a^2+b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II}(\xi^1) = P \frac{a}{b} \xi^1$	—
2		$T_1(\xi^1+1) = -P \frac{a}{b} \xi^1$ $T_2(\xi^1) = P$ $T_1(\xi^1) = -\frac{P(a^2+b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II}(\xi^1) = P \frac{a}{b} \xi^1$	$P_{kr} = 5,029986 a_1$ $n = 1$
3		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_2(\xi^1+1) = P \xi^1$ $T_1(\xi^1) = -\frac{P(a^2+b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	—
4		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_2(\xi^1) = P \xi^1$ $T_1(\xi^1) = -\frac{P(a^2+b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	$P_{kr} = 6,427748 a_1$ $n = 0,3$
5		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_2(\xi^1) = P \left( \xi^1 - \frac{1}{2} \right)$ $T_1(\xi^1) = -\frac{P(a^2+b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	$P_{kr} = 5,142352 a_1$ $n = 0,4$

d	e	f	g
$l=3a=3\text{m}$ $b=0,5\text{m}$	$l=4a=4\text{m}$ $b=0,5\text{m}$	$l=5a=6\text{m}$ $b=0,5\text{m}$	Postać wybożenia dźwigara (dla danych z kol. e)
$P_{kr}=1,445608 a_1$ $n=1,7$	$P_{kr}=0,780343 a_1$ $n=2,1$	$P_{kr}=0,478818 a_1$ $n=2,6$	
$P_{kr}=1,754982 a_1$ $n=1,4$	$P_{kr}=0,900915 a_1$ $n=1,8$	—	
$P_{kr}=1,076887 a_1$ $n=1,1$	$P_{kr}=0,468697 a_1$ $n=1,4$	$P_{kr}=0,241726 a_1$ $n=1,7$	
$P_{kr}=1,463581 a_1$ $n=0,8$	$P_{kr}=0,583989 a_1$ $n=1,1$	—	
$P_{kr}=1,283104 a_1$ $n=0,9$	$P_{kr}=0,529532 a_1$ $n=1,2$	—	

Tablica 3

Kol. Wiersz	a	b	c
	Rodzaj obciążenia i wykrzywiania prętów	Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy	$l=2a=2\text{ m}$ $b=0,5\text{ m}$
1		$T_{1(\xi^1+1)} = P \frac{a}{b} \xi^1$ $T_{2(\xi^1)} = -P$ $T_{I(\xi^1)} = \frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II(\xi^1)} = -P \frac{a}{b} \xi^1$	$P_{kr} = 2,369288 a_1$ $n = 2,1$
2		$T_{1(\xi^1)} = P \frac{a}{b} \xi^1$ $T_{2(\xi^1+1)} = -P$ $T_{I(\xi^1)} = \frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II(\xi^1)} = -P \frac{a}{b} \xi^1$	—
3		$T_{1(\xi^1)} = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_{2(\xi^1)} = P \xi^1$ $T_{I(\xi^1)} = -\frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II(\xi^1)} = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	$P_{kr} = 1,889027 a_1$ $n = 1$
4		$T_{1(\xi^1)} = \frac{Pa}{2a} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_{2(\xi^1+1)} = P \xi^1$ $T_{I(\xi^1)} = -\frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II(\xi^1)} = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	—
5		$T_{1(\xi^1)} = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1]$ $T_{2(\xi^1)} = -P \left( \xi^1 - \frac{1}{2} \right)$ $T_{I(\xi^1)} = \frac{P(a^2 + b^2)^{1/2}}{b} \xi^1$ $T_{II(\xi^1)} = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1]$	$P_{kr} = 2,536624 a_1$ $n = 0,8$

d	e	f	g
$l=3a=3\text{ m}$ $b=0,5\text{ m}$	$l=4a=4\text{ m}$ $b=0,5\text{ m}$	$l=5a=5\text{ m}$ $b=0,5\text{ m}$	Postać wybożenia dźwigara (dla danych z kol. e)
$P_{kr}=1,092920 a_1$ $n=2,3$	$P_{kr}=0,617936 a_1$ $n=2,7$	—	
$P_{kr}=1,314657 a_1$ $n=1,9$	$P_{kr}=0,706502 a_1$ $n=2,3$	$P_{kr}=0,426759 a_1$ $n=2,9$	
$P_{kr}=0,715926 a_1$ $n=1,4$	$P_{kr}=0,340523 a_1$ $n=1,7$	—	
$P_{kr}=0,986188 a_1$ $n=1$	$P_{kr}=0,431869 a_1$ $n=1,3$	$P_{kr}=0,220411 a_1$ $n=1,7$	
$P_{kr}=0,852808 a_1$ $n=1,2$	$P_{kr}=0,386844 a_1$ $n=1,5$	—	

Tablica 4

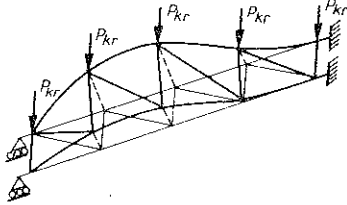
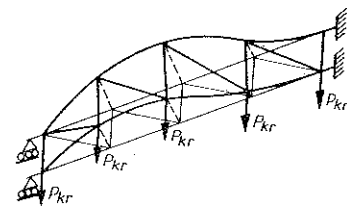
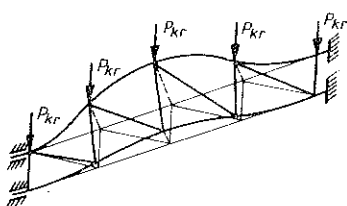
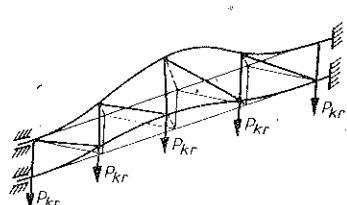
Kol. Wiersz	a	b
	Rodzaj obciążenia i zamocowania dźwigara	Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy
1		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + R \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P(\xi^1 - 1) - R$ $T_1(\xi^1) = \frac{(R - P\xi^1)(a^2 + b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - R \frac{a}{b} \xi^1$
2		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + R \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P\xi^1 - R$ $T_1(\xi^1) = \frac{(R - P\xi^1)(a^2 + b^2)^{1/2}}{b}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - R \frac{a}{b} \xi^1$
3		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P\xi^1 - x_1$ $T_1(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1)(a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$
4		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P\xi^1 - x_1$ $T_1(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1)(a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$



c	d	e	f
$l=3a=3m$ $b=0,5$	$l=4a=4m$ $b=0,5m$	$l=5a=5m$ $b=0,5m$	Postać wybożenia dźwigara (dla danych z kol. d)
$P_{kr}=2,517774 a_1$  $n=1,4$  $R=2P$	$P_{kr}=1,094201 a_1$  $n=2,4$  $R=2,5P$	$P_{kr}=0,564287 a_1$  $n=3,1$  $R=3P$	
$P_{kr}=3,318509 a_1$  $n=1,1$  $R=2P$	$P_{kr}=1,335148 a_1$  $n=2$  $R=2,5P$	$P_{kr}=0,682643 a_1$  $n=2,4$  $R=3P$	
$P_{kr}=3,796864 a_1$  $n=0,8$ $x_1=1,73872 P$ $x_2=0$ $x_3=2P$	$P_{kr}=1,82075 a_1$  $n=1,1$ $x_1=2,095967 P$ $x_2=0$ $x_3=2,5 P$	$P_{kr}=0,938732 a_1$  $n=1,5$ $x_1=2,50325 P$ $x_2=0$ $x_3=3P$	
$P_{kr}=5,517416 a_1$  $n=0,6$ $x_1=1,73872 P$ $x_2=0$ $x_3=2P$	$P_{kr}=2,38946 a_1$  $n=0,9$ $x_1=2,095967 P$ $x_2=0$ $x_3=2,5P$	$P_{kr}=1,21438 a_1$  $n=1,2$ $x_1=2,50325 P$ $x_2=0$ $x_3=3P$	

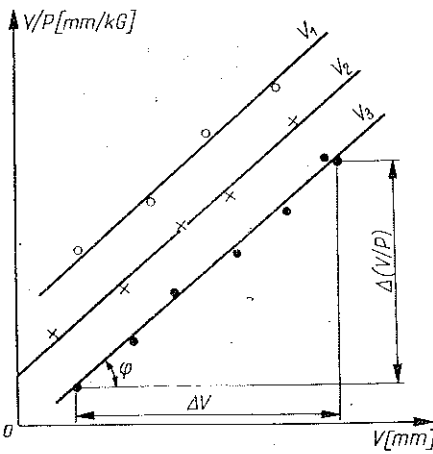
Tablica 5

Kol. Wiersz	a	b
	Rodzaj obciążenia i zamocowania dźwigara	Siły wewnętrzne w zagadnieniu tarczy
1		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1 + 1) = P\xi^1 - x_1$ $T_I(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1) (a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$
2		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P\xi^1 - x_1$ $T_I(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1) (a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$
3		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1 + 1) = P\xi^1 - x_1$ $T_I(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1) (a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$
4		$T_1(\xi^1) = -\frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 - \xi^1] + x_1 \frac{a}{b} (\xi^1 - 1)$ $T_2(\xi^1) = P\xi^1 - x_1$ $T_I(\xi^1) = \frac{1}{b} (x_1 - P\xi^1) (a^2 + b^2)^{1/2}$ $T_{II}(\xi^1) = \frac{Pa}{2b} [(\xi^1)^2 + \xi^1] - x_1 \frac{a}{b} \xi^1$

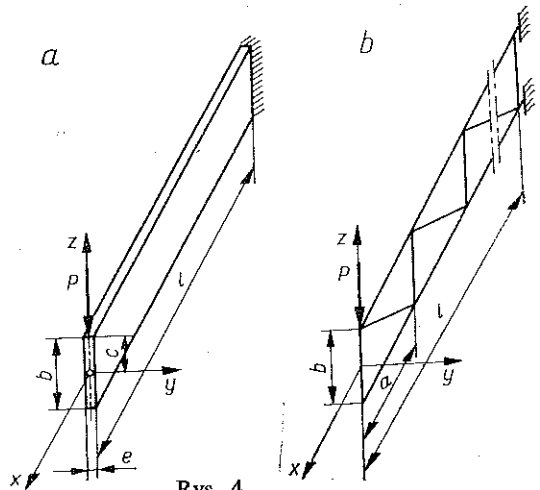
c	d	e	f
$l=3a=3m$ $b=0,5m$	$l=4a=4m$ $b=0,5m$	$l=5a=5m$ $b=0,5m$	Postać wybożenia dźwigara (dla danych z kol. d)
$P_{kr}=4,7881048 a_1$  $n=0,6$  $x_1=1,73872 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=2,275771 a_1$  $n=0,9$  $x_1=2,095967 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=1,163465 a_1$  $n=1,2$  $x_1=2,50325 P$  $x_2=0$	
$P_{kr}=7,897906 a_1$  $n=0,4$  $x_1=1,73872 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=3,038991 a_1$  $n=0,7$  $x_1=2,095967 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=1,57836 a_1$  $n=0,9$  $x_1=2,50325 P$  $x_2=0$	
$P_{kr}=7,255497 a_1$  $n=0,4$  $x_1=1,73872 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=3,269809 a_1$  $n=0,6$  $x_1=2,095967 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=1,684672 a_1$  $n=0,8$  $x_1=2,50325 P$  $x_2=0$	
$P_{kr}=14,473461 a_1$  $n=0,2$  $x_1=1,73872 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=4,498493 a_1$  $n=0,5$  $x_1=2,095967 P$  $x_2=0$	$P_{kr}=2,316382 a_1$  $n=0,6$  $x_1=2,50325 P$  $x_2=0$	

### 3. PORÓWNANIE WYNIKÓW ZAMIESZCZONYCH W ANALIZIE Z WYNIKAMI UZYSKANymi NA DRODZE DOŚWIADCZALNEJ I ZASTĘPCZEGO MODELU CIĄGŁEGO

Badania doświadczalne przeprowadzono na modelach dźwigarów o zmniejszonych wymiarach gabarytowych:  $a=0,25$  m,  $b=0,125$  m, wykonanych z prętów pełnych o przekroju kołowym o średnicy  $d=5$  mm. Pręty dźwigarów łączono w węzłach za pomocą spawania elektrycznego. Specjalna matryca, na podstawie której przeprowadzono operację spawania węzłów, zapewniała właściwe wymiary i płaską postać wykonywanego dźwigara. Wspornikowe zamocowanie dźwigarów zrealizowano w szczękach maszyny wytrzymałościowej. Obciążenie w postaci wycechowanych obciążników przykładano za pomocą specjalnie do tego celu wykonanych szalek. Oprócz określenia siły krytycznej dla danego dźwigara interesowano się także jego postacią po utracie stateczności. Układ czujników zegarowych (zamocowanych sztywno w specjalnych statywach) umożliwiał pomiar ugięcia poszczególnych węzłów dźwigara. Pomiaru strzałki ugięcia na wszystkich czujnikach dokonywano dla kilku wartości przykładanego obciążenia. Pozwoliło to określić wartość siły krytycznej z wykresu  $V/P=f(V)$  (rys. 3) wg metody zaproponowanej w pracy



Rys. 3



Rys. 4

[7] przez R. V. SOUTHWELLA (gdzie  $V$  oznacza strzałkę ugięcia,  $P$  wartość przykładanego obciążenia). Proste na wykresie odpowiadają kolejnym węzłom dźwigara. Odwrotność tangensa kąta nachylenia tych prostych daje wartość obciążenia krytycznego:

$$(3.1) \quad P_{kr(a)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\Delta V}{\Delta(V/P)}$$

Przy znacznych rozrzutach punktów na wykresie doświadczalne siły krytyczne określano metodą najmniejszych kwadratów.

Zagadnienie stateczności płaskiej postaci zginania dźwigarów ciągłych dla różnych przypadków zamocowania i obciążenia jest dokładnie omówione w szeregu prac, a ważniejsze z nich zamieszczono w wykazie literatury w pracy [5]. Na podstawie pracy [8] można napisać wzór, określający krytyczną wartość obciążenia, przyło-

zonego w odległości  $c$  (w pionie) od środka ciężkości końca płaskownika, zamocowanego wspornikowo (rys. 4a):

$$(3.2) \quad P_{kr(z)} = \left( 1 \pm \frac{c}{l} \sqrt{\frac{EJ_z}{GJ_x}} \right) \frac{4,013 \sqrt{EJ_z GJ_x}}{l^2},$$

gdzie  $EJ_z$  sztywność zginania,  $GJ_x$  sztywność skręcania oraz  $l$  długość dźwigara.

Zaznaczyć należy, że w obliczeniach inżynierskich ze wzoru tego określano przybliżoną, zastępczą wartość obciążenia krytycznego dla wspornikowych dźwigarów kratowych.

Sposób określania obciążenia krytycznego  $P_{kr(z)}$  na podstawie zastępczego modelu ciągłego jest następujący. Jeżeli rozpatrzmy regularny płaski dźwigar prostokątny z «przekątniowym» wykrzyżowaniem (rys. 4b), to należy określić zastępczą sztywność zginania i skręcania dźwigara, występujące we wzorze (3.2). Korzystając z faktu, że oś główna przekroju dźwigara pokrywa się z osiami głównymi przekrojów poszczególnych prętów, zastępczą sztywność zginania można obliczyć sumując sztywności zginania wszystkich przekrojów prętów, występujących w przekroju dźwigara  $EJ_z = 3EJ$  (trzy przekroje kołowe); pomijając przy tym, że przekrój pręta przekątniowego jest elipsą. Wychodząc z zastępczej sztywności zginania określić można wymiary prostokąta ( $b \times e$ ) odpowiadającego tej sztywności, zachowując jeden z boków prostokąta równy wysokości dźwigara ( $b$ ). Następnie korzystając ze wzoru  $GJ_x = \alpha_1 Gbe^3$  dla tak określonego prostokąta wyznacza się zastępczą sztywność skręcania (gdzie  $\alpha_1$  jest współczynnikiem zależnym od stosunku  $b/e$ ,  $G$  zaś modułem sprężystości postaciowej Kirchhoffa). Wstawiając do wzoru (3.2) tak określone zastępcze sztywności zginania i skręcania oblicza się zastępczą siłę krytyczną ( $P_{kr(z)}$ ) odpowiadającą zwichrzeniu dźwigara kratowego. Zaznaczyć należy, że opisany wyżej sposób określania zastępczego obciążenia krytycznego nie uwzględnia sposobu wykratowania dźwigara.

Przedstawiając zbadane dźwigary, zestawione w tabelicy 6, zamieszczono dla nich w celu porównania trzy wartości sił krytycznych, określonych następującymi metodami:

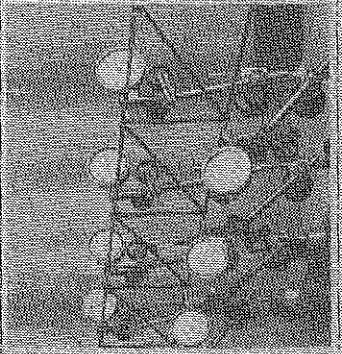
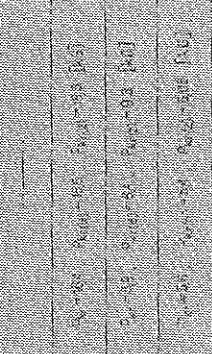
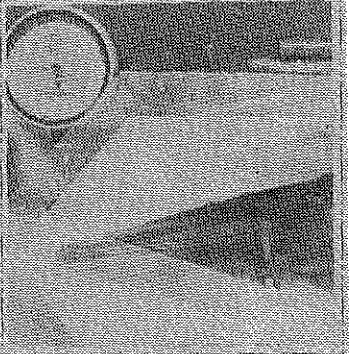
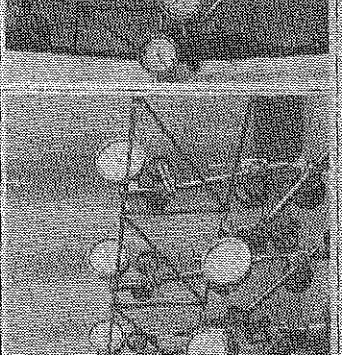
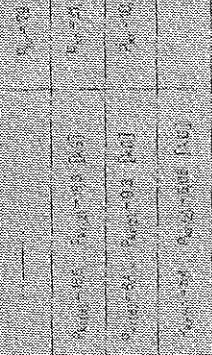
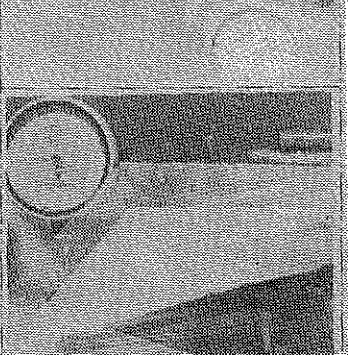
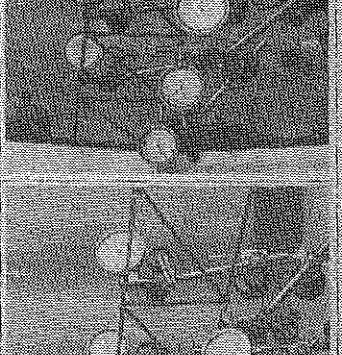
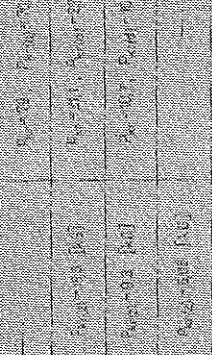
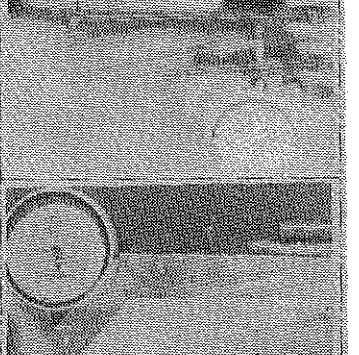
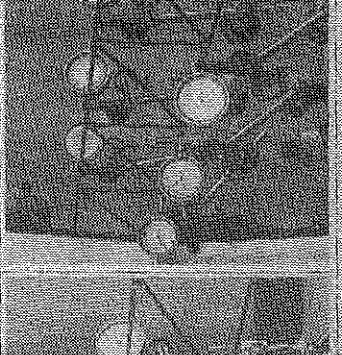
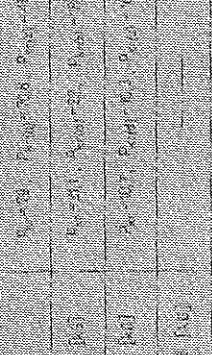
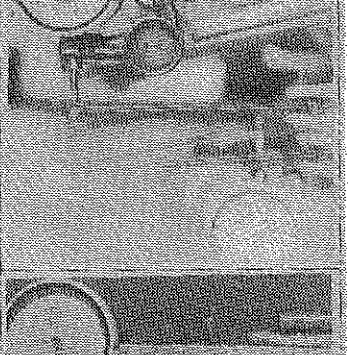
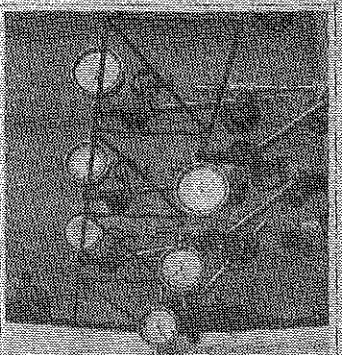
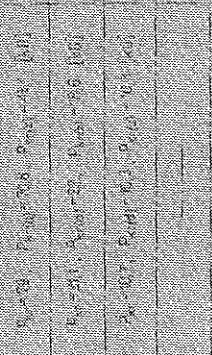
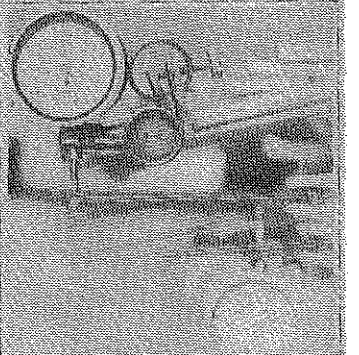
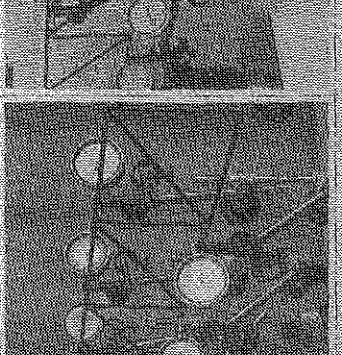
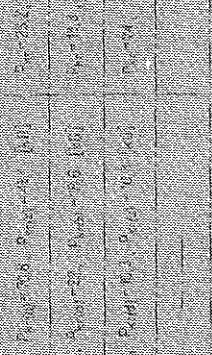
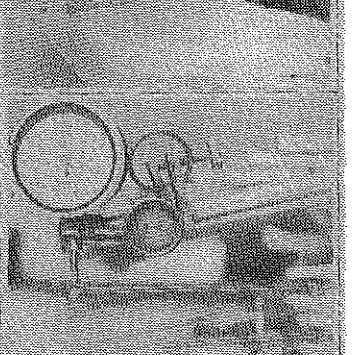
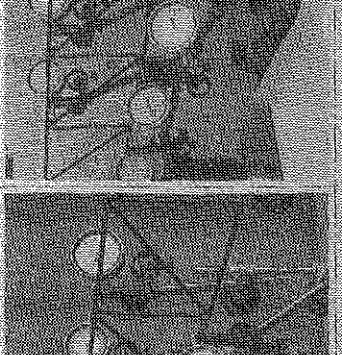
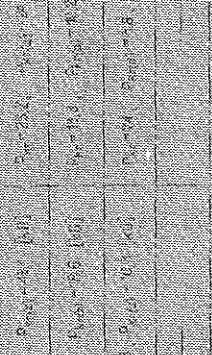
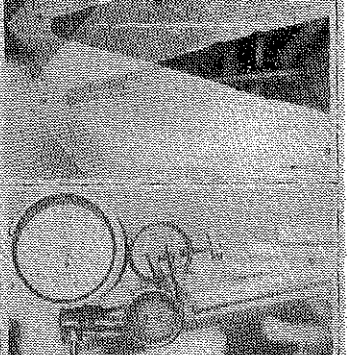
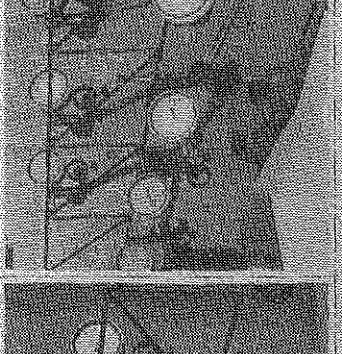
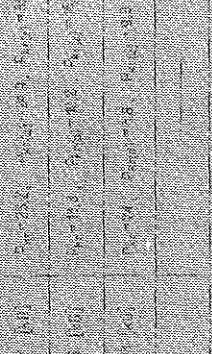
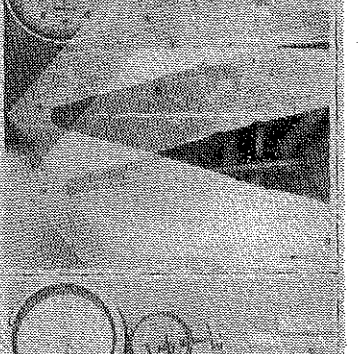
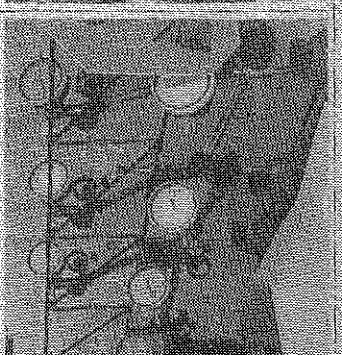
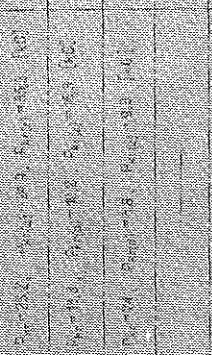
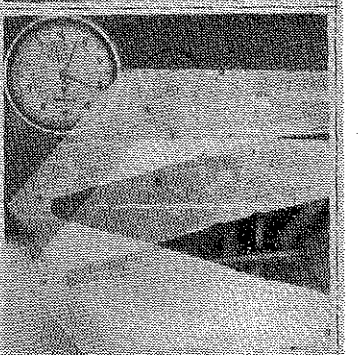
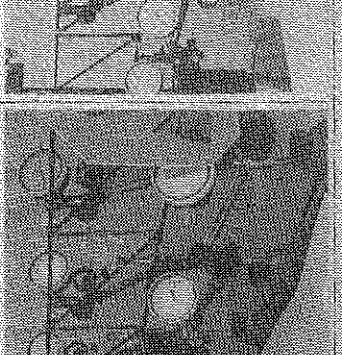
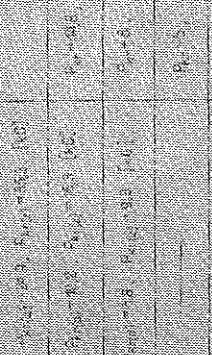
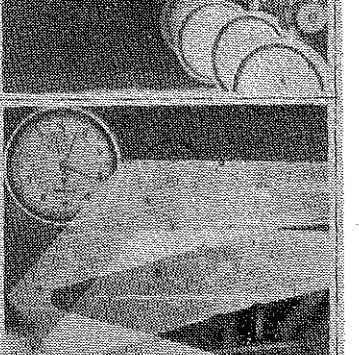
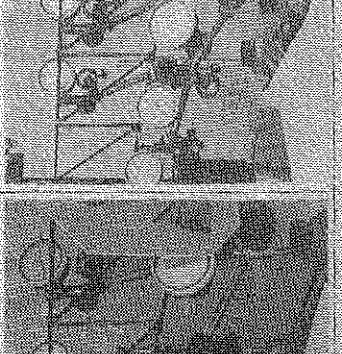
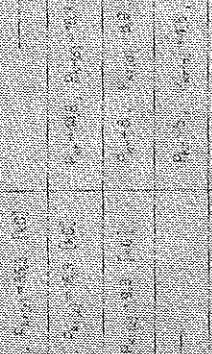
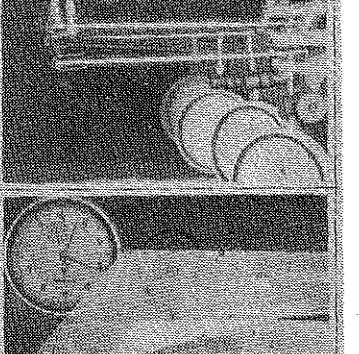
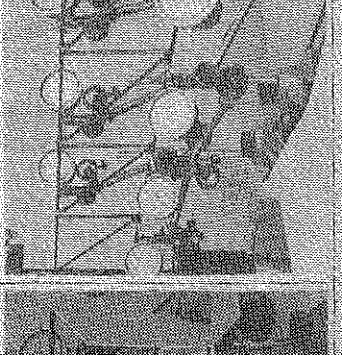
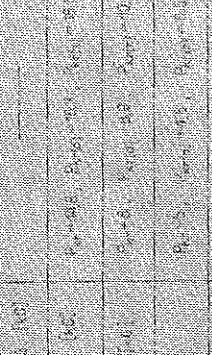
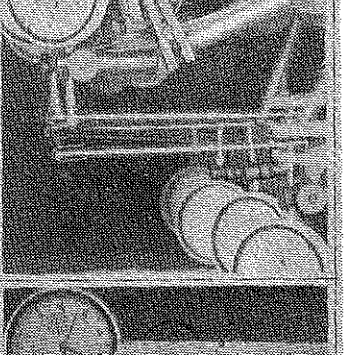
- 1) teoretyczną (metoda numeryczna,  $P_{kr}$ ),
- 2) doświadczalną [obliczona ze wzoru (3.1) bądź metodą najmniejszych kwadratów,  $P_{kr(d)}$ ],
- 3) na podstawie wzoru (3.2) (wartość zastępcza,  $P_{kr(z)}$ ).

Dla dźwigarów zestawionych w tabelicy 7 zamieszczono tylko dwie pierwsze siły krytyczne.

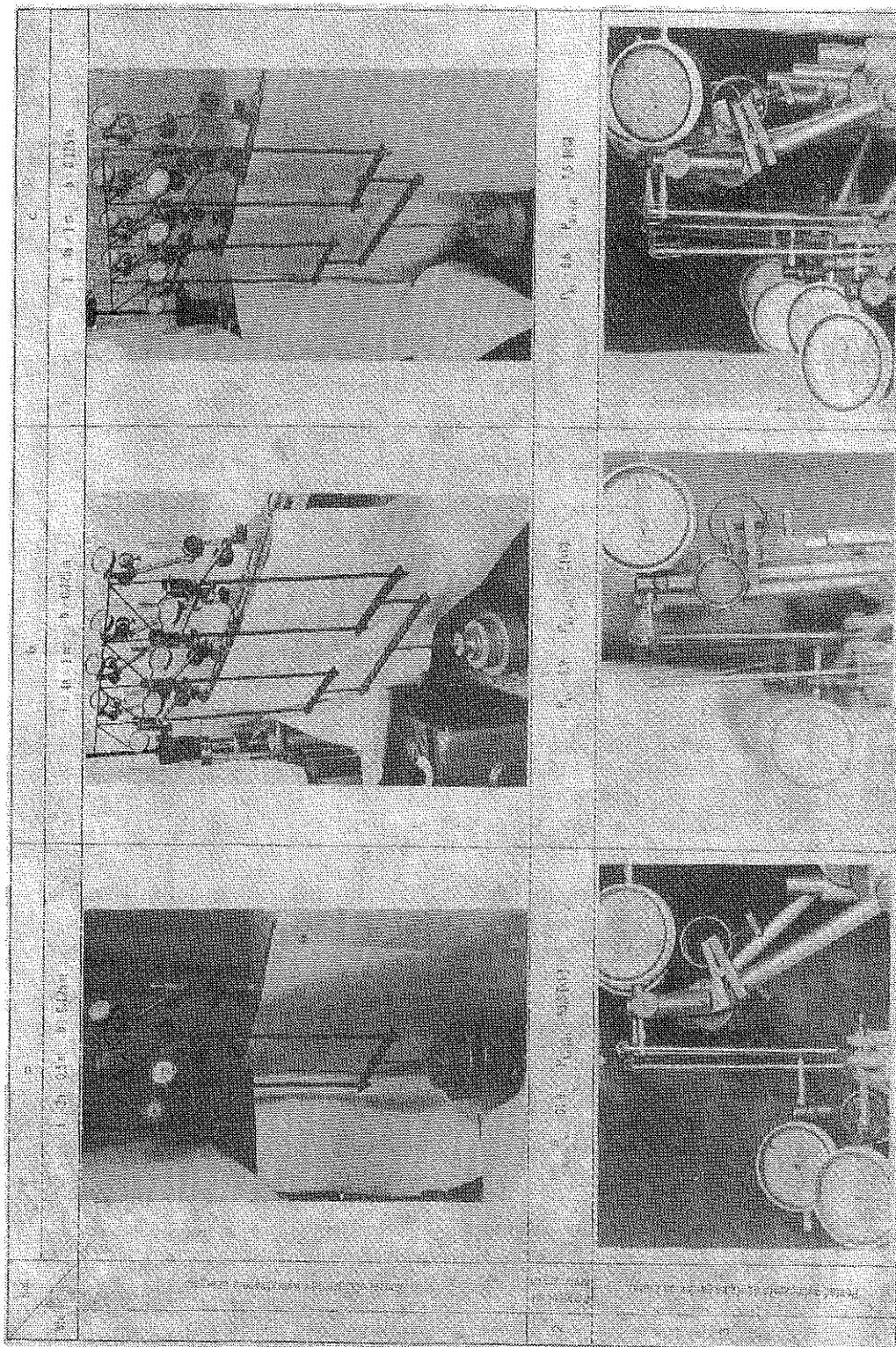
Porównując otrzymane wartości sił krytycznych (teoretycznych i doświadczalnych, tablice 6 i 7) stwierdzono, że błędy sięgają rzędu 10%, co oznacza, że wyniki doświadczalne w pełni potwierdziły wyniki teoretyczne.

Na podstawie porównania zastępczych i teoretycznych wartości sił krytycznych (zamieszczonych w tabelicy 6) można wysnuć wniosek, że istnieją między nimi dość znaczne rozbieżności sięgające 50% (kolumny b i c, wiersz 2). Z porównań tych wynika, że przedstawiony sposób obliczania zastępczych sił krytycznych, stosowany dotychczas w obliczeniach inżynierskich, wydaje się mało przydatny.

Tablica 6

1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			

Tablica 7



## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, W. GUTKOWSKI, *Stateczność regularnych konstrukcji prętowych*, Arch. Inż. Ładow., **19**, 1, 1973.
2. H. FRĄCKIEWICZ, *Mechanika ośrodków siatkowych*, PWN, Warszawa 1970.
3. H. FRĄCKIEWICZ, *Buckling of lattice plates*, Arch. Mech. Stos., **24**, 4, 1971.
4. J. LEWIŃSKI, *Stateczność rusztów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
5. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej formy zginania dźwigarów siatkowych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
6. J. MISIAK, *Stateczność płaskiej postaci zginania dźwigarów o pasach równoległych*, Rozpr. Inżyn., **21**, 1, 1973.
7. R. V. SOUTHWELL, Proc. Royal Society of London, Ser. A, 1135, s. 601, 1932.
8. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill, 1961; *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, Warszawa 1963.

## Резюме

## АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОГО ТИПА ИЗГИБА ФЕРМ

Предметом работы является анализ устойчивости плоского типа изгиба ферм. В работе исследовано влияние способов опирания, нагрузки и расположения диагоналей фермы на значение глобальной критической силы. Определение влияния вышеупомянутых параметров на величину критической нагрузки имеет особое значение для правильного проектирования этих ферм. Из проведенного анализа следует, что подбирая соответственно эти параметры (при этой же самой величине нагрузки) можно проектировать ферму минимального веса. В работе кроме этого показано, что локальная устойчивость стержней, которая проводилась до сих пор в проектных расчетах, не может быть признанной как единственный критерий расчета размеров ферм.

## SUMMARY

## ANALYSIS OF STABILITY OF THE PLANE BENDING MODE OF THE LATTICE GIRDERS

A subject of this paper is the analysis of stability of plane bending mode of the lattice girders. The influence of a manner of support, loading and girder crossing on the global value of critical load is examined. Determination of the influence of above parameters on the value of critical load has particular significance for correct design of these structures. From the analysis performed it results that by proper choice of these parameters (at the same value of load) the girder of minimal weight may be designed.

It was shown also that the local stability of rods which has been assumed in up to now projects calculations may not be considered as a unique criterion of girders dimensioning.

POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 14 listopada 1973 r.