ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 24, 4, 859–865, 1976
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O FUNKCJACH NAPRĘŻEŃ W DWUWYMIAROWYCH QUASI-STATYCZNYCH ZAGADNIENIACH TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

KAROL H. BOJDA (GLIWICE)

W pracy omówiono funkcje naprężeń dla płaskiego stanu odkształcenia uwzględniając sprzężenie pola deformacji z polem temperatury. Składowe stanu naprężenia i temperaturę wyrażono przez cztery funkcje naprężeń. Omówiono również niektóre przypadki szczególne oraz wykazano, że w wielu zagadnieniach sprzężonych quasi-statycznych temperatura spełnia równanie dyfuzyjne.

1. Wstęp

W zagadnieniach termosprężystości, w których pole temperatury zmienia się bardzo wolno w czasie, można pominąć wyrazy inercyjne w równaniach ruchu i zagadnienia te traktować jako quasi-statyczne. Zagadnienia te należą do klasycznych problemów termosprężystości i mają bogatą literaturę naukową. Najczęściej stosowanymi w termosprężystości funkcjami rozwiązującymi są funkcje przemieszczeń, dla wprowadzenia których punktem wyjścia są równania przemieszczeniowe i równanie przewodnictwa cieplnego [1 – 4]. W płaskich ustalonych zagadnieniach termosprężystości stosowana jest również z powodzeniem funkcja naprężeń Airy'ego.

W niniejszej pracy omówiono kilka funkcji naprężeń dla płaskiego stanu odkształcenia uwzględniając sprzężenie pola deformacji z polem temperatury. Omówiono także funkcje naprężeń w teorii uproszczonej. Funkcje te mogą być stosowane przy rozwiązywaniu różnych szczególnych zagadnień. Rozważania przeprowadzono dla ośrodków jednorodnych oraz izotropowych zajmujących obszary jednospójne.

Punktem wyjścia są równania równowagi

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta,\alpha}+X_\beta=0, \\ &\sigma_{[\alpha\beta]}=0, \qquad \alpha,\beta,\ldots=1,2, \end{aligned} \tag{1.1}$$

warunek nierozdzielności odkształceń wyrażony w naprężeniach i temperaturze

$$\varepsilon_{\alpha\beta}\,\varepsilon_{\gamma\delta}\,\sigma_{\alpha\gamma,\beta\delta}-\nu\nabla^2\sigma_{\gamma\gamma}+E\alpha_t\nabla^2\vartheta=0 \tag{1.2}$$

oraz równanie przewodnictwa cieplnego

$$\nabla^2\vartheta-\left[\frac{1}{\kappa}+2(1+\nu)\,\eta\alpha_t\right]\dot{\vartheta}-\frac{\nu\eta}{\lambda}\,\dot{\sigma}_{\alpha\alpha}=-\frac{Q}{\kappa}, \tag{1.3}$$

gdzie

$$\kappa=\frac{\lambda_0}{c_\varepsilon},\qquad \eta=\frac{(3\lambda+2\mu)\,\alpha_t\,T_0}{\lambda_0},\qquad Q=\frac{W}{c_\varepsilon},\qquad \vartheta=T-T_0.$$

Symbol T oznacza temperaturę bezwzględną, T_0 temperaturę bezwzględną stanu naturalnego, W ilość ciepła wytwarzaną w jednostce czasu i jednostce objętości, λ_0 współczynnik przewodnictwa cieplnego, c_ε ciepło właściwe przy stałej deformacji, E moduł sprężystości podłużnej, ν współczynnik Poissona, α_t współczynnik rozszerzalności cieplnej, μ, λ stałe Lamégo, $\varepsilon_{\alpha\beta}$ symbol Ricciego.

W równaniu (1.3) wyraz dylatacyjny wyrażono przez naprężenia i temperaturę.

2. Funkcje naprężeń

Jeżeli składowe stanu naprężenia i temperaturę wyrazimy przez cztery funkcje Ψ_α i Φ_α spełniające równania

$$\begin{aligned}&\nabla^2\nabla^2 D^2\Psi_\alpha+X_\alpha=0,\\ (2.1)\qquad &\nabla^2\nabla^2 D^2\Phi_\alpha+\delta_{2\alpha}\frac{Q}{K}=0,\end{aligned}$$

w następujący sposób:

$$(2.2)\qquad \begin{aligned}\sigma_{\alpha\beta}=D^1\Big(\Sigma_{(\alpha,\beta)}+\frac{\nu}{1-\nu}\,\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\Psi_{\mu,\mu\gamma\delta}\Big)+(k-\beta)\nabla^2(\dot{\Psi}_{\alpha,\beta}-\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\dot{\Psi}_{\gamma,\delta})+\\ +\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\delta_{\mu1}D^1+\delta_{\mu2}\nabla^2)\Phi_{\mu,\gamma\delta},\end{aligned}$$

$$\vartheta=\frac{k-\beta}{E\alpha_t}\nabla^2\dot{\Psi}_{\alpha,\alpha}+\nabla^2\left(\frac{\nu\eta}{\lambda}\delta_{\mu1}\partial_t-\frac{1-\nu}{E\alpha_t}\delta_{\mu2}\nabla^2\right)\Phi_\mu,$$

gdzie

$$\Sigma_\alpha=\Psi_{\beta,\alpha\beta}+2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\Psi_{\beta,\delta\gamma},$$

to równania (1.1) – (1.3) będą spełnione tożsamościowo. Wprowadzono tu oznaczenia

$$\nabla^2\equiv(\ )_{,\alpha\alpha},\qquad \partial_t\equiv(\dot{\ })\equiv\frac{\partial}{\partial t},\qquad D^1\equiv\nabla^2-k\partial_t,\qquad D^2\equiv\nabla^2-\beta\partial_t,$$

$$k\equiv\frac{1}{\kappa}+2(1+\nu)\eta\alpha_t,\qquad \beta\equiv\frac{1}{\kappa}+\frac{1+\nu}{1-\nu}\eta\alpha_t,\qquad K\equiv\frac{\kappa(\nu-1)}{E\alpha_t},$$

$\delta_{\alpha\beta}$ jest symbolem Kroneckera.

Przedstawienie składowych pola naprężeń i pola temperatury przez cztery funkcje w postaci (2.2) jest nader ogólne. Postać (2.2) może być stosowana przy rozważaniu złożonych zagadnień, między innymi w przypadkach, w których X_α i Q są funkcjami nieciągłymi.

3. Niektóre przypadki szczególne

Rozpatrzmy szczególną klasę zagadnień, mianowicie tę, w której $X_\alpha \equiv 0$ i $Q \equiv 0$. W tym przypadku za dowolne trzy funkcje naprężeń w (2.2) można przyjąć tożsamościowo równe zeru. Na przykład przyjmując

$$\Psi_\alpha \equiv 0, \quad \Phi_2 \equiv 0 \quad \text{i} \quad \Phi_1 \equiv F,$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} D^1 F_{,\gamma\delta}, \\ \vartheta &= \frac{\nu\eta}{\lambda} \nabla^2 \dot{F}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Funkcja F powinna spełniać równanie

$$\nabla^2 \nabla^2 D^2 F = 0. \tag{3.2}$$

Funkcja ta stanowi rozszerzenie na zagadnienie quasi-statyczne termosprężystości funkcji Airy'ego.

Jeżeli dla sił masowych $X_\alpha \neq 0$ istnieje potencjał harmoniczny $-V$

$$X_\alpha = -V_{,\alpha}, \quad \nabla^2 V = 0,$$

to składowe stanu naprężenia $\sigma_{\alpha\beta}$ oraz temperaturę ϑ można wyrazić przez funkcję F i potencjał $-V$ w następujący sposób:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} D^1 F_{,\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta} V,$$

$$\vartheta = \frac{\nu\eta}{\lambda} \nabla^2 \dot{F} - 2\frac{\nu\eta}{k\lambda} \dot{V}.$$

Z kolei rozważmy przypadek, w którym $X_\alpha \equiv 0$ i $Q \neq 0$. Przyjmując

$$\Psi_\alpha \equiv 0, \quad \Phi_1 \equiv 0, \quad \nabla^2 \Phi_2 \equiv \Phi$$

z (2.2) i (2.1) otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} \Phi_{,\gamma\delta}, \\ \vartheta &= -\frac{1-\nu}{E\alpha_t} \nabla^2 \Phi, \\ \nabla^2 D^2 \Phi &+ \frac{Q}{K} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Jeżeli siły masowe $X_\alpha \neq 0$ mają potencjał $-V$,

$$X_\alpha = -V_{,\alpha}$$

to składowe stanu naprężenia i temperaturę można wyrazić w następujący sposób:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta} \Phi_{,\gamma\delta} + \delta_{\alpha\beta} V, \qquad \vartheta = -\frac{1-\nu}{E\alpha_t} \nabla^2 \Phi - \frac{1-2\nu}{E\alpha_t} V,$$

przy czym funkcja Φ powinna teraz spełniać równanie

$$\nabla^2 D^2 \Phi = -\frac{Q}{K} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\nabla^2 V - \frac{1}{\kappa}\dot{V}\right).$$

Łatwo sprawdzić, że wzory (3.3) nie zapewniają zupełności rozważanego zagadnienia. Niemniej za pomocą funkcji Φ można uzyskać wiele prostych rozwiązań, stanowiących bądź ostateczną postać rozwiązania równań (1.1) –(1.3), bądź też rozwiązania częściowe, które spełniają równania (1.1)–(1.3) oraz część warunków brzegowych. Ze wzorów (3.3) wynika, że dla tych przypadków, dla których funkcja Φ pozwala uzyskać ostateczną postać rozwiązania, między składowymi stanu naprężenia i temperaturą zachodzi związek

$$\vartheta = -\frac{1-\nu}{E\alpha_t}\sigma_{\gamma\gamma}. \tag{3.4}$$

Korzystając z (3.4) można równanie przewodnictwa cieplnego przedstawić w postaci

$$D^2 \vartheta = -\frac{Q}{\kappa}. \tag{3.5}$$

Zatem temperatura spełnia równanie dyfuzyjne mimo że zachodzi sprzężenie pola deformacji z polem temperatury.

Do wyznaczenia naprężeń pozostają równania

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha} = 0, \quad \sigma_{\gamma\gamma} = -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\vartheta. \tag{3.6}$$

Zagadnienie może tu być rozwiązane w dwu etapach. Najpierw można rozwiązać równanie (3.5) i dalej wstawić znany już rozkład temperatury do prawej strony równania $(3.6)_3$. Układ (3.6) można rozwiązać tak, jak dla zagadnienia stacjonarnego, traktując czas jako parametr. Widać więc, że dla rozważanych zagadnień nie zachodzi potrzeba pomijania wyrazu dylatacyjnego w równaniu przewodnictwa cieplnego — w celu uproszczenia równań.

Rozwiązanie układu (3.6) ma postać

$$\sigma_{\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta} - \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\Gamma_{\gamma,\delta} - G_{,\gamma\delta}), \tag{3.7}$$

przy czym funkcje Γ_α są harmoniczne

$$\nabla^2 \Gamma_\alpha = 0, \tag{3.8}$$

funkcja G powinna spełniać równanie Poissona

$$\nabla^2 G = -\frac{E\alpha_t}{1-\nu}\vartheta. \tag{3.9}$$

Podstawiając do równania przewodnictwa cieplnego prawą stronę (3.4) otrzymamy równanie zawierające tylko składowe stanu naprężenia

$$D^2 \sigma_{\gamma\gamma} + \frac{Q}{K} = 0. \tag{3.10}$$

Równanie to wraz z jednorodnymi równaniami równowagi pozwala określić stan naprężenia wywołany znanym źródłem ciepła Q bez wyznaczania pola temperatury, przy czym należy warunki brzegowe i warunek początkowy dla temperatury wyrazić za pomocą (3.4) przez naprężenia. W tym przypadku związki między składowymi stanu naprężenia i funkcjami naprężeń mogą być przyjęte także w postaci określonej wzorami (3.7). Funkcje Γ_α powinny spełniać równania (3.8), a funkcja G równanie następujące

$$\nabla^2 D^2 G + \frac{Q}{K} = 0. \tag{3.11}$$

4. Funkcje naprężeń w teorii uproszczonej

Jak wiadomo w teorii uproszczonej pomija się wpływ wyrazu dylatacyjnego na rozkład temperatury i wielkość naprężeń przyjmując, że równanie przewodnictwa cieplnego ma postać [4]

$$\nabla^2 \vartheta - \frac{1}{\kappa}\dot{\vartheta} = -\frac{Q}{\kappa}. \tag{4.1}$$

Po określeniu temperatury z (4.1) naprężenia można wyznaczyć z równań (1.1) i (1.2) tak jak dla zagadnień sztacjonarnych.

Składowe stanu naprężenia można w tym przypadku wyrazić przez trzy funkcje naprężeń $\tilde{\psi}_\alpha$ i Λ spełniające równania

$$\begin{aligned} &\nabla^2 \nabla^2 \tilde{\psi}_\alpha + X_\alpha = 0, \\ &\nabla^2 \nabla^2 \Lambda + \frac{E\alpha_t}{\nu} \nabla^2 \vartheta = 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

w następujący sposób:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \tilde{\Sigma}_{(\alpha,\beta)} + \frac{\nu}{1-\nu}\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}(\tilde{\psi}_{\eta,\eta\gamma\delta} + \Lambda_{,\gamma\delta}), \tag{4.3}$$

gdzie

$$\tilde{\Sigma}_\alpha = \tilde{\psi}_{\beta,\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\tilde{\psi}_{\beta,\gamma\delta}.$$

Dla $X_\alpha \equiv 0$ można przyjąć

$$\tilde{\psi}_\alpha \equiv 0 \quad \text{i} \quad \frac{\nu}{1-\nu}\Lambda = \tilde{\Lambda}.$$

Dla tego przypadku otrzymamy znane wzory

$$\begin{aligned} &\sigma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\gamma}\varepsilon_{\beta\delta}\tilde{\Lambda}_{,\gamma\delta}, \\ &\nabla^2\nabla^2\tilde{\Lambda} + \frac{E\alpha_t}{1-\nu}\nabla^2\vartheta = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Za pomocą wzorów (4.2) i (4.3) można prosto rozwiązać szereg zagadnień, w których funkcje X_α są nieciągłe.

5. Przykład

Rozpatrzmy ciało nieograniczone, w którym rozkład źródła ciepła jest niezależny od zmiennej x_3

$$Q = Q(x_1, x_2, t), \quad t \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Załóżmy ponadto, że $X_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$. Zatem ciało znajduje się w płaskim stanie odkształcenia.

Zadanie rozwiążemy przy warunku początkowym

$$\vartheta(x_i, 0) = 0,$$

przyjmując, że funkcja Q jest symetryczna względem osi x_1 i x_2 oraz że całka

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |Q|\, dx_1\, dx_2$$

jest ograniczona.

Rozwijając funkcję (5.1) w podwójną całkę cosinusową

$$Q = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \tilde{Q}(t) \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

na podstawie (3.5) otrzymamy

$$\vartheta = \frac{1}{\beta\kappa} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \tilde{Q}(t-\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\beta}\tau} \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2)\, d\tau\, d\omega_1\, d\omega_2, \tag{5.2}$$

gdzie

$$\omega = \omega_1^2 + \omega_2^2.$$

Podstawiając (5.2) do (3.9) dochodzimy do następującego wyrażenia na funkcję naprężeń

$$G = \frac{E\alpha_t}{(1-\nu)\beta\kappa} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{\tilde{Q}(t-\tau)}{\omega}\, e^{-\frac{\omega}{\beta}\tau} \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2)\, d\tau\, d\omega_1\, d\omega_2.$$

Ponadto w rozważanym przypadku można przyjąć

$$\Gamma_\alpha \equiv 0.$$

Zatem na podstawie (3.7) otrzymamy

$$\sigma_{11} = -\frac{E\alpha_t}{(1-\nu)\beta\kappa} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{\omega_2^2}{\omega} \tilde{Q}(t-\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\beta}\tau} \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2)\, d\tau\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

$$\sigma_{12} = -\frac{E\alpha_t}{(1-\nu)\beta\kappa} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega} \tilde{Q}(t-\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\beta}\tau} \sin(\omega_1 x_1) \sin(\omega_2 x_2)\, d\tau\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

$$\sigma_{22} = -\frac{E\alpha_t}{(1-\nu)\beta\kappa} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{t} \frac{\omega_1^2}{\omega} \tilde{Q}(t-\tau)\, e^{-\frac{\omega}{\beta}\tau} \cos(\omega_1 x_1) \cos(\omega_2 x_2)\, d\tau\, d\omega_1\, d\omega_2.$$

Widać więc, że rozwiązanie uwzględniające sprzężenie pola deformacji z polem temperatury uzyskaliśmy sposobem typowym dla teorii niesprzężonej, wyznaczając najpierw funkcję temperatury a następnie składowe stanu naprężenia.

W podobny sposób można rozwiązać niektóre zagadnienia dla ciał ograniczonych, zastępując całki Fouriera szeregami oraz wykorzystując funkcje Γ_α dla spełnienia odpowiednich warunków brzegowych.

Zastępując w przedstawionym rozwiązaniu wielkość β współczynnikiem $1/\kappa$ otrzymamy rozwiązanie spełniające równania teorii uproszczonej (4.1) i (4.4). Wynika stąd interesujące spostrzeżenie, że w wielu zagadnieniach nie tylko wpływ ilościowy lecz również jakościowy wyrazu dylatacyjnego na rozwiązanie jest niewielki.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966.
2. W. Nowacki, *Termosprężystość*, Ossolineum 1972.
3. W. Nowacki, *Zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1960.
4. W. Nowacki, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.

Praca wpłynęła do Redakcji dnia 29 kwietnia 1976 r.