

## STATYKA I KINEMATYKA WARSTWY OŚRODKA IDEALNIE SPOISTEGO W POCZĄTKOWEJ FAZIE WCISKANIA PŁASKIEGO STEMPLA

BENEDYKT P O N D E R (WARSZAWA)

W pracy omówiono mechanikę ośrodka idealnie spoistego w początkowej fazie wciskania płaskiego stempla od dołu w warstwę gruntową. Analizę przeprowadzono na podstawie matematycznej teorii ośrodków sypkich oraz ekstremalnych zasad teorii plastyczności [5].

Przedstawiono kompletne rozwiązanie statyki i kinematyki ośrodka oraz statycznie dopuszczalne pola naprężeń. Ponadto w pracy zamieszczono wyniki obliczeń nacisków na powierzchni czołowej stempla wynikających z pełnego rozwiązania statyki i kinematyki oraz statycznie dopuszczalnych pól naprężeń dla trzech różnych ośrodków.

### 1. ZAŁOŻENIA WYJŚCIOWE

Do analizy teoretycznej przyjęto początkową fazę ruchu ośrodka wywołanego wciskaniem od dołu płaskiego stempla ze stałą prędkością w warstwę gruntu o stałej grubości (rys. 1). Wywołanie ruchu ośrodka nad stemplem wymaga pokonania oporu wynikającego ze stanu równowagi granicznej.

Analizę statyki i kinematyki ośrodka w początkowej fazie ruchu stempla przeprowadzono, przyjmując następujące podstawowe założenia:

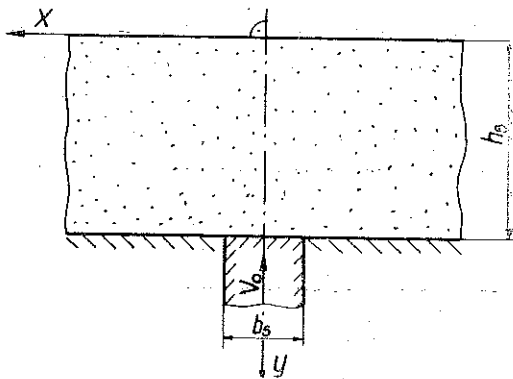
1) Płaski stan odkształcenia w urabianym ośrodku.

2) Ośrodek traktowano jako materiał izotropowy, idealnie plastyczny — zgodnie z założeniami mechaniki ośrodków sypkich.

3) Założono, że zarówno spójność  $K$ , kąt tarcia wewnętrznego  $\rho$  jak i ciężar objętościowy  $\gamma$  zachowują stałe wartości w każdym punkcie obszaru odkształcanego podczas trwania procesu.

4) Analizę przeprowadzono dla ośrodków ważkich ( $\gamma \neq 0$ ).

5) Przy wyznaczaniu stanu naprężenia przyjęto zwykle założenia mechaniki ośrodków sypkich: a) naprężenia ściskające uważano za dodatnie, b) układ współ-



Rys. 1

rzędnych  $xy$  przyjęto zorientowany w taki sposób, aby oś  $y$  była skierowana pionowo do dołu.

6) Przyjęto następujące warunki pracy stempla (rys. 1): a) płaski, sztywny stempel jest wciskany od dołu w warstwę gruntu o stałej grubości równej  $h$ , prostopadle do swobodnego brzegu, b) szerokość stempla wynosi  $b_s$ , c) szerokość i długość warstwy gruntu jest dostatecznie duża w odniesieniu do  $b_s$ , d) swobodny brzeg ośrodka w początkowej fazie ruchu jest prostoliniowy, natomiast w każdej następnej rozpatrywanej chwili swobodna powierzchnia gruntu jest walcowa i jej tworzące są równoległe do płaszczyzny czołowej stempla.

Rozpatrzono tylko przypadek ruchu stempla do góry (jego początkową fazę). Wówczas powstają maksymalne reakcje ośrodka będącego w stanie parcia biernego.

## 2. STAN NAPRĘŻENIA

Aby wywołać ruch ośrodka, musi być osiągnięty stan graniczny w całym odkształcanym obszarze. Stan równowagi granicznej ośrodka idealnie spoiściego w przypadku płaskiego płynięcia opisują równania równowagi

$$(2.1) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \gamma$$

oraz warunek stanu granicznego Treski

$$(2.2) \quad (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4K^2.$$

Znaczenie poszczególnych symboli przedstawia rys. 2.

Wyznaczenie stanu naprężenia w każdym punkcie odkształcanego obszaru wymaga rozwiązania układu równań (2.1) i (2.2). Metoda rozwiązania powyższego układu równań została podana np. w [1 i 2]. Dzięki wprowadzeniu nowej pomocniczej funkcji w postaci

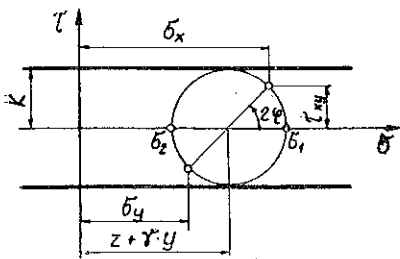
$$(2.3) \quad z = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \gamma y,$$

daje się wyeliminować ciężar objętościowy ośrodka  $\gamma$  z równań charakterystyk (podstawienie (2.3) zastosowano w pracy [1]), co znacznie upraszcza rozwiązania konkretnych zagadnień brzegowych. W wyniku rozwiązania układu równań (2.1) i (2.2)

otrzymuje się równania charakterystyk w postaci

$$(2.4) \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left( \varphi \pm \frac{\pi}{4} \right), \quad z \pm 2K\varphi = \text{const},$$

gdzie  $z$  oznacza naprężenie zastępcze (rys. 2),  $\varphi$  kąt, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią  $x$  oraz  $K$  kohezję.

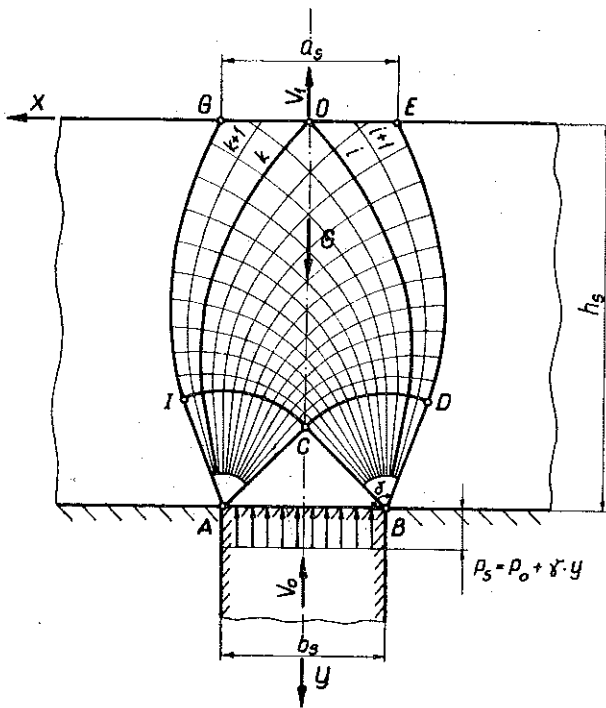


Rys. 2

W przypadku ośrodka idealnie spoiłego charakterystyki układu równań stanu granicznego dla naprężeń pokrywają się z liniami poślizgu materiału i tworzą ortogonalną siatkę linii nachylonych w każdym punkcie pod kątem  $\pi/4$  i  $-\pi/4$  do kierunków naprężeń głównych.

Stan naprężenia w odkształcanym obszarze ośrodka w początkowej fazie wciśnięcia stępła od dołu w warstwę gruntu określono rozwiązując następujące zagadnienia brzegowe (rys. 3) dla równań (2.4): a) w trójkącie  $ABC$  — zagadnienie Cauchy'ego, b) w obszarze  $ACI$  — zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym, c) w obszarze  $CIGO$  — zagadnienie mieszane.

Schemat omawianego rozwiązania przedstawia rys. 3. Charakterystyki należące do pierwszej rodziny linii opatrzone indeksem  $i$ , natomiast charakterystyki należące do drugiej rodziny linii oznaczono indeksem  $k$ .



Rys. 3

Zagadnienie Cauchy'ego rozwiązano zakładając stały rozkład nacisków  $p_0$  na brzegu stępła  $AB$ . Wówczas na brzegu  $AB$  kąt  $\varphi$  i naprężenie zastępcze  $z$  są określone następująco:

$$(2.5) \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad z = p_0 - K,$$

gdzie  $p_0$  oznacza obliczeniową wartość nacisków.

Ponieważ na linii kontaktu stępła z ośrodkiem  $\varphi$  i  $z$  zachowują stałe wartości, przeto wzory (2.5) określają stan naprężenia w całym trójkącie  $ABC$ . Rozpatrywane zadanie jest symetryczne względem osi  $y$ , dlatego też ograniczono się tylko do

wyznaczenia stanu naprężenia w warstwie ośrodka położonej po jej lewej stronie. Siatkę charakterystyk dla naprężeń w obszarze  $ACI$  wyznaczono, rozwiązując brzegowe zagadnienie z punktem osobliwym. Zagadnienie to jest jednoznacznie określone przez dane na brzegu  $AC$ , znane z rozwiązania zagadnienia Cauchy'ego oraz przez znaną zależność zachodzącą między  $z$  i  $\varphi$  w punkcie osobliwym  $A$ . Osobliwość punktu  $A$  polega na występowaniu w nim stałego przyrostu kąta  $\varphi$ . Wobec tego w obszarze  $ACI$  otrzymano siatkę charakterystyk utworzoną z wachlarza promieni i łuków okręgów poprowadzonych z punktu  $A$ .

W punkcie  $A$  kąt  $\varphi$  określa wzór:

$$(2.6) \quad \varphi_{A,k} = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi k}{4i_{ch}},$$

gdzie  $i_{ch}$  oznacza liczbę charakterystyk wyprowadzonych z punktu  $A$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, i_{ch}$ .

Wyznaczając stałą całkowania dla linii należących do pierwszej rodziny charakterystyk znajdujących się w obszarze  $ACI$  otrzymano związek zachodzący między wielkościami pomocniczymi  $z$  i  $\varphi$  w punkcie  $A$  w następującej postaci:

$$(2.7) \quad z_{A,k} = -2K\varphi_{A,k} + p_0 + K(\pi - 1).$$

Wzdłuż charakterystyk należących do drugiej rodziny linii w obszarze  $ACI$  wielkości pomocnicze  $\varphi$  i  $z$  zachowują stałe wartości. Wobec tego na linii  $CI$  muszą być spełnione następujące równości:

$$\varphi_{A,k} = \varphi_{0,k} \quad \text{i} \quad z_{A,k} = z_{0,k}.$$

W obszarze  $CIGO$  siatkę charakterystyk zbudowano przez rozwiązanie zagadnienia mieszanego, mając dane  $z$  i  $\varphi$  na linii  $CI$ , znane z rozwiązania zagadnienia zdegenerowanego oraz związek zachodzący na osi  $y$  w postaci  $\varphi = \pi/2$  wynikający z warunku, że w tym przypadku składowa naprężenia  $\sigma_y$  musi być naprężeniem głównym. Wyznaczając stałe całkowania wzdłuż charakterystyk należących do pierwszej i drugiej rodziny i określając wzory na  $z_{i,k}$  na podstawie równań (2.4) otrzymano

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varphi_{i,k} &= \varphi_{0,k} + \varphi_{i,0} - \frac{\pi}{2}, \\ z_{i,k} &= 2K(\varphi_{i,0} - \varphi_{0,k}) + p_0 - K, \end{aligned}$$

gdzie  $\varphi_{0,k}$  i  $\varphi_{i,0}$  oznaczają znane wielkości na brzegach  $CI$  i  $CD$ .

Współrzędne  $x_{i,k}$  i  $y_{i,k}$  określono numerycznie stosując metodę różnic skończonych (metodę siecznych) [2]. Na podstawie koła Mohra dla płaskiego stanu płynięcia (rys. 2) określono składowe naprężenia  $\sigma_{y_{i,k}}$  i  $\tau_{xy_{i,k}}$  w węzłach siatki charakterystyk:

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \sigma_{y_{i,k}} &= z_{i,k} - K \cos 2\varphi_{i,k} + \gamma \cdot y_{i,k}, \\ \tau_{xy_{i,k}} &= K \sin 2\varphi_{i,k}. \end{aligned}$$

W ten sposób został określony stan naprężenia w całym obszarze odkształcanym, przedstawionym schematycznie na rys. 3, w funkcji wartości nacisków  $p_0$ .

### 3. KOMPLETNE ROZWIĄZANIE STATYKI I KINEMATYKI OŚRODKA — OKREŚLENIE RZECZYWISTYCH NACISKÓW $p_s$

Wyznaczenie rzeczywistej wartości nacisków  $p_s$  na powierzchni czołowej stempla wymagało znalezienia takiego statycznie dopuszczalnego pola naprężeń, dla którego wszystkie kinematyczne warunki są spełnione. Wystąpił tu nowy typ zagadnienia brzegowego dla pola prędkości (\*). Należało znaleźć kinematycznie dopuszczalny schemat odkształcenia ośrodka dla początkowo nieokreślonych warunków dla prędkości na swobodnym brzegu  $GE$  (rys. 3), przy czym odpowiadające mu pole naprężeń musiało spełniać wszystkie warunki statyczne. Pole prędkości ruchu ośrodka określono, przyjmując prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem stanu granicznego Treski [2]. Wówczas równania różniczkowe charakterystyk dla prędkości mają identyczną postać z równaniami charakterystyk dla naprężeń (2.4). A zatem w przypadku ośrodka idealnie spoistego charakterystyki dla prędkości i naprężeń pokrywają się. Wielkości statyczne ośrodka określono numerycznie na maszynie cyfrowej, natomiast wielkości kinematyczne metodą wykreślną [2 i 3].

Opierając się na siatce charakterystyk dla naprężeń (prędkości), otrzymanej z rozwiązania statyki, budowano plany prędkości dla określonego stosunku  $h_s/b_s$  (zgodnie z zasadami podanymi w teorii plastyczności [3]) dla obszarów plastycznego płynięcia ograniczonych kolejnymi charakterystykami położonymi na lewo od linii  $AO$  (rys. 3). Każdej  $k$ -tej charakterystyce położonej na lewo od  $AO$  dla danego stosunku  $h_s/b_s$  odpowiada ściśle określona wartość «szczeliny wypływu» ośrodka  $a_s$ . Mając określone prędkości w całym polu odkształcenia objętym  $k$ -tą charakterystyką (w wyniku zbudowania hodografu) sprawdzano warunek ciągłości w postaci

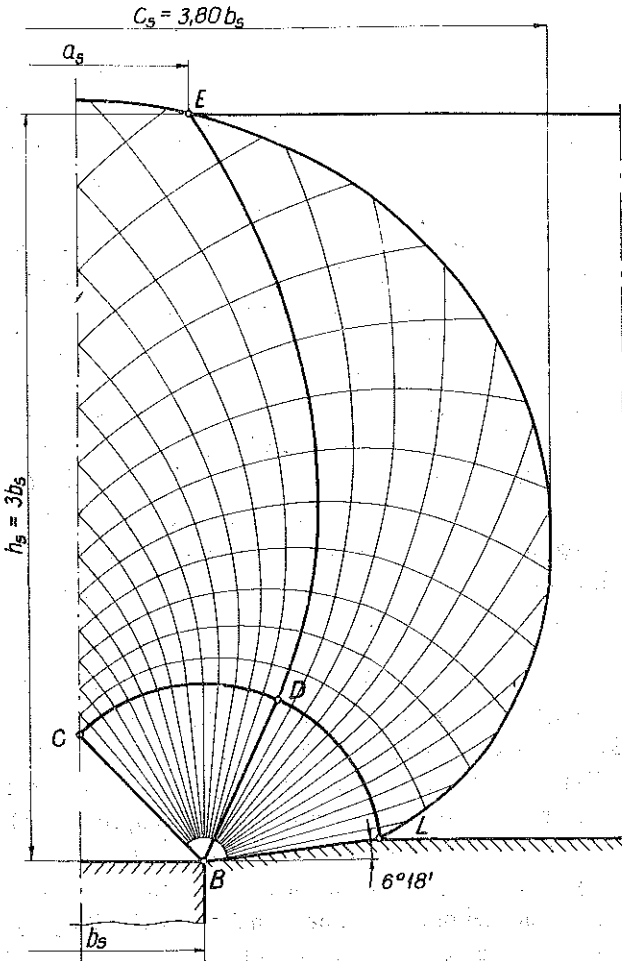
$$(3.1) \quad V_0 b_s = V_1 a_s.$$

W przypadku nie spełnienia warunku (3.1) budowano nowy plan prędkości dla obszaru ograniczonego charakterystyką  $k+1$ . Powyższą procedurę powtarzano dotąd, aż uzyskane wartości brzegowe dla prędkości spełniały warunek ciągłości ruchu ośrodka. Dla tak wyznaczonego kinematycznie dopuszczalnego pola odkształcenia sprawdzano, czy odpowiadające mu pole naprężeń jest statycznie dopuszczalne, a następnie w całym obszarze objętym plastycznym płynięciem sprawdzano podstawowy warunek termodynamiczny — nieujemności mocy dysypowanej energii. Z powodu znacznej pracochłonności metody wykreślnej wyznaczenia kinematyki zbudowano kompletne rozwiązanie tylko dla stosunku  $h_s/b_s=3$ . Zastosowanie metody numerycznej (różnic skończonych) do określania pola prędkości dla kolejno zakładanych obszarów odkształcenia plastycznego i opracowanie algorytmu na maszynie cyfrową stworzy możliwość bardzo efektywnego stosowania przedstawionej powyżej metody rozwiązywania tego typu zagadnień brzegowych, co znacznie ułatwi poszukiwanie kompletnych rozwiązań dla innych wartości stosunku  $h_s/b_s$ .

Siatkę charakterystyk dla naprężeń wynikającą z kompletnego rozwiązania dla  $h_s/b_s=3$  przedstawiono na rys. 4.

\*) Autorowi nie są znane prace, w których występowałyby tego typu zagadnienia brzegowe.

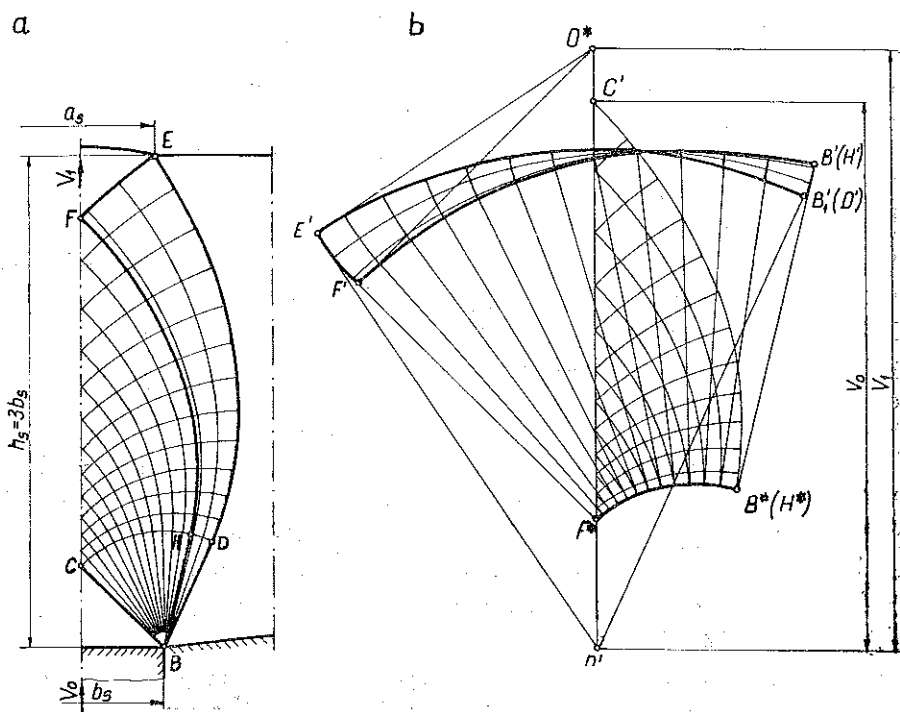
W celu wykazania, że otrzymane pole naprężeń z rozwiązania kinematyki jest statycznie dopuszczalne, zbudowano przedłużenie linii poślizgu w obszar sztywny. Okazało się, że oddziaływanie przekazywane na obszary sztywne wzdłuż linii  $AIG$  i  $BDE$  nie spowoduje przekroczenia warunku plastyczności w tych obszarach. Jedynie ze względu na konieczność lokalnego spełnienia warunków równowagi brzeg  $BL$



Rys. 4

musi być odchylony od poziomu o kąt  $6^{\circ}18'$ . Natomiast swobodny brzeg  $GE$  stanowi obwiednię prostych prostopadłych do kierunków działania  $\sigma_1$ , określonych wartościami kąta  $\varphi$  w punktach leżących na  $GE$ . W wyniku zbudowania przedłużenia linii poślizgu uzyskano linię nieciągłości naprężeń  $EL$  typu statycznie dopuszczalnego. Wyznacza ona brzeg, na którym po jego prawej stronie (rys. 4) występuje stan naprężenia określony tensorem kulistym, natomiast po jego lewej stronie stan naprężenia wynikający z równań równowagi granicznej.

Linia  $EL$  określa zasięg oddziaływania pola naprężeń (wynikającego z kinematycznych warunków rozwiązania) na obszary sztywne. Zasięg ten wynosi  $c_s = 3,80 b_s$ . Wypływa stąd bardzo ważny wniosek, że przy szerokości warstwy gruntu mniejszej od  $c_s$  mogą powstać inne schematy odkształcenia plastycznego. Rozwiązanie dla prędkości dla  $h_s/b_s = 3$  przedstawia rys. 5.



Rozwiązanie dla prędkości dla  $h_s/b_s = 3$ ; a) siatka charakterystyk, b) hodograf

Rys. 5

Siatkę charakterystyk dla prędkości (rys. 5a) wykreślono na podstawie uzyskanych w postaci cyfrowej wartości współrzędnych  $x_{i,k}$  i  $y_{i,k}$  z rozwiązania statycznego. Charakterystyki  $BDE$  i  $AIG$  ograniczają obszar ośrodka będącego w ruchu. Materiał znajdujący się na zewnątrz tego obszaru pozostaje w spoczynku. Plan prędkości (rys. 5b) zbudowano metodą wykreślną na podstawie siatki charakterystyk dla prędkości. Ze względu na całkowitą symetrię rozważanego zadania przedstawiono rozwiązanie kinematyki ruchu tylko dla obszaru ośrodka położonego po prawej stronie osi symetrii. Hodograf przedstawia prędkości ruchu ośrodka w każdym punkcie rozpatrywanego obszaru plastycznego płynięcia. Są one reprezentowane na płaszczyźnie hodografu przez wektory prowadzone ze wspólnego bieguna  $O'$ , których końce leżą w punktach będących odwzorowaniem odpowiednich punktów płaszczyzny fizycznej. Wektor  $\overline{O' C'}$  przedstawia prędkość ruchu stempla  $V_0$ , natomiast wektor  $\overline{O' O^*}$  prędkość ośrodka  $V_1$  na swobodnym brzegu  $GE$ . Punktem wyjścia do budowy hodografu

było rozpatrzenie prędkości w punkcie  $E$ . Z warunku zachowania zwartości ośrodka w punkcie  $E$  wynika, że prędkość ruchu w tym punkcie musi być skierowana stycznie do charakterystyki  $BDE$ . Na płaszczyźnie hodografu prędkość w punkcie  $E$  przedstawia wektor  $\overline{O'E'}$  poprowadzony równoległe do stycznej do linii  $BDE$  w punkcie  $E$ . Odcinek  $O^*E'$  reprezentuje wektor prędkości ruchu cząstek ośrodka w punkcie  $E$  względem materiału zawartego w obszarze  $EFG$ . Charakterystyki  $BDE$  i  $EF$  są liniami nieciągłości prędkości. Prędkości ruchu wzdłuż nich od strony wewnętrznej obszaru  $BEF$  są odwzorowane na płaszczyźnie hodografu przez łuki kół o promieniach  $O'E'$  i  $O^*E'$  zatoczone z punktów  $O'$  i  $O^*$ . Obszar  $BDEFH$  odwzorowano na hodografie, budując ortogonalną siatkę linii do odpowiednich charakterystyk dla prędkości występujących w tym obszarze. Na planie prędkości jest to obszar  $B_1'E'F'B'$ .

W wyniku rozpatrzenia prędkości w punkcie  $F$  przy zachowaniu w nim zwartości materiału określono położenie punktu  $F^*$ . Odcinek  $O^*F'$  reprezentuje wektor prędkości ruchu ośrodka w punkcie  $F$  względem obszaru  $EFG$ , a odcinek  $F^*F'$  wektor prędkości ruchu ośrodka w punkcie  $F$  względem obszaru  $BHFC$ . Charakterystyka  $BHF$  jest linią nieciągłości prędkości. Na płaszczyźnie hodografu odwzorowana jest przez linie  $B'F'$  i  $B^*F^*$ . Linie te przedstawiają prędkości ruchu na linii nieciągłości:  $B'F'$  — prędkości od strony obszaru  $BEF$ , natomiast  $B^*F^*$  — od strony obszaru  $BHFC$ . Odcinki  $F'F^*$  i  $B'B^*$  przedstawiają skoki prędkości w punktach  $F$  i  $B$ . Linie  $F^*B^*$  otrzymano odkładając odcinki równe stałemu skokowi prędkości od wyznaczonej wcześniej linii  $F'B'$ . Obszar  $BHFC$  odwzorowano na hodografie w wyniku zbudowania ortogonalnej siatki linii do odpowiednich charakterystyk dla prędkości postępując identycznie jak w przypadku odwzorowywania obszaru  $BDEFH$ .

Z uzyskanego rozwiązania kinematycznego ruchu ośrodka (rys. 5) wynika, że w każdym punkcie obszaru plastycznego płynięcia, z wyjątkiem punktów należących do  $ABC$  i  $GEF$ , prędkość jest inna. Obszary  $ABC$  i  $GEF$  przesuwały się jako sztywne z prędkościami  $V_0$  i  $V_1$ , które spełniają warunek ciągłości (3.1). Obszar plastycznego płynięcia jest ograniczony charakterystykami  $AIG$  i  $BDE$  wyprowadzonymi z punktów  $A$  i  $B$  pod kątami  $\delta = 115^\circ$  (rys. 3).

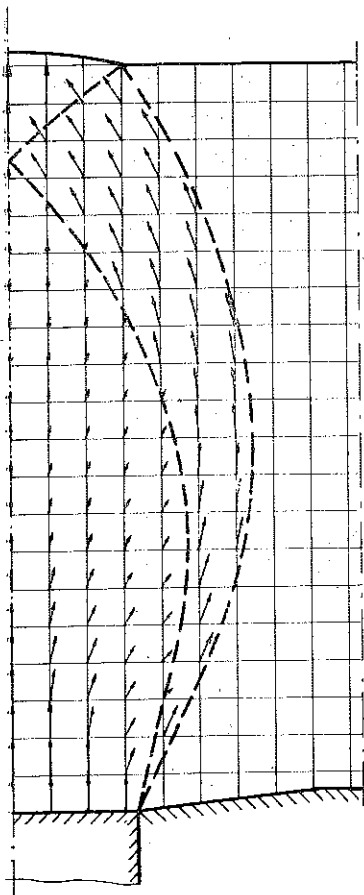
Z hodografu wynika, że cząstki ośrodka należące do obszaru  $BDEFH$  mają bardzo znaczne prędkości względem przyległych partii materiału. Dlatego też przez «szczylinę»  $a_s$  w początkowej fazie ruchu stempla najpierw będzie wypływał materiał pochodzący z tego obszaru. Na podstawie hodografu wykreślono na płaszczyźnie fizycznej wektory prędkości ruchu cząstek ośrodka. Otrzymany poglądowy obraz ruchu ośrodka dla  $h_s/b_s = 3$  przedstawia rys. 6. Na rys. 7 przedstawiono odkształcenia kwadratowej siatki w początkowej fazie wciskania stempla od dołu w warstwę ośrodka o grubości  $h_s = 3b_s$ .

Mając wyznaczoną siatkę charakterystyk dla prędkości i określone prędkości w całym polu odkształcenia plastycznego sprawdzano metodą graficzną [2] warunek nieujemności mocy dysypowanej w postaci

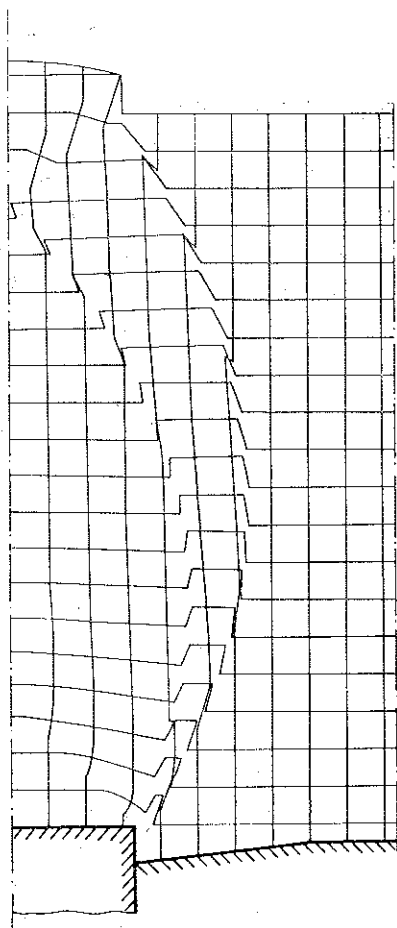
$$(3.2) \quad \dot{W} = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 \geq 0.$$



W wyniku tak przeprowadzonej weryfikacji okazało się, że warunek (3.2) jest spełniony w całym obszarze objętym plastycznym płynięciem. A więc przedstawione na rys. 4 pole naprężeń spełnia wszystkie warunki statyczne, kinematyczne oraz podstawowy warunek termodynamiczny. Wobec tego jest to rozwiązanie pełne.



Rys. 6



Rys. 7

Wyznaczenie rzeczywistej wartości wypadkowej oporu ruchu strugi gruntovej sprowadza się do numerycznego scałkowania naprężeń  $\sigma_y$  i  $\tau_{xy}$  wzdłuż linii nieciągłości prędkości  $AIG$  i  $BDE$  oraz uwzględnieniu ciężaru  $G$  ośrodka zawartego między tymi liniami. Rzeczywistą wartość nacisków  $p_0$  wyznaczano z warunku równowagi

$$(3.3) \quad (p_0 + \gamma h_s) \frac{b_s}{2} = \int_{AG} \sigma_y dx + \int_{AG} \tau_{xy} dy + \frac{G}{2},$$

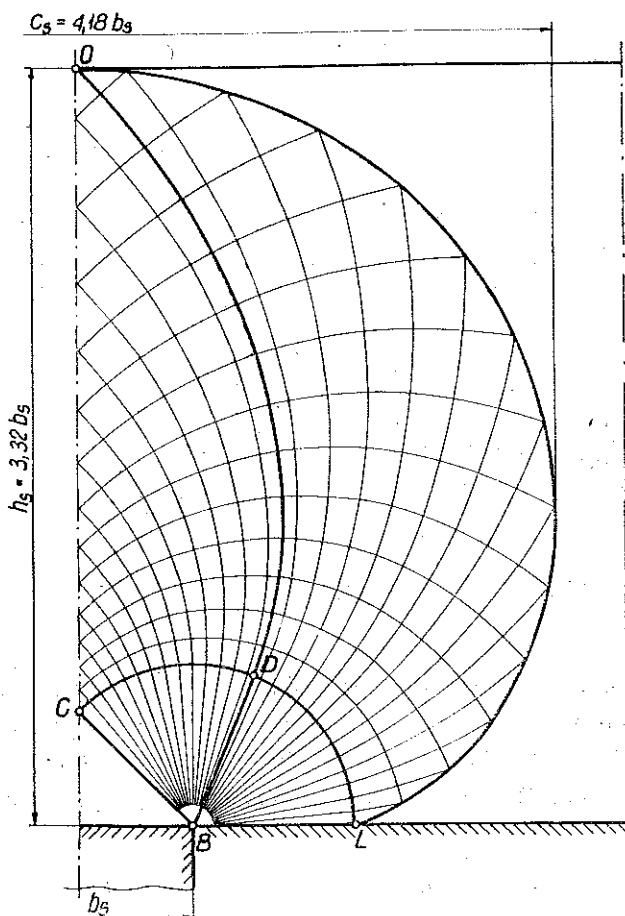
natomiast naciski  $p_s$  na podstawie związku

$$(3.4) \quad p_s = p_0 + \gamma h_s.$$

Po wyznaczeniu nacisków obliczeniowych  $p_0$  sprawdzano na swobodnym brzegu  $GE$  warunek brzegowy dla naprężeń  $\sigma_1 = 0$ .

#### 4. OCENA DOLNA $p_s$

Oceny dolne nacisków na powierzchni czołowej stempla w początkowej fazie wciskania go w warstwy gruntu o różnych grubościach można uzyskać na podstawie statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Pola takie zbudowano zakładając, że obszar plastycznego płynięcia jest zawarty między charakterystykami  $AIO$  i  $BDO$  (rys. 3), a pozostałe obszary pozostają sztywne. Oczywiście jest, że wówczas kinematyczne warunki procesu nie są spełnione. Przede wszystkim przy założeniu nieściśliwości ośrodka, nie może być spełniony warunek ciągłości strugi, ponieważ szerokość



Rys. 8

«szczeliny wypływu»  $a_s=0$ , a zatem nie mogą być również spełnione warunki brzegowe dla prędkości. Pomimo to, jak się okazało, uzyskiwane oceny nacisków  $p_s$  z tego typu pól naprężeń są bliskie rzeczywistych wartości i mogą być stosowane dla potrzeb inżynierskich.

Na rys. 8 przedstawione jest statycznie dopuszczalne pole naprężeń zbudowane dla  $h_s/b_s=3,32$ . Tego typu pola naprężeń otrzymuje się rozwiązując kolejno te same co w przypadku rozwiązania kompletnego zagadnienia brzegowe dla naprężeń. Odnośne rozwiązania należy prowadzić do charakterystyki przecinającej swobodny brzeg na osi symetrii. Budując przedłużenia linii poślizgu w obszar sztywny otrzymano tego samego typu, co dla rozwiązania pełnego, linie nieciągłości naprężeń (np.  $OL$ , rys. 8), które określają zasięgi oddziaływań wywołanych istniejącymi stanami naprężeń w obszarach plastycznych na obszary sztywne. Tego typu statycznie dopuszczalne pola naprężeń wymagają dla stosunków  $h_s/b_s$  różnych od 3,32 odpowiedniego ukształtowania brzegu  $BL$  — ze względu na lokalne zachowanie stanu równowagi ośrodka. Naciski  $p_0$  na powierzchni czołowej stempla, wynikające z przyjętych pól naprężeń, określano rozwiązując równanie równowagi

$$(4.1) \quad (p_0 + \gamma h_s) \frac{b_s}{2} = \int_{AO} \sigma_y dx + \int_{AO} \tau_{xy} dy + \frac{G}{2}.$$

Naciski  $p_s$  obliczano na podstawie wzoru (3.4). Mając określone wartości nacisków sprawdzano w punkcie  $O$  następujące warunki brzegowe dla naprężeń:

$$\text{dla } y=0, \quad \sigma_1=0.$$

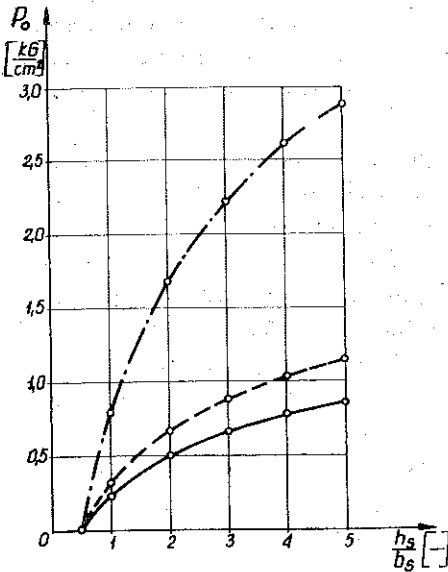
## 5. WYNIKI OBLICZEŃ $p_0$ I $p_s$

Ustalony algorytm pozwala obliczyć naciski na powierzchni czołowej stempla dla dowolnych danych materiałowych oraz danych geometrycznych zadania określonych dowolnymi wartościami szerokości stempla  $b_s$  i stosunku  $h_s/b_s \leq 23$ . Algorytm zaprogramowano w języku GIER-ALGOL IV na maszynie cyfrową. Jako dane wejściowe wprowadzono do pamięci maszyny wartości parametrów gruntowych: kohezji  $K$  i ciężaru objętościowego  $\gamma$  oraz wartości parametrów geometrycznych: szerokości stempla  $b_s$  i stosunku  $h_s/b_s$ .

Do obliczeń przyjęto parametry trzech różnych ośrodków gruntowych:

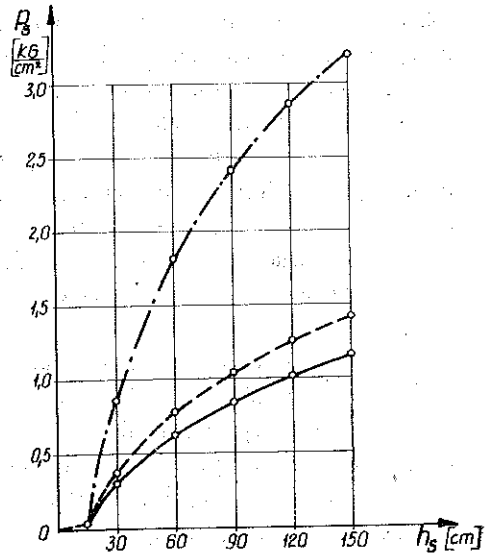
- 1) gliny piaszczystej w stanie miękkoplastycznym, dla której kohezja  $K=0,15$  [kG/cm<sup>2</sup>], ciężar objętościowy  $\gamma=2 \cdot 10^{-3}$  [kG/cm<sup>3</sup>];
- 2) łu piaszczystego w stanie miękkoplastycznym, dla którego  $K=0,2$  [kG/cm<sup>2</sup>],  $\gamma=1,8 \cdot 10^{-3}$  [kG/cm<sup>3</sup>];
- 3) łu piaszczystego w stanie półzwartym, dla którego  $K=0,5$  [kG/cm<sup>2</sup>],  $\gamma=2,15 \cdot 10^{-3}$  [kG/cm<sup>3</sup>].

Dla każdego z nich obliczono dla różnych stosunków  $h_s/b_s$  naciski  $p_0$ , wynikające ze statycznie dopuszczalnych pól naprężeń zbudowanych podobnie jak na rys. 8. Ponadto dla każdego z przyjętych ośrodków obliczono naciski  $p_s$  dla różnych grubości warstw  $h_s$  przy założeniu szerokości stempla  $b_s=30$  [cm].



— glina piaszczysta - miękkoplastyczna  
 --- il piaszczysty - miękkoplastyczny  
 -.- il piaszczysty w stanie półzwałym

Rys. 9



— glina piaszczysta - miękkoplastyczna  
 --- il piaszczysty - miękkoplastyczny  
 -.- il piaszczysty w stanie półzwałym

Rys. 10

W celu ustalenia dokładności oceny dolnej nacisków  $p_0$  i  $p_s$  w przypadku  $h_s/b_s=3$  obliczono rzeczywiste ich wartości wynikające z kompletnego rozwiązania (rys. 4). Wyniki obliczeń zamieszczono w tablicach 1 i 2 oraz przedstawiono na wykresach  $p_0=f(h_s/b_s)$  (rys. 9) i  $p_s=f(h_s)$  dla  $b_s=30$  [cm] (rys. 10).

Tablica 1. Naciski  $p_0$  dla różnych stosunków  $h_s/b_s$ 

$\frac{h_s}{b_s}$	Gлина piaszczysta w stanie miękkoplastycznym		Il piaszczysty w stanie miękkoplastycznym		Il piaszczysty w stanie półzwałym	
	Ocena dolna	Wartość rzeczywista	Ocena dolna	Wartość rzeczywista	Ocena dolna	Wartość rzeczywista
	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$	$\left[ \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2} \right]$
1	0,238	—	0,317	—	0,793	—
2	0,507	—	0,676	—	1,692	—
3	0,667	0,673	0,889	0,898	2,223	2,246
4	0,784	—	1,046	—	2,615	—
5	0,863	—	1,151	—	2,879	—

Tablica 2. Naciski  $p_s$  dla  $b_s=30$  [cm]

$\frac{h_s}{b_s}$	Głina piaszczysta w stanie miękkoplastycznym		II piaszczysty w stanie miękkoplastycznym		II piaszczysty w stanie półzwartym	
	Ocena dolna	Wartość rzeczywista	Ocena dolna	Wartość rzeczywista	Ocena dolna	Wartość rzeczywista
	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]	[ $\frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ ]
1	0,298	—	0,371	—	0,857	—
2	0,627	—	0,784	—	1,821	—
3	0,847	0,853	1,051	1,060	2,416	2,439
4	1,024	—	1,262	—	2,873	—
5	1,163	—	1,421	—	3,201	—

## 6. UWAGI KOŃCOWE

W przypadku zadań geometrycznie podobnych, tzn. gdy

$$\frac{h_{s_1}}{b_{s_1}} = \frac{h_{s_2}}{b_{s_2}} = \dots = \frac{h_{s_n}}{b_{s_n}} = \text{const.},$$

naciski obliczeniowe  $p_0$  dla danego ośrodka są stałe. Jest to konsekwencją wprowadzenia w rozwiązaniu statycznym podstawienia (2.3).

Mając określony przebieg  $p_0 = f(h_s/b_s)$  dla danego ośrodka, można obliczyć naciski  $p_s$  dla dowolnych wartości  $b_s$  i  $h_s$  w przedziale oznaczoneści  $p_0$ .

Na podstawie zamieszczonych wyników w tablicach 1 i 2 można stwierdzić, że dla stosunku  $h_s/b_s=3$  oceny dolne nacisków  $p_0$  i  $p_s$  są bardzo bliskie ich rzeczywistych wartości. Różnice wartości nacisków uzyskanych na podstawie pełnego rozwiązania (rys. 4) i statycznie dopuszczalnego pola naprężeń nie przekraczają jednego procentu. Oszacowanie dokładności dolnych ocen  $p_0$  i  $p_s$  dla stosunku  $h_s/b_s$  różnego od 3 wymaga dodatkowych badań, polegających na znalezieniu dla nich kompletnych rozwiązań.

Omawiane w niniejszej pracy zagadnienia mają istotne znaczenie dla analizy procesów urabiania gruntów sposobami mechanicznymi. Jak wiadomo, zjawisko ruchu strugi gruntowej obserwuje się prawie we wszystkich procesach urabiania podłoża maszynami do robót ziemnych.

Rozpatrywany przypadek ruchu strugi gruntowej na m.in. miejsce w procesie napełniania skrzyni, zgarniarki, w jego końcowej fazie (w fazie dopełniania pojemnika zgarniarki). Zagadnienia te szerzej zostały omówione w pracy [4].

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1974.
3. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki plastycznej*, PWN, Warszawa 1967.
4. B. PONDER, *Analiza procesu napelniania skrzyń zgarniarek*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 1975.
5. W. OLSZAK, P. PERZYNA i A. SAWCZUK, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.

## Резюме

СТАТИКА И КИНЕМАТИКА СЛОЯ ИДЕАЛЬНОГО СВЯЗНОЙ СРЕДЫ  
В НАЧАЛЬНОЙ ФАЗЕ ВДАВЛИВАНИЯ ПЛОСКОГО ШТАМПА

В работе обсуждена механика идеально связной среды в начальной фазе вдавливания снизу плоского штампа в слой грунта. Анализ проведем на основе математической теории сыпучных сред и экстремальных принципов теории пластичности [5].

Представлены полное решение статики и кинематики среды и статически допустимые поля напряжений. Кроме этого в работе помещены результаты расчетов нажимов на торцевой поверхности штампа, следующих из полного решения статики и кинематики, а также статически допустимых полей напряжений для трех разных сред.

## SUMMARY

STATICS AND DYNAMICS OF THE LAYER OF PERFECTLY COHESIVE MEDIUM IN  
THE INITIAL PHASE OF PRESSING OF PLANE PUNCH

The paper deals with mechanics of perfectly cohesive medium in an initial phase of pressing of plane punch from beneath into the layer of soil. The analysis is performed on the basis of the mathematical theory of soils and extremal principles of plasticity theory [5].

The complete solution of the statics and kinematics of the medium and statically admissible stress field are given. Besides, the results of computations of the stresses on the front surface of the punch, resulting from the complete solution of the statics and kinematics and statically admissible stress field for three different media, are presented.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1976 r.*