

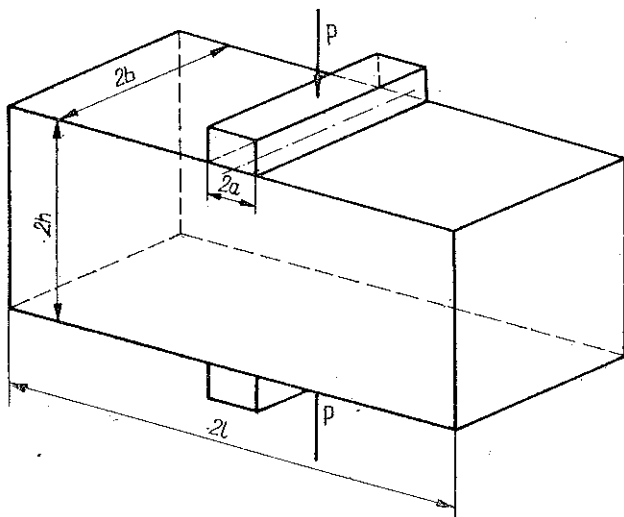
ANALIZA ŚCISKANIA BŁOKU SKALNEGO POMIĘDZY PŁASKIMI STEMPLAMI*)

JAN ZAWADA (WARSZAWA)

W pracy dokonano analizy procesu ściskania bloku skalnego, rozpatrywanego jako ośrodek Coulomba, pomiędzy współosiowymi płaskimi stemplami. Założono, że proces przebiega w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Rozwiązania otrzymano opierając się na teorii stanów granicznych. Przeprowadzone badania dla trzech rodzajów skał krajowych wykazały dość dobrą zgodność wyników teoretycznych i doświadczalnych. Wysłunęto wniosek, że metody teorii stanów granicznych mogą okazać się przydatne przy rozpatrywaniu zagadnień kruszenia skał.

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest analiza ściskania bloku skalnego, traktowanego jako ośrodek Coulomba, pomiędzy współosiowymi płaskimi stemplami (rys. 1). Założono, że proces przebiega w warunkach płaskiego stanu odkształcenia. Zbliżone



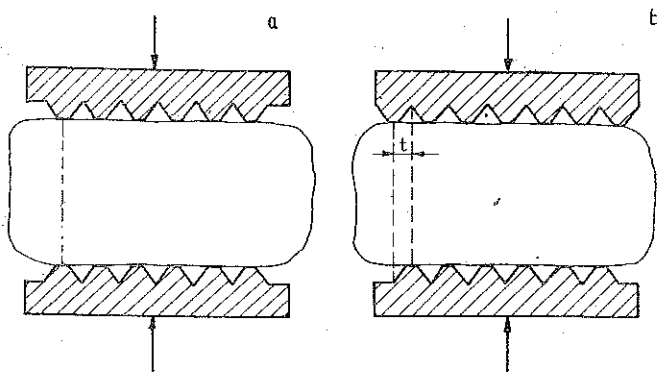
Rys. 1. Proces ściskania bloku materiału pomiędzy współosiowymi płaskimi stemplami

zagadnienie wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń, jako problem teorii plastyczności, zostało rozwiązane w 1920 r. przez L. Prandtla, a następnie uzupełnione przez R. Hilla i innych. Literatura dotycząca tego problemu jest bardzo

*) Pracę napisano w czasie stażu naukowego autora w IPPT PAN.

obszerna (por. np. [1 i 2]). Rozwiązania dla tego zagadnienia znajdują zastosowanie praktyczne w dziedzinie obróbki plastycznej metali i w określaniu nośności podłoża gruntowego. Podobnie analiza zadania pokazanego na rys. 1 może być przydatna przy rozpatrywaniu kruszenia skał w urządzeniach zwanych kruszarkami, stosowanych w przemyśle.

Zasada działania kruszarek polega na zgniataniu brył materiału skalnego pomiędzy sztywnymi płytami. Znajdujące się na nich występy w kształcie klinów lub wąskich stempli ułatwiają kruszenie. Na obu płytach występy te mogą być umieszczone względem siebie współosiowo albo są przesunięte o pewną podziałkę (rys. 2). Ich długość jest znacznie większa od szerokości, co pozwala założyć, że przy niszczeniu materiału istnieje płaski stan odkształcenia.



Rys. 2. Płyty naciskające w kruszarkach, a) ze stemplami współosiowymi, b) ze stemplami przesuniętymi

Proces kruszenia jest trudny do opisu formalnego. Składa się na to kilka przyczyn. Przede wszystkim ośrodek skalny jest anizotropowy i jego własności nawet dla tego samego złoża różnią się od siebie. Jak wynika z dotychczasowych badań warunków zniszczenia skał nie ma charakteru liniowego, lecz postać bardziej złożoną. Bryły skał ściskane pomiędzy płytami w maszynie mają kształt nieregularny, a poza tym są one niszczone w wyniku kilkakrotnego zbliżania płyt. Materiał znajdujący się w przestrzeni roboczej jest więc obciążany wielokrotnie. Proces kruszenia nie ma charakteru statycznego, gdyż przebiega z określoną prędkością.

Przy projektowaniu kruszarek istotna jest znajomość maksymalnych sił obciążających płyty oraz pracy wydatkowanej na kruszenie brył. Już od połowy ubiegłego wieku czyniono próby określenia tych wielkości, jednak wielkie trudności w opisie procesu kruszenia uniemożliwiały zastosowanie naukowej analizy. Dlatego też przemysłowe kruszenie skał jest dziedziną techniki, w której postępu dokonano przeważnie drogą ustalania zależności empirycznych oraz zbierania doświadczeń praktycznych.

Wydaje się, że znaczenie tej dziedziny jest obecnie tak duże, iż celowe jest opracowanie teorii procesów kruszenia. W ostatnich latach dokonano pod tym względem znacznego postępu. Jedną z propozycji przedstawiona w pracy [3] polega na tym,

aby w mechanice procesów kruszenia skał zastosować metody teorii stanów granicznych i przyjąć na początku prosty warunek Coulomba. Założenia te pozwoliły na uzyskanie rozwiązań dla niektórych procesów ściskania. Analizowane procesy polegały na ściskaniu bloków prostopadłościennych między różnymi i w różny sposób rozstawionymi stemplami. Ustalone w ten sposób schematy obciążenia odpowiadają w przybliżony sposób rzeczywistemu procesowi zachodzącemu w maszynie. Już to uproszczone podejście pozwala na otrzymanie szeregu informacji o charakterze jakościowym oraz na ocenę maksymalnych sił.

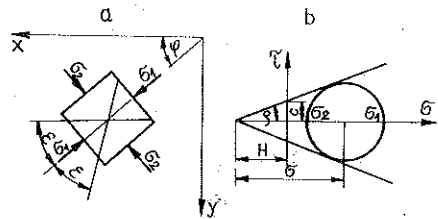
Jako elementarny przypadek modelowania procesu kruszenia, przeprowadzimy analizę ściskania bloku materiału pomiędzy dwoma współosiowymi płaskimi stemplami. Istnieje tu pewna analogia między założonym procesem, a procesem zachodzącym w kruszarce (rys. 2a). Schemat z rys. 2b dotyczący ściskania bloku między stemplami przestawionymi będzie rozważany w następnej pracy.

2. PODSTAWOWE ZALEŻNOŚCI DLA PŁASKIEGO STANU ODKSZTAŁCENIA

Przy wyznaczaniu stanu naprężenia przyjmujemy założenia stosowane w teorii stanów granicznych. Naprężenia ściskające będziemy uważać jako dodatnie, a układ współrzędnych prostokątnych zorientujemy w taki sposób, aby oś y była skierowana pionowo ku dołowi (rys. 3). Układ równań przedstawiający stan równowagi oraz warunek zniszczenia Culomba-Mohra dla płaskiego stanu odkształcenia może być rozwiązany metodą charakterystyk (por. np. [4]). W zagadnieniach ściskania materiałów kruchych ciężar własny ośrodka można zaniedbać. Równania dwóch rodzin charakterystyk przyjmują następującą postać:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), & \sigma &= C \exp(-2\varphi \operatorname{tg} \rho), & \text{rodzina } \alpha, \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), & \sigma &= C \exp(2\varphi \operatorname{tg} \rho), & \text{rodzina } \beta, \end{aligned}$$

gdzie φ oznacza kąt, jaki tworzy kierunek większego naprężenia głównego z osią x , $\varepsilon = \pi/4 - \rho/2$ jest kątem, jaki tworzy większe naprężenie główne z każdą z charakterystyk, σ jest pomocniczą wielkością oznaczającą naprężenie zastępcze (rys. 3), C jest pewną stałą wyznaczaną z warunków brzegowych. Wielkości ρ , c , H będące parametrami wytrzymałościowymi, oznaczają odpowiednio: kąt tarcia wewnętrznego, spójność i wytrzymałość na izotropowe rozciąganie. Analizę konkretnych przypadków równowagi granicznej można sprowadzić do rozwiązania zagadnień brzegowych dla równań charakterystyk (2.1).



Rys. 3. Warunek stanu granicznego Coulomba dla płaskiego stanu odkształcenia, a) kierunki naprężeń głównych, b) odzworowanie na płaszczyźnie naprężeń

W celu uzyskania rozwiązania ścisłego dla danego zagadnienia, oprócz wyznaczenia stanu naprężenia, konieczne jest ustalenie rozkładu prędkości odkształcenia. Punkt wyjścia stanowi przyjęcie zależności pomiędzy prędkościami odkształcenia, a naprężeniami w postaci

$$(2.2) \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}},$$

gdzie $\dot{\epsilon}_{ij}$ oznacza tensor prędkości odkształcenia, $G(\sigma_{ij})$ funkcję stanu naprężenia zwaną potencjałem plastycznym, σ_{ij} tensor stanu naprężenia, λ współczynnik proporcjonalności między odpowiednimi kombinacjami składowych tensora naprężenia i tensora prędkości odkształcenia. Podana wyżej zależność przy utożsamieniu potencjału plastycznego z warunkiem stanu granicznego nosi w literaturze nazwę prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem stanu granicznego.

Jeżeli założyć prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem Coulomba, to otrzymuje się następującą postać równań różniczkowych charakterystyk dla prędkości

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi + \varepsilon), \quad dv_\alpha - (v_\alpha \operatorname{tg} \rho - v_\beta \operatorname{sec} \rho) d\varphi = 0$$

(2.3) dla rodziny α oraz

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\varphi - \varepsilon), \quad dv_\beta + (v_\beta \operatorname{tg} \rho - v_\alpha \operatorname{sec} \rho) d\varphi = 0$$

dla rodziny linii β .

Wielkości v_α i v_β są rzutami wektora prędkości v na kierunki charakterystyk α i β przechodzących przez dany punkt. Charakterystyki dla prędkości przy stowarzyszonym prawie płynięcia pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń. Siatka charakterystyk dla naprężeń jest jednocześnie siatką charakterystyk dla prędkości.

Przyjęcie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem Coulomba prowadzi do wzrostu objętości materiału w procesie odkształcania. Wniosek taki może być w sprzeczności z wynikami doświadczeń. Potwierdziły to również badania wstępne w niniejszej pracy. Znacznie lepszą zgodność wyników teoretycznych z doświadczalnymi można otrzymać przy przyjęciu niestowarzyszonego prawa płynięcia określonego związkiem (2.2), w którym potencjał plastyczny $G(\sigma_{ij})$ przyjmuje się w postaci zależności

$$(2.4) \quad G(\sigma_{ij}) = 1/2 \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} - c.$$

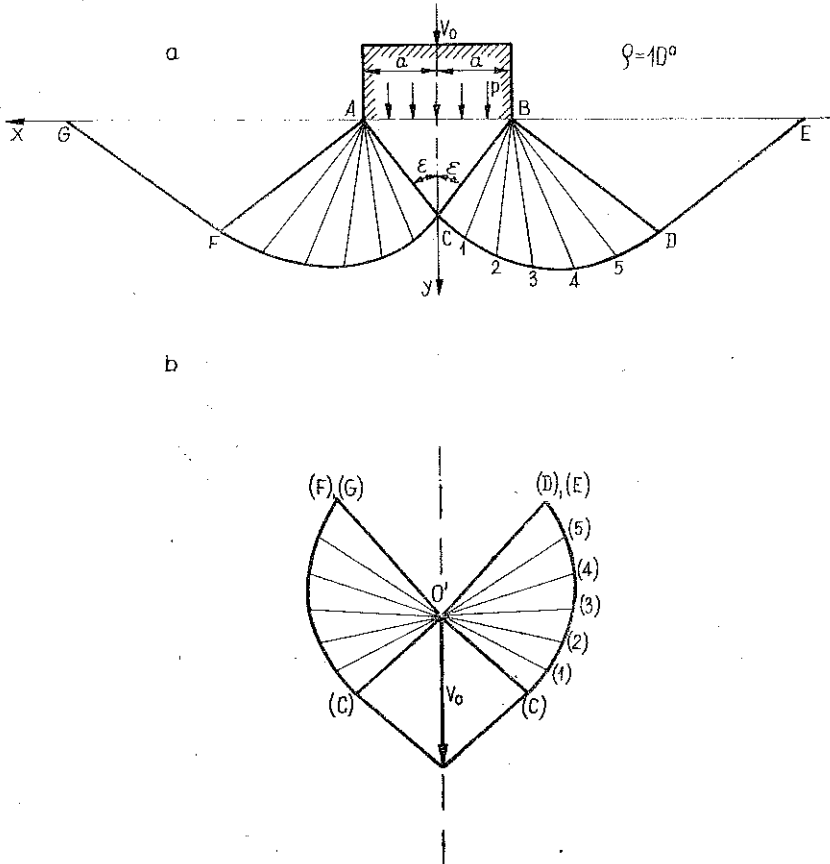
W tym przypadku charakterystyki dla prędkości w warunkach płaskiego stanu odkształcenia są do siebie prostopadłe i nie pokrywają się z charakterystykami dla naprężeń.

Znalezienie pola naprężeń i poprawnego pola prędkości dla danego zagadnienia nie daje jeszcze pewności, że rozwiązanie jest kompletne. Konieczne jest również znalezienie przedłużenia w obszar sztywny polegające na sprawdzeniu, czy nigdzie poza obszarem będącym w stanie granicznym nie jest przekroczony warunek zniszczenia. Przedłużenie takie wykonuje się w sposób podany przez J. F. BISHOPA [5].

W pracy niniejszej znaleziono rozwiązania kompletne dla procesu pokazanego na rys. 1. Zostały one następnie wykorzystane do weryfikacji doświadczalnej.

3. ANALIZA TEORETYCZNA PROCESU ŚCISKANIA BLOKU MATERIAŁU MIĘDZY PŁASKIMI STEMPLAMI

Dyskusję nad zagadnieniem rozpoczniemy od przypomnienia rozwiązań podanych przez L. Prandtla i R. Hilla dla procesu wciskania płaskiego stempla w półprzestrzeń nieważkiego ośrodka Coulomba. Proces przebiega w warunkach płaskiego



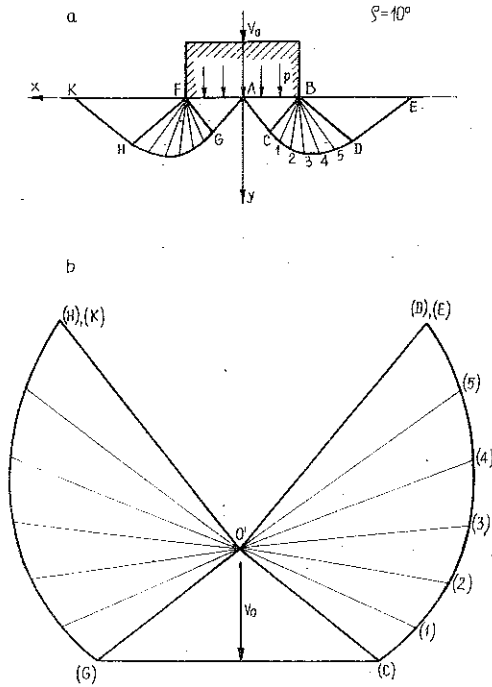
Rys. 4. Wciskanie stempla w półprzestrzeń ośrodka Coulomba, a) siatka linii poślizgu, b) plan prędkości dla stowarzyszonego prawa płynięcia

płynięcia. Rozwiązanie L. Prandtla, uogólnione na materiał Coulomba, przedstawiające siatkę linii poślizgu oraz plan prędkości dla stowarzyszonego prawa płynięcia pokazano na rys. 4. Graniczna wielkość nacisku pod blokiem wynosi (patrz [2])

$$(3.1) \quad p = H \left[\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \exp(\pi \operatorname{tg} \rho) - 1 \right].$$

Rozwiązanie R. Hilla, również uogólnione na materiał Coulomba, (rys. 5) w odróżnieniu od poprzedniego poprawne jest tylko w przypadku idealnie gładkiej powierzchni

podstawy. Przejdźmy do opisu przedłużenia siatki linii poślizgu w obszar sztywny. Przedłużenie takie zostało podane w pracy [3] problem ten analizowany był również przez J. SALENÇONA [6]. Pokazane na rys. 6 przedłużenie zostało wyznaczone wykreślnie dla kąta $\rho = 10^\circ$. Punktem wyjścia do rozważań jest siatka charakterystyk z rys. 4a. Znane wielkości σ i φ wzdłuż linii poślizgu DCB oraz wartość kąta $\varphi = \pi/2$



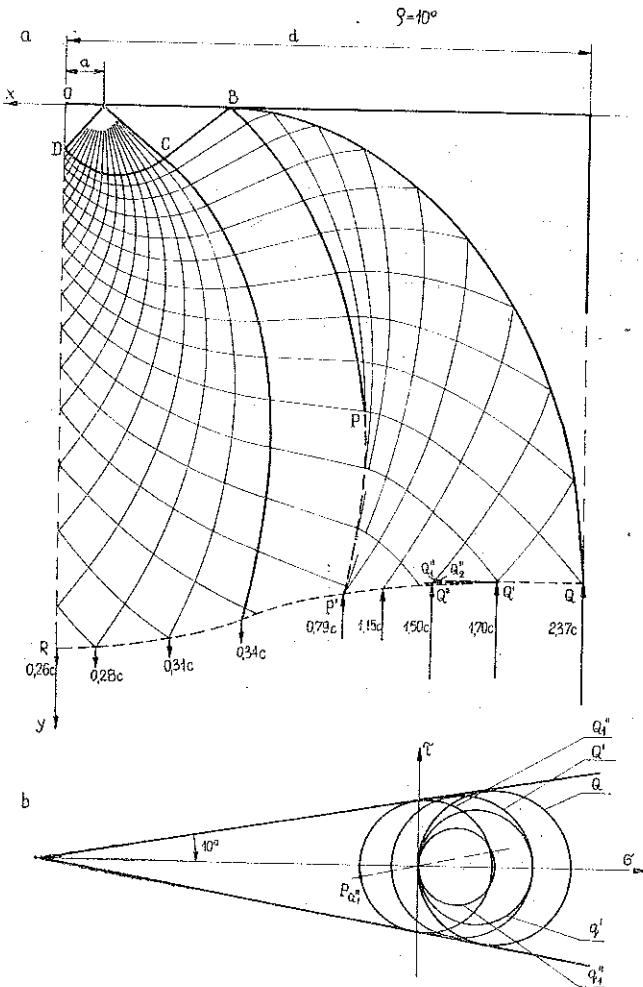
Rys. 5. Rozwiązanie Hilla dla wciskania stempla w półprzestrzeń ośrodka Coulomba, a) siatka charakterystyk, b) hodograf

na osi symetrii y określają zagadnienie mieszane w obszarze $BCDPR'P$. Przebieg linii BQ , która jest hipotetycznym swobodnym brzegiem, na zewnątrz którego nie istnieją żadne naprężenia, można wyznaczyć przez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego do zagadnienia Cauchy'ego. Brzeg ten jest określony jednoznacznie przez linię BP . W konstrukcji przedłużenia pojawia się linia nieciągłości naprężeń PP' , ale jest to nieciągłość statycznie dopuszczalna. Linię tę znaleziono wykreślnie posługując się odwzorowaniem stanu naprężenia na kole Mohra i jednocześnie wykonując odpowiednią konstrukcję na płaszczyźnie fizycznej. Wykorzystuje się przy tym pojęcie bieguna naprężeń, za pomocą którego można łatwo określić stan naprężenia na dowolnie nachylonej płaszczyźnie. Znając stan naprężenia w całym obszarze poniżej charakterystyki DCB można przystąpić do wyznaczenia linii nieciągłości naprężeń $RP'Q$. Linię tę należy poprowadzić tak, aby poniżej niej panował stan jednoosiowego ściskania naprężeniami równoległymi do pionowej osi y i nie przekraczającymi warunku stanu granicznego. Konstrukcję rozpoczynamy od punktu

Q położonego na hipotetycznej swobodnej krawędzi w miejscu jej największego oddalenia od osi y . Naprężenie w tym punkcie jest równe wytrzymałości ośrodka na jednoosiowe ściskanie określonej wzorem

$$(3.2) \quad \sigma = \frac{2c \cos \rho}{1 - \sin \rho}$$

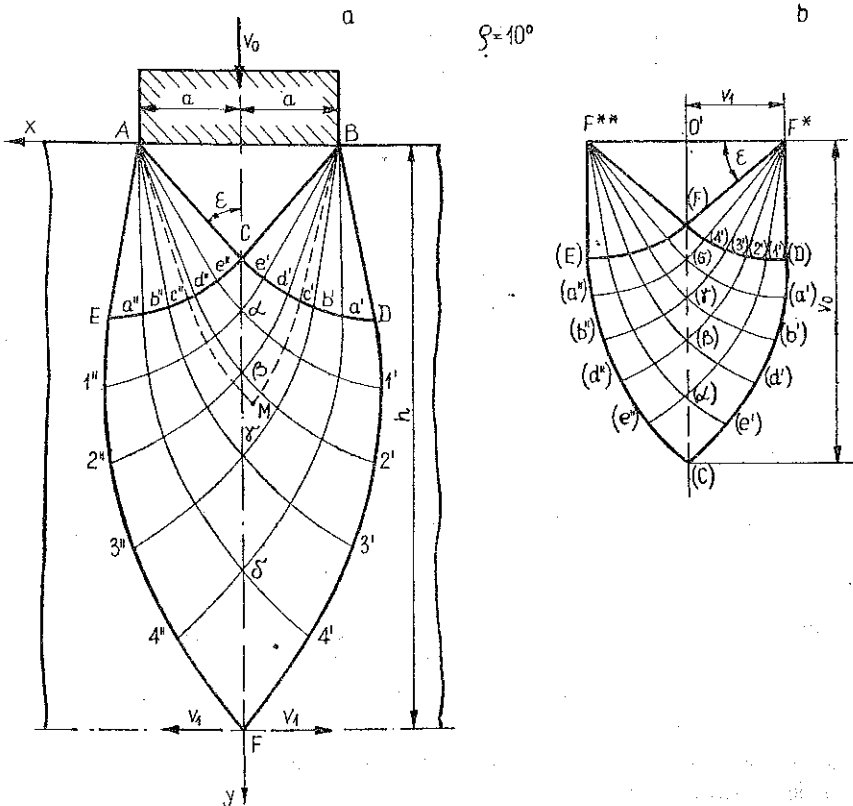
Dla $\rho = 10^\circ$ $\sigma = 2,37 c$, co oznaczono na rys. 6a.



Rys. 6. Przedłużenie pola naprężeń w obszar szczytny dla procesu wciskania stempla w półprzestrzeń, $\rho = 10^\circ$

Z punktu Q rysujemy początek linii nieciągłości równoległe do osi x , do przecięcia z następną charakterystyką. Przecięcie to znalazło się w rozpatrywanym przypadku w punkcie węzłowym Q' , w którym kąt $\varphi = \pi/2$. Stan naprężenia w tym punkcie panujący powyżej linii nieciągłości przedstawia na rys. 6b koło Q' , a poniżej niej koło q' . Linie nieciągłości prowadzimy następnie z punktu Q' do przecięcia z cha-

rakterystyką rodziny β w punkcie Q_1'' . Stanowi naprężenia od strony obszaru będącego w stanie granicznym odpowiada teraz koło Q_1'' : biegun tego koła oznaczono jako $P_{Q_1''}$. Kierunek linii nieciągłości znajdujemy łącząc biegun $P_{Q_1''}$ z początkiem układu współrzędnych $\tau \sigma$, który pokrywa się z biegunem koła q_1'' reprezentującym stan naprężenia w punkcie Q_1'' poniżej linii nieciągłości. Kierunek ten przenosimy na płaszczyznę fizyczną, w rezultacie czego poprawiona linia nieciągłości przechodzi przez punkt Q_2'' , dla którego należy znowu znaleźć stan naprężenia i poprawiony kierunek linii nieciągłości. Korektę kierunku linii nieciągłości przeprowadzamy tak długo aż dwa kolejne przybliżenia na płaszczyźnie naprężeń i na płaszczyźnie fizycznej będą dostatecznie bliskie. Poniżej linii nieciągłości pojawiają się najpierw naprężenia ściskające, a w pobliżu osi symetrii y naprężenia rozciągające. Wypadkowa tych naprężeń jest równa obciążeniu granicznemu działającemu na stempel. Z przedłużenia siatki linii poślizgu można wyznaczyć najmniejszą graniczną szerokość d naciskanego stemplem bloku materiału. W przypadku szerokości mniejszej od granicznej powstaje inny schemat zniszczenia przy nacisku mniejszym od określonego wzorem (3.1). Znajomość wielkości d może być przydatna w badaniach doświadczalnych przy ustalaniu wymiarów próbek.

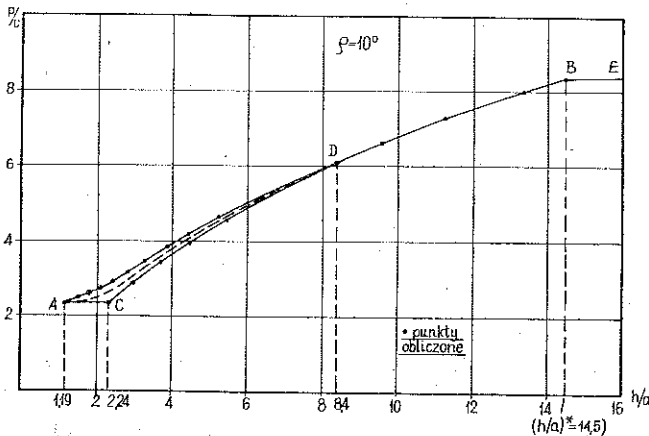


Rys. 7. Rozwiązanie dla procesu ściskania bloku materiału między płaskimi stemplami dla $\rho = 10^\circ$.
a) siatka charakterystyk, b) hodograf przy przyjęciu stowarzyszonego prawa płynięcia

Przejdźmy obecnie do analizy procesu pokazanego na rys. 1. Analogiczny proces przewężania bloku materiału Hubera-Misesa za pomocą dwóch przeciwnieżywnych stępli rozpatrywany był przez R. HILLA [7] i W. SZCZEPIŃSKIEGO [8]. W taki sam sposób jak dla ośrodka plastycznego można znaleźć rozwiązanie dla ośrodka Coulomba. Zakładamy, że pod stemplem wytwarza się jednorodny stan naprężenia obejmujący trójkąt ABC (rys. 7). W krzywoliniowych trójkątach ACE i BCD mamy zagadnienie charakterystyczne z punktem osobliwym, w czworokącie $ECDF$ zagadnienie charakterystyczne. Symetrycznie budowane z obu stron bloku siatki charakterystyk stykają się w środkowym punkcie osi symetrii F . Wielkość nacisku p , przy którym przebiega proces, zależy od stosunku szerokości stempla $2a$ do wysokości bloku $2h$. Stan naprężenia w każdym punkcie siatki można wyznaczyć jako funkcję nie znanego na razie nacisku p . Opierając się na danych w trójkącie ABC , w których $\varphi = \pi/2$ oraz $\sigma = \frac{p+H}{1+\sin \rho}$, dla dowolnego punktu obszaru granicznego M mamy wzór

$$(3.3) \quad \sigma_M = \frac{p+H}{1+\sin \rho} \exp [2 (\varphi_{c'} - \varphi_{c''} \operatorname{tg} \rho)],$$

w którym $\varphi_{c'}$ i $\varphi_{c''}$ oznaczają wielkości φ w punktach C' i C'' . Wartość nacisku p dla każdego stosunku h/a określimy z warunku znikania wypadkowej naprężeń poziomych σ_x na pionowej osi symetrii y , a więc z warunku $\int_0^h \sigma_x dy = 0$. Metodą tą wyznaczono wartości p w zależności od h/a dla kątów ρ równych 10° , 20° , 30° , 40° i 50° . Na rys. 8 podano dla przykładu przebieg krzywej AB przedstawiającej



Rys. 8. Zależność nacisku granicznego p od stosunku wysokości bloku do szerokości stempla h/a dla $\rho = 10^\circ$

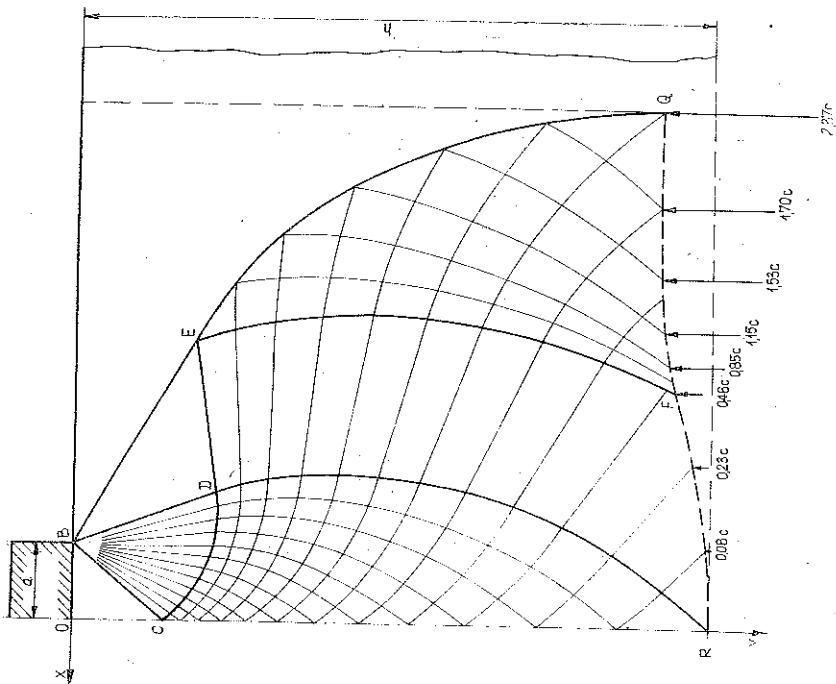
wykres zależności p od stosunku h/a dla $\rho = 10^\circ$. W punkcie B przy wartości $h/a = 14,5$ nacisk p osiąga wielkość określoną wzorem (3.1). Stosunek h/a , przy którym nacisk p równy jest tej wielkości oznaczmy jako $(h/a)^*$. Wartości $(h/a)^*$ dla różnych

kątown ρ są różne, np. dla $\rho=10^\circ$ mamy $(h/a)^*=14,5$; dla $\rho=20^\circ$ mamy $(h/a)^*=26,5$ itd. W przypadku, gdy $(h/a) > (h/a)^*$ następuje zniszczenie materiału przez poślizg wzdłuż charakterystyk $ACDE$ i $BCFG$ (rys. 4 — rozwiązanie Prandtla) lub $ACDE$ i $AGHK$ (rys. 5 — rozwiązanie Hilla). Jest to lokalny mechanizm zniszczenia. Na wykresie z rys. 8 mechanizmowi temu odpowiada poziomy odcinek BE .

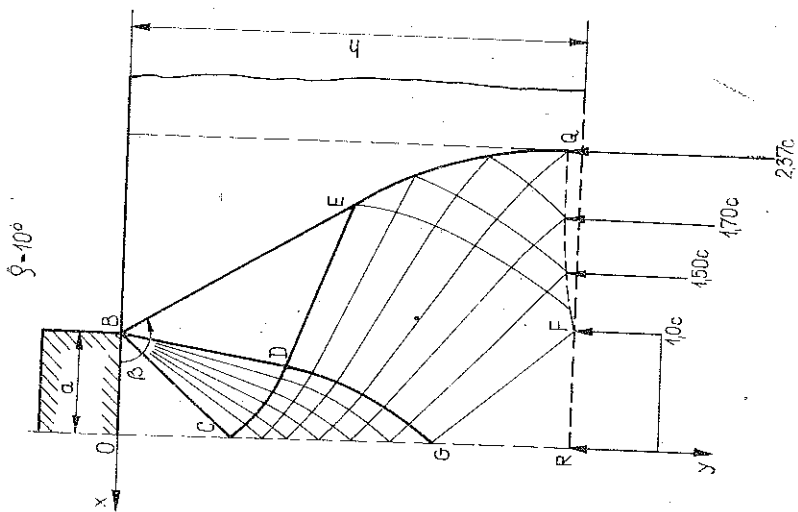
Linia AB została wyznaczona z warunków statyki, należy więc teraz sprawdzić czy otrzymane rozwiązanie spełnia warunki kinematyczne. Plan prędkości przy przyjęciu prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem Coulomba pokazano na rys. 7b. Stemple poruszają się ku sobie z prędkością v_0 a obydwie sztywne połowy bloku na zewnątrz linii BDF i AEF oddalają się od osi symetrii y z prędkością v_1 . Linie nieciągłości prędkości, pokrywające się z charakterystykami naprężeń AEF , BDF , są zaznaczone na hodografie jako łuki $(D)(F)$, $(E)(F)$.

Skok prędkości przy przekraczaniu linii nieciągłości, np. linii BDF , jest od niej odchylony o kąt ρ i reprezentowany przez wektory $F^*(F)$, $F^*(4')$, ..., $F^*(D)$. Poszczególne punkty siatki hodografu wyznaczono wykorzystując jej geometryczne własności. Ponieważ siatka linii poślizgu dla procesu z rys. 7 jest zgodna z warunkami kinematycznymi, przeto linia AB (rys. 8) stanowi na tym etapie analizy zagadnienia ocenę górną rozwiązania ścisłego. W następnym etapie tej analizy należy sprawdzić dla jakiego zakresu wartości h/a otrzymane pole naprężeń może być przedłużone w sposób statycznie dopuszczalny w obszar sztywny, przylegający do obszaru znajdującego się w stanie granicznym. Jeżeli konstrukcja przedłużenia dla określonej wartości h/a jest możliwa do wykonania, otrzymujemy rozwiązanie kompletne. Rozważania dotyczące tego problemu będziemy prowadzić dalej, podobnie jak poprzednio, dla $\rho=10^\circ$. Dla innych wartości kąta ρ są one podobne. Okazuje się, że dla $\rho=10^\circ$ przedłużenie w obszar sztywny udaje się otrzymać dla zakresu stosunku h/a : $8,4 \leq h/a \leq 14,5$. Wynika stąd, że krzywa DB z rys. 8 przedstawia rozwiązanie ścisłe zagadnienia. Przedłużenie pola naprężenia dla $h/a=8,4$ przedstawiono na rys. 9. W przedłużonym polu zbudowanym tak samo jak pole z rys. 6 występuje również linia nieciągłości naprężeń QFR . W odróżnieniu od pola pokazanego na rys. 6 nie pojawia się tu linia nieciągłości typu PP' , oddzielająca obszary będące w stanie granicznym. Dla skrajnego stosunku $h/a=14,5$ przedłużenie pola naprężeń w obszar sztywny znajdujemy zestawiając symetrycznie pola z rys. 6. Ponieważ krzywa AD (rys. 8) przedstawia jedynie ocenę górną nieznanego ścisłego rozwiązania, należy jeszcze znaleźć jego ocenę dolną. Pozwoli to na dokładniejsze oszacowanie rozwiązania rzeczywistego, gdyż wiadomo, że zawiera się ono między oceną górną i dolną. Ocenę dolną rozwiązania wyznaczamy znajdując odpowiednio dobrane, statycznie dopuszczalne pole naprężeń. Przykład takiego pola dla $h/a=4,5$ pokazano na rys. 10. Sposób jego konstrukcji jest taki sam jak w przypadku pól z rys. 6 i 9. Linia BEQ jest hipotetyczną swobodną krawędzią otrzymaną przez rozwiązanie zagadnienia odwrotnego do zagadnienia Cauchy'ego. W trójkącie BDE znany jest kąt $\varphi=\beta$ oraz wielkość $\sigma=H/(-\sin \rho)$. Wzdłuż charakterystyki CDE , należącej do rodziny α , po wyznaczeniu stałej C z warunków brzegowych mamy

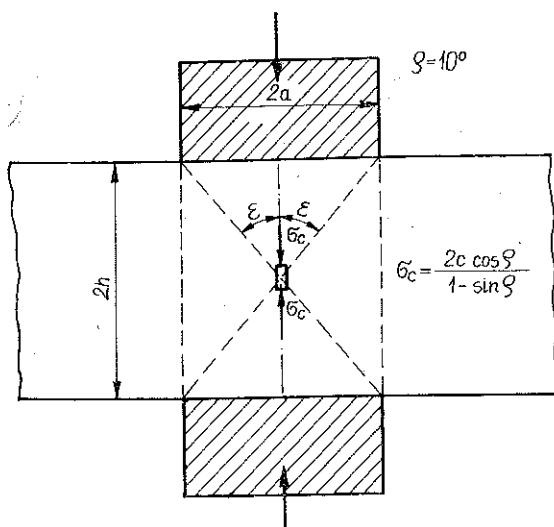
$$\sigma = \frac{H}{1 - \sin \rho} \exp [2(\beta - \varphi) \operatorname{tg} \rho].$$



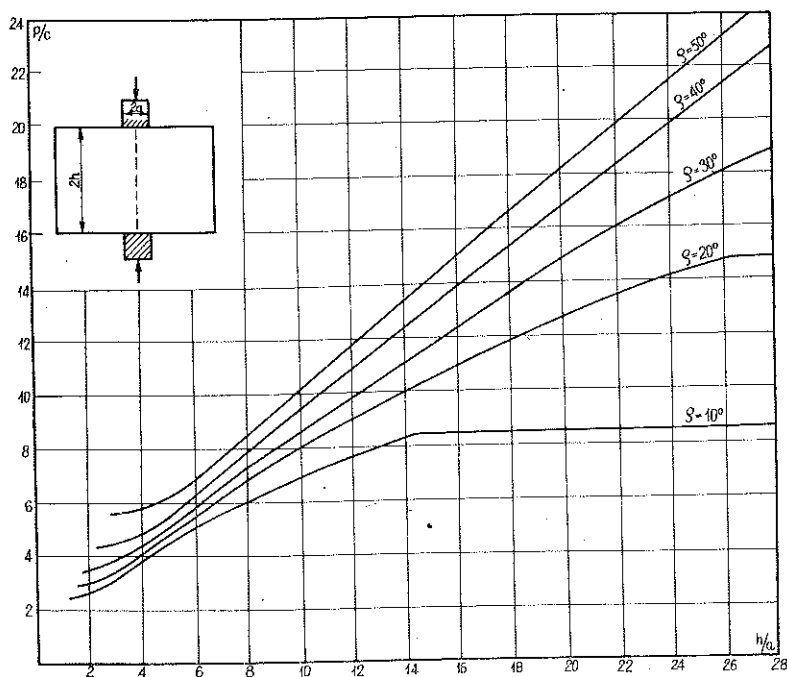
Rys. 9. Rozwiązanie kompletne dla $h/a=3,4$, $\rho=10^\circ$



Rys. 10. Przykład statycznie dopuszczalnego pola naprężeń $h/a=4,5$, $\rho=10^\circ$



Rys. 11. Statycznie dopuszczalne pole naprężeń dla skrajnego stosunku $h/a = \text{ctg } \varepsilon = 1,19$, $\rho = 10^\circ$



Rys. 12. Zależność nacisku granicznego p od stosunku wysokości bloku do szerokości stempla h/a dla różnych kątów ρ

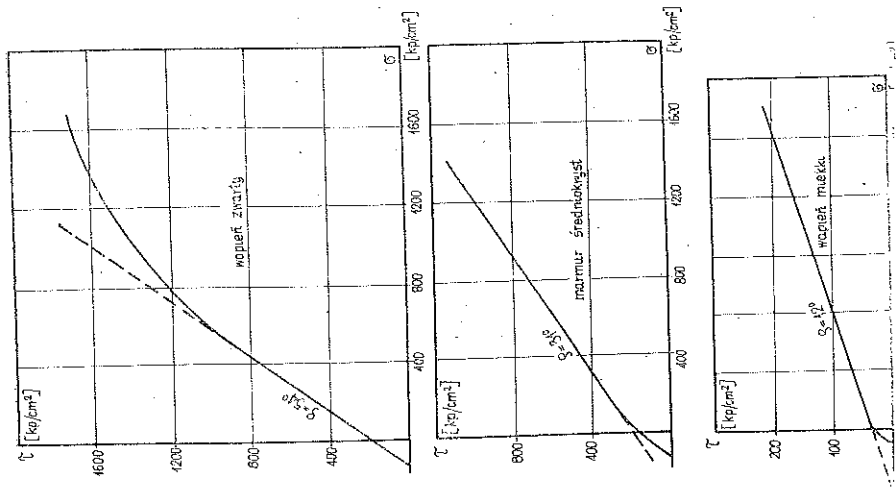
W obszarze OBC mamy $\varphi = \pi/2$ oraz $\sigma = \frac{p+H}{1-\sin\rho}$. Powyższe dane pozwalają na określenie nacisku p odpowiadającego przyjętemu polu naprężeń

$$(3.4) \quad p = H \left\{ \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} \exp [2(\beta - \pi) \operatorname{tg} \rho] - 1 \right\}.$$

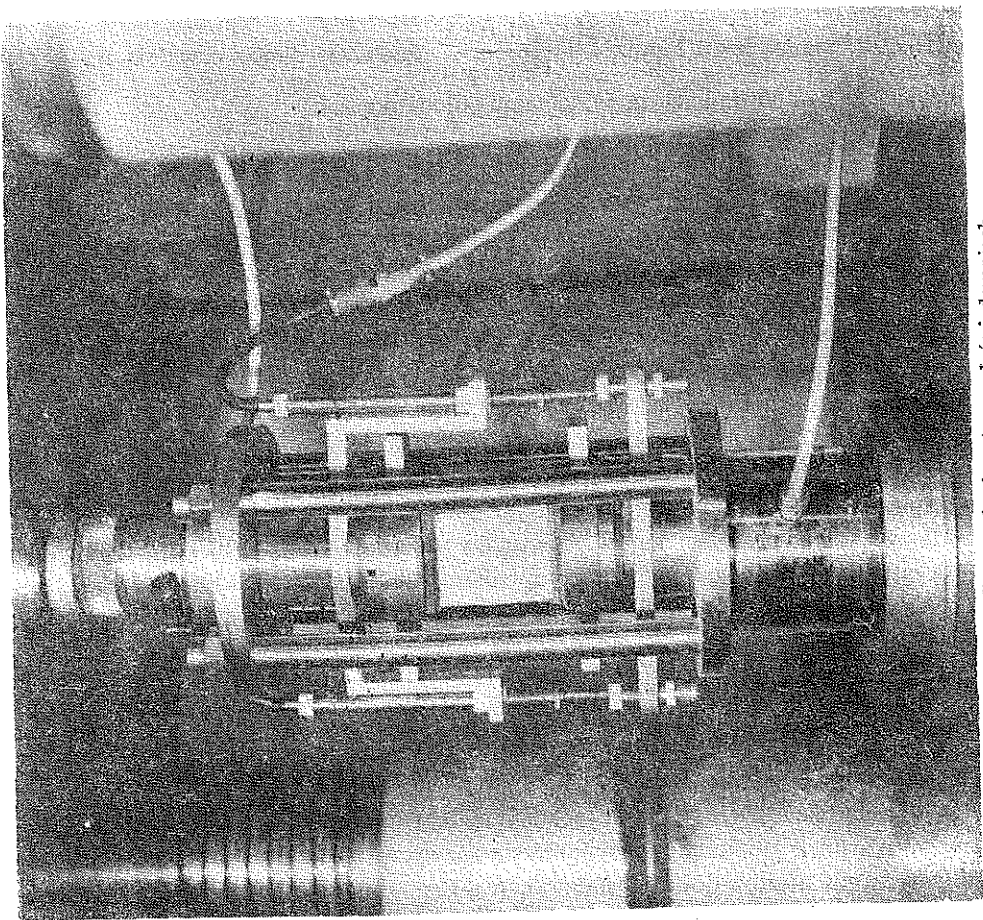
Ze wzoru tego obliczono naciski dla różnych stosunków h/a wyznaczając kąt β ze statycznie dopuszczalnych pól naprężeń. Naciski te, będące oceną dolną rozwiązania ścisłego, przedstawia krzywa DC na rys. 8. W zakresie $1,19 < h/a \leq 2,24$ ocenę dolną można wyznaczyć zakładając, że w całym obszarze między stemplami powstaje jednorodny, graniczny stan naprężenia odpowiadający wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie σ_c określonej zależnością (3.2), (rys. 11). Ocenę tę przedstawia odcinek AC (rys. 8). Dla $1,19 < h/a < 8,4$ przyjmujemy jako oszacowanie rozwiązania rzeczywistego wielkość pośrednią między obiema ocenami, co oznaczono na rys. 8 linią przerywaną. Takie same rozwiązania jak w przypadku $\rho = 10^\circ$ znaleziono również dla większych wartości kątów ρ . Krzywe pokazane na rys. 12 odpowiadają w początkowym przebiegu, zgodnie z poprzednią dyskusją, wielkości pośredniej między ocenami. Dla kątów $\rho = 30^\circ, 40^\circ, 50^\circ$ nie podano pełnego przebiegu tych krzywych, gdyż nie było to konieczne dla interpretacji wyników doświadczalnych.

4. ANALIZA DOŚWIADCZALNA

Istnieje wiele prac, w większości teoretycznych, stosujących w rozwiązywaniu konkretnych zagadnień dla ośrodka kruchego podejście oparte na teorii stanów granicznych. Warunek zniszczenia przyjmuje się zazwyczaj w najprostszej liniowej postaci. Dotychczas niezbyt dobrze wiadomo, w jakim stopniu jest możliwe stosowanie tej teorii i zakładanie wyidealizowanego modelu Coulomba. Dlatego też celem niniejszej pracy było wstępne zbadanie takiej możliwości w opisie stosunkowo prostego procesu ściskania między stemplami, prowadzonego na różnych rodzajach skał krajowych. Były to następujące skały stosowane w przemyśle: wapień zwarty z okolic Morawicy w kieleckim, wapień miękki z Pińczowa oraz marmur średnio-krystaliczny ze Stronia Śląskiego. Wymienione skały stanowiły przedmiot szczegółowych badań opublikowanych w pracach [9 i 10]. Ich warunki zniszczenia nie odpowiadają warunkowi Coulomba w całym zakresie stosowanych naprężeń σ (rys. 13). Okazuje się jednak, że np. dla wapienia zwartego początkowy przebieg krzywej stanu granicznego jest dokładnie prostoliniowy. Dla wapienia miękkiego i marmuru uzyskane krzywe można aproksymować do odcinków prostoliniowych. Badania wykonane w niniejszej pracy przeprowadzono na próbkach prostopadłościennych wycinanych z bloków skał. Wykorzystano w nich specjalny przyrząd z indukcyjnymi czujnikami przemieszczeń liniowych i czujnikiem tensometrycznym umożliwiającymi rejestrację siły jako funkcji odkształcenia (rys. 14). Wyniki badań obliczone jako wartości średnie z wyników otrzymanych na całej serii próbek, podano w tablicy 1. Uzyskane wielkości w odniesieniu do spójności c naniesiono następnie w postaci punktów na wykres teoretyczny, wykonany dla kątów ρ cha-



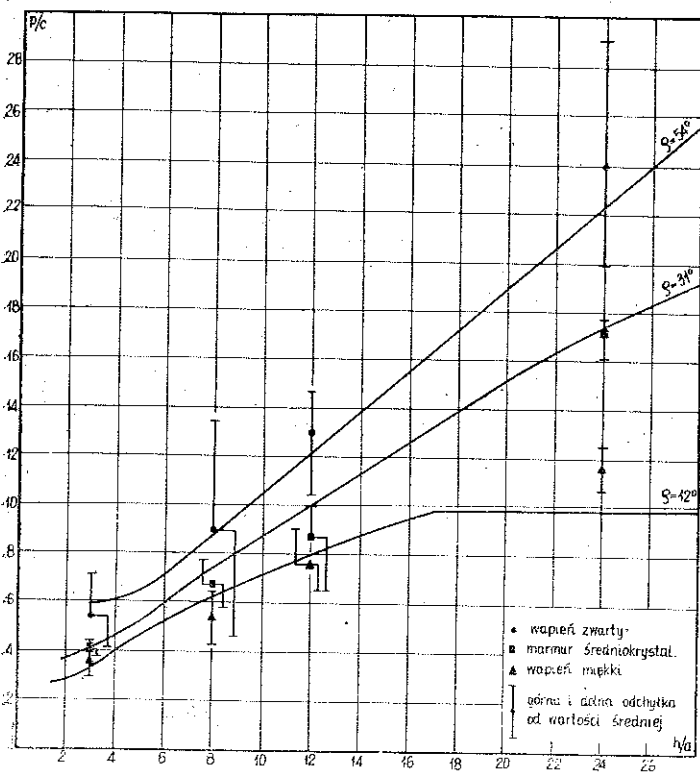
Rys. 13. Obwiednie stanu granicznego: a) wapień zwarty, b) marmur średniookrystalny, c) wapień miękki



Rys. 14. Przyrząd używany w doświadczeniach

Tablica 1. Wyniki ściskanie próbek prostopadłościennych pomiędzy stemplami

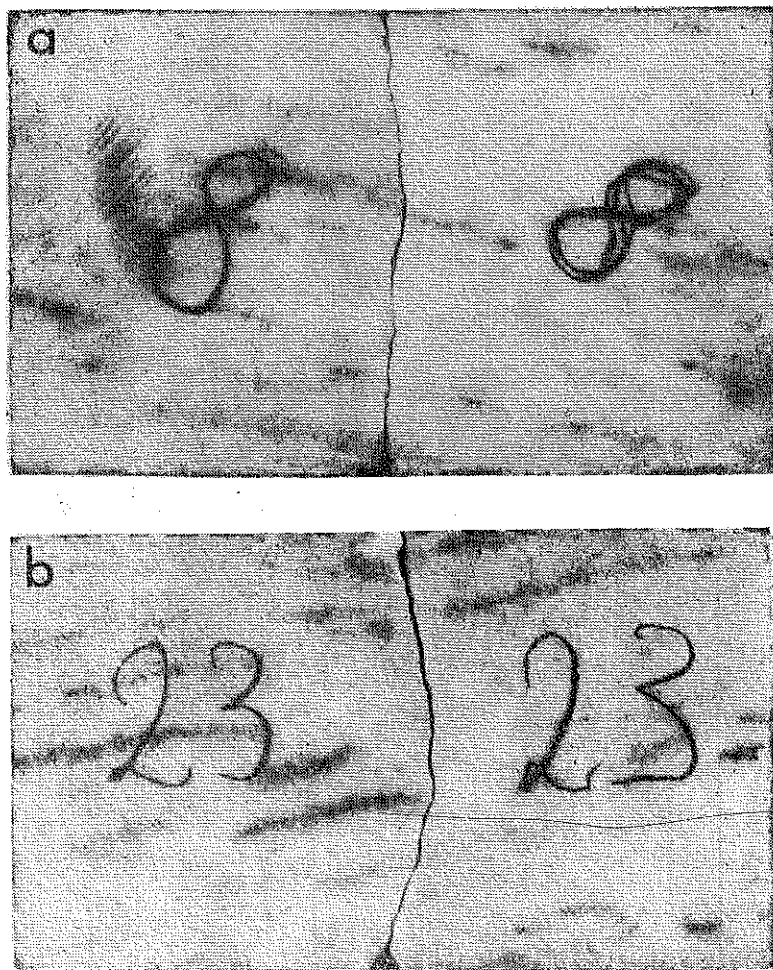
Lp.	Material	Wymiary próbek $2b \times 2h \times 2d$ mm \times mm \times mm	Liczba próbek	a/h	Nacisk graniczny p [kp/cm ²]	Nacisk graniczny p/l_j	Maksymalne odchytki od wartości średnic	
1.	Wapień	27 \times 60 \times 150	6	24	4875	24,4	+1155	-855
2.	zwarty	„	5	12	2500	12,5	+330	-530
3.		27 \times 80 \times 150	6	8	1800	9,0	+900	-890
4.		27 \times 60 \times 150	5	3	1060	5,3	+330	-265
5.	Marmur	27 \times 60 \times 150	5	24	3440	17,2	+100	-200
6.	średnio-	„	5	12	1730	8,7	+240	-430
7.	krystaliczny	27 \times 80 \times 150	5	8	1340	6,7	+210	-210
8.		27 \times 60 \times 150	5	3	800	4,0	+85	-85
9.	Wapień	27 \times 60 \times 150	5	24	476	11,8	+36	-38
10.	miękki	„	5	12	303	7,6	+57	-43
11.		27 \times 80 \times 150	5	8	217	5,4	+45	-47
12.		27 \times 60 \times 150	5	3	147	3,6	+12	-28



Rys. 15. Wyniki doświadczeń ściskania bloku materiału między płaskimi stemplami

rakteryzujących badane skały, przedstawiający zależność nacisku granicznego od stosunku h/a (rys. 15). Jak widać z rys. 15 otrzymano w zasadzie dość dobrą zgodność wyników doświadczalnych z rozwiązaniami teoretycznymi. Dla wapienia zwartego, dla którego prostoliniowy odcinek krzywej granicznej przecina oś σ pod kątem $\rho = 54^\circ$, większość punktów doświadczalnych leży ponad krzywą teoretyczną określoną tym kątem. Dla marmuru średniokrystalicznego i wapienia miękkiego punkty te leżą odpowiednio w pobliżu linii teoretycznych $\rho = 31^\circ$ i $\rho = 12^\circ$.

Przejdźmy do opisu różnych sposobów pęknięcia próbek uzależnionych, jak wynikało



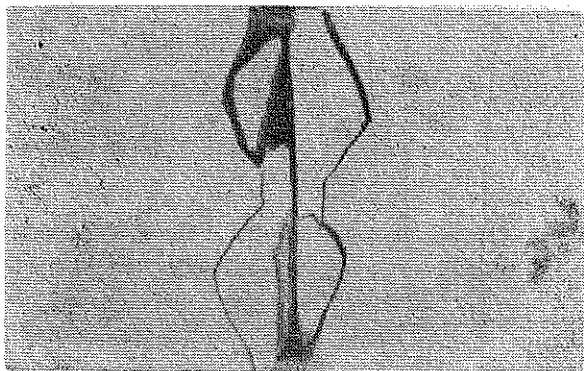
Rys. 16. Sposób pęknięcia próbek z marmuru, a) przy $h/a = 24$, b) przy mniejszych wartościach h/a

z badań, od wartości stosunku h/a . Dla marmuru średniokrystalicznego przy $h/a = 24$ płaszczyzna podziału próbki praktycznie pokrywała się z pionową osią symetrii (rys. 16a), przy $h/a = 12; 8,0; 3,0$ linia pęknięcia jest łukiem krzywej łączącym krawędzie stempli (rys. 16b). Wapień miękki dla każdej wartości h/a pękał tak jak przedstawiono

na rys. 17. Pęknięcie próbek z wapienia zwartego dla $h/a=24$; 12 zachodziło tak samo jak dla marmuru (rys. 16a) i wapienia (rys. 17), natomiast przy $h/a=8,0$ i $3,0$ mechanizm zniszczenia był odmienny; pokazano go na rys. 18. Charakterystyczne linie rozdziału próbki pojawiają się między krawędziami obu stempli, a oprócz tego następuje jej podział wzdłuż osi symetrii. Taki sam sposób pęknięcia obserwowali N. CLAUSSEN i J. JAHN przy wykonywaniu próby brazylijskiej dla walców ze spieków



Rys. 17. Sposób pęknięcia próbek z wapienia miękkiego

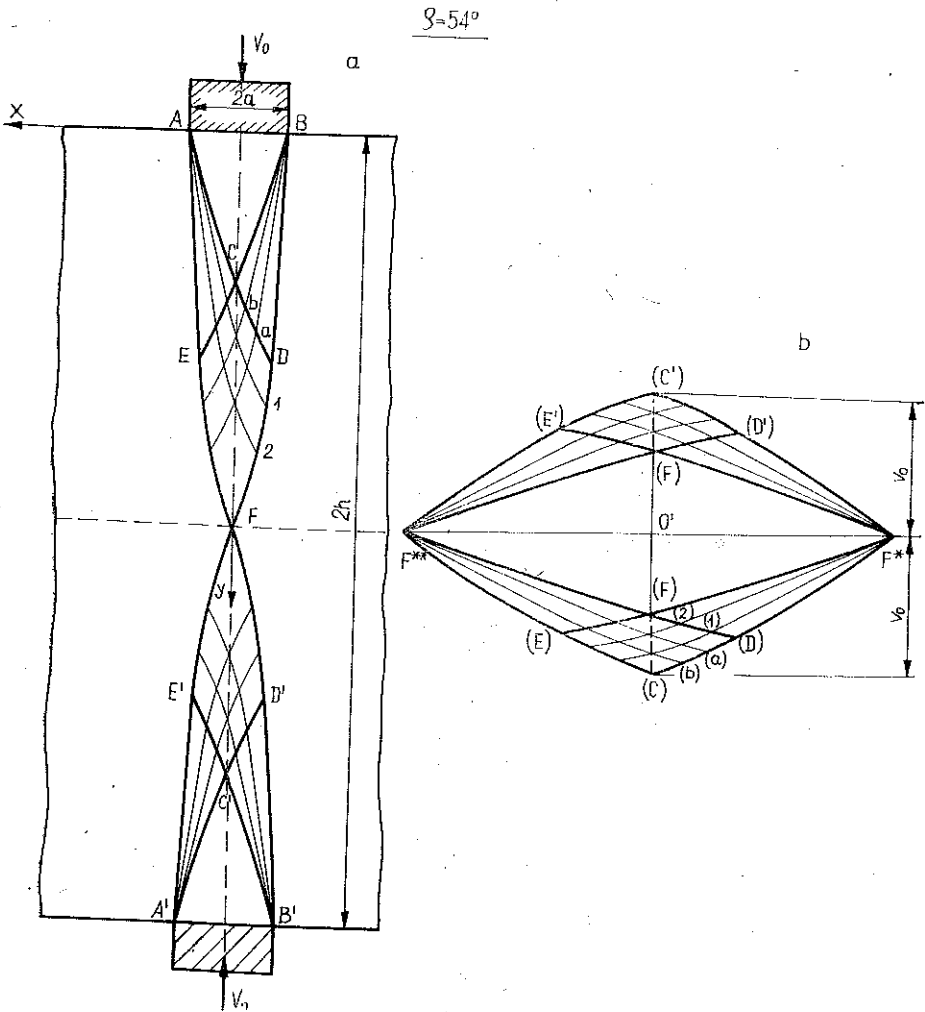


Rys. 18. Sposób pęknięcia próbek z wapienia zwartego

wolframu [11]. Podali oni również próbę wyjaśnienia tego mechanizmu, inną niż zamieszczona poniżej, którą w niniejszej pracy oparto na teorii stanów granicznych.

Rozważmy znowu proces ściskania wapienia zwartego dla $h/a=8$, przy którym pojawia się mechanizm zniszczenia pokazany na rys. 18. Wiadomo już, że obwiednia stanu granicznego jest dla tej skały odcinkiem prostym o kącie $\rho=54^\circ$ (rys. 13). Jeżeli założymy prawo płynięcia stowarzyszone z warunkiem Coulomba charakterystyki dla naprężeń i prędkości pokrywają się. Siatkę charakterystyk dla $\rho=54^\circ$ pokazano na rys. 19a. Odkształczony obszar jest ograniczony od góry charakterysty-

kami BDF i AEF , a od dołu charakterystykami $B'D'F$ i $A'E'F$. Charakterystyki te są jednocześnie liniami nieciągłości prędkości. Linie nieciągłości są zaznaczone na hodografie (rys. 19b) jako łuki $(D)(F)$, $(E)(F)$ oraz $(D')(F)$ i $(E')(F)$. Pękanie skały powinno zachodzić wzdłuż tych linii. Z porównania linii rozdziału wyznaczo-

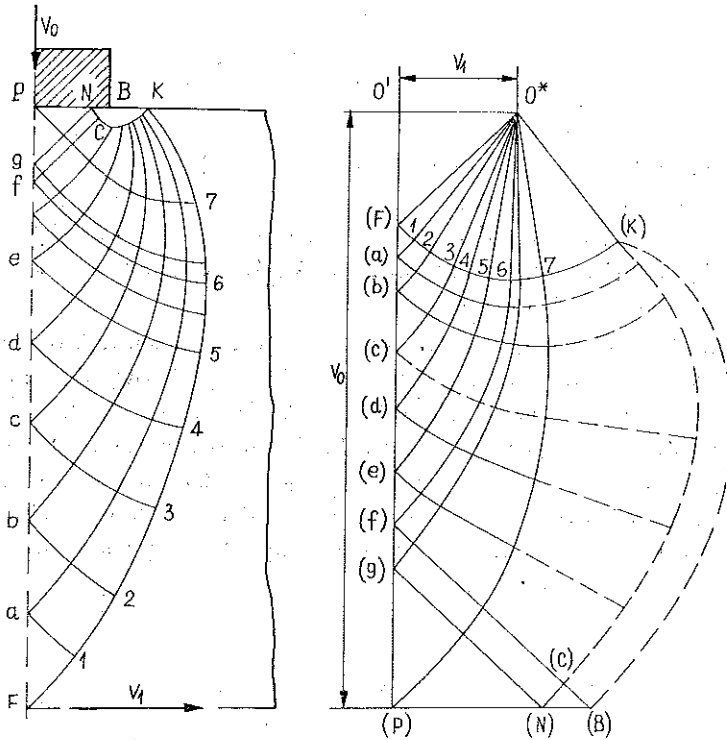


Rys. 19. Siatka charakterystyk dla naprężeń i prędkości przy założeniu stowarzyszonego prawa płynięcia dla $\rho=54^\circ$ i $h/a=8$, b) hodograf

nych teoretycznie (rys. 19a) i uzyskanych w doświadczeniach (rys. 18) widać, że nie występuje między nimi jakościowa zbieżność. Przyjęcie stowarzyszonego prawa płynięcia nie daje w tym przypadku poprawnego opisu zachowania się badanej skały w procesie odkształcenia.

Jak wykazał W. SZCZEPIŃSKI w pracy [12], lepszą zgodność pomiędzy wynikami teoretycznymi i doświadczalnymi dla rozpatrywanego procesu można uzyskać

zakładając niestowarzyszone prawo płynięcia ujęte wzorami (2.2) i (2.4). Rys. 20 zaczerpnięty z cytowanej pracy [12] przedstawia część siatki charakterystyk dla prędkości oraz odpowiadający jej hodograf. Siatkę tę można wyznaczyć wykreślnie na podstawie pola charakterystyk dla naprężeń z rys. 19a. W otoczeniu punktu B ,



Rys. 20. Siatka charakterystyk dla prędkości przy założeniu niestowarzyszonego prawa płynięcia
b) hodograf

który jest punktem osobliwym pola naprężeń, przebieg charakterystyk dla prędkości można znaleźć w przybliżony sposób. Hodograf (rys. 20b) został sporządzony przy założeniu idealnie gładkiej powierzchni styku stempla z materiałem. Linia KF oraz analogiczne linie w pozostałych trzech nie zaznaczonych na rys. 20a ćwiartkach bloku są liniami nieciągłości prędkości. Bliższe szczegóły dotyczące konstrukcji siatki charakterystyk dla prędkości i planu prędkości zawiera przytaczana praca [12]. Wyznaczone teoretycznie linie nieciągłości są teraz jakościowo zbieżne z rzeczywistymi liniami rozdziału ściskanego bloku wapienia z Morawicy.

5. ZAKOŃCZENIE

Z podanych rozważań teoretycznych oraz wyników doświadczeń wypływają wnioski mające istotne znaczenie. Przede wszystkim okazało się, że dla badanych skał jest uzasadnione podejście oparte na teorii stanów granicznych i przyjęcie warunku zniszczenia Coulomba. Ze względu na wstępny charakter eksperymentów

obejmujących niewielką liczbę próbek z trzech rodzajów skał potwierdzenie tego wniosku wymaga dalszych badań, rozszerzonych na inne skały lub inne materiały kruche. Ciekawym rezultatem poznawczym jest uzyskanie zbieżności pomiędzy rzeczywistym sposobem pęknięcia jednej ze skał, a pękaniem przewidywanym przez teorię. Stwierdzono, że zbieżność tę otrzymuje się przy przyjęciu prawa płynięcia niestowarzyszonego z warunkiem Coulomba.

Bezpośrednie zastosowanie praktyczne może mieć analiza mechanizmu lokalnego wykruszenia skał przy nacisku stemplem. Jak wynika z podanych wyżej rozwiązań w przypadku znacznej wysokości bloku dla $(h/a) > (h/a)^*$ proces przebiega przy największej możliwej do osiągnięcia wielkości nacisku granicznego. Powstaje wtedy lokalny mechanizm wykruszania. Mechanizm taki, niekorzystny ze względu na straty energii, występuje czasem w kruszarkach przy podawaniu do ich przestrzeni roboczych zbyt dużych bloków skał. Stąd wynika ważne zagadnienie kształtowania płyt naciskających w tych urządzeniach.

Z analizy doświadczalnej wynikły również pewne problemy, które nie zostały wyjaśnione. Jeden z nich dotyczy wpływu stosunków wymiarowych stempla i bloku na powstawanie różnych mechanizmów pęknięcia. Nieznana jest także przyczyna występowania dwóch różnych sposobów pęknięcia próbki, jak pokazano na rys. 18. Nie wiemy również dlaczego dla pewnych rodzajów badanych skał (wapień miękki) pojawia się zawsze jeden mechanizm pęknięcia, a dla innych rodzajów (marmur, wapień zwarty) obserwuje się różne mechanizmy. Rozstrzygnięcie wymienionych kwestii wymaga dodatkowych badań.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, PWN, 1967.
2. W. SZCZEPIŃSKI, *Stany graniczne i kinematyka ośrodków sypkich*, PWN, 1974.
3. J. ZAWADA, *Studium procesu kruszenia skał*, Praca doktorska, Politechnika Warszawska, 1972.
4. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, 1958.
5. J. F. BISHOP, *On the complete solution to problems of deformation of plastic rigid material*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 43-53, 1953.
6. J. SALENÇON, *Sur le prolongement statique des champs de Prandtl pour le matériau de Coulomb*, Arch. Mech. Stos., 25, 4, 646-648, 1973.
7. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.
8. W. SZCZEPIŃSKI, *Indentation of a plastic block by two opposite narrow punches*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 14, 671-676, 1966.
9. J. SUPEL, J. ZAWADA, *Badania niektórych skał krajowych metodą trójosiowego ściskania*, Rozpr. Inżyn., 20, 2, 283-299, 1972.
10. J. ZAWADA, J. SUPEL, *Przybliżona metoda wyznaczania parametrów wytrzymałościowych skał*, Rozpr. Inżyn., 22, 1, 43-54, 1974.
11. N. CLAUSSEN, J. JAHN, *Green strength of metal and ceramic compacts as determined by the indirect tensile test*, Powder Metallurgy International, 2, 3, 87-90, August 1970.
12. W. SZCZEPIŃSKI and J. ZAWADA, *A note on a fracture mode of certain rocks under compression*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 23, 6, 267-273, 1975.

Резюме

АНАЛИЗ СЖАТИЯ БЛОКА МАТЕРИАЛА МЕЖДУ ПЛОСКИМИ ШТАМПАМИ

В работе проведен анализ процесса сжатия блока материала, как среды Кулона, между соосными плоскими штампами. Предположено, что процесс происходит в условиях плоского деформационного состояния. Решения получены опираясь на теорию предельных состояний. Проведенные исследования, для трех родов отечественных пород, показали довольно хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Сделан вывод, что методы теории предельных состояний могут оказаться пригодными при рассмотрении вопросов дробления пород.

SUMMARY

ANALYSIS OF COMPRESSION OF THE BLOCK OF MATERIAL BETWEEN TWO PLANE PUNCHES

Analysis of the process of compression of the block of material treated as Coulomb material, between two coaxial plane punches is performed. It was assumed that during the process of deformation the plane state of strain is realized. A theory of limit analysis is used to the solution of this problem. An examination performed on three kind of native rocks has shown sufficiently good agreement of theoretical and experimental results. It is concluded that the methods of limit analysis may be usefull in solving the problems of rocks crumbling.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 stycznia 1976 r.
