

## PLASKI PROCES PLASTYCZNEGO PŁYNIĘCIA MATERIAŁU NACINANEGO SZTYWNYM STEMPLEM W KSZTAŁCIE KLINA\*)

MACIEJ HAWRYSZ (WROCLAW)

W pracy przedstawiono kinematycznie dopuszczalne rozwiązanie procesu wciskania stempla, w kształcie klina, w plastyczną półprzestrzeń. Rozważane zagadnienie należy do procesów niestacjonarnych zachowujących geometryczne podobieństwo siatki linii poślizgu. Rozwiązanie stanu naprężenia i deformacji przeprowadzono dla różnie formułowanych warunków tarcia na kontakcie materiał — narzędzie.

### 1. WSTĘP

Proces nacinania półprzestrzeni plastycznej stemplem w kształcie klina jest procesem niestacjonarnym. W procesie tym stan naprężenia jak i prędkości płynięcia materiału są zmienne w czasie względem dowolnie przyjętego układu współrzędnych. Ta zmienność parametrów procesu w czasie znacznie utrudnia jego analizę, którą należałoby prowadzić stopniowo krok po kroku.

Istnieje jednak pewna klasa procesów niestacjonarnych, których szczególne cechy ułatwiają tę analizę. Rozpatrywany tu proces należy do klasy procesów samopodobnych, tzn. że jego cechą ułatwiającą rozwiązanie jest geometryczne podobieństwo siatki linii poślizgu w całym procesie.

Zagadnienie to dla symetrycznego klina przy pominięciu tarcia na ścianach współpracujących z materiałem oraz dla poziomej początkowo powierzchni materiału rozwiązaali R. HILL, E. H. LEE i S. J. TUPPER w pracy [1].

Podobny proces wciskania klinowatego stempla o wypukłych («krzywoliniowych») ścianach bocznych analizowali G. I. BYKOWCEW i D. D. IWLEW w pracy [2]. Analizę pola naprężeń początkowego procesu skrawania (z materiałem współpracuje tylko jedna ściana klina) znaleźć można w pracy E. H. LEE [3]. Niektóre wyniki badań eksperymentalnych (uwzględniające zjawisko tarcia), dotyczących tego problemu, znajdują się w publikacjach [4 i 5].

Niniejsza praca stanowi uogólnienie wspomnianych rozwiązań na przypadek niesymetryczny dla różnie przyjmowanych warunków współpracy dla kontaktu materiał — narzędzie. W pierwszej części pracy, nazwanej umownie rozwiązaniem

---

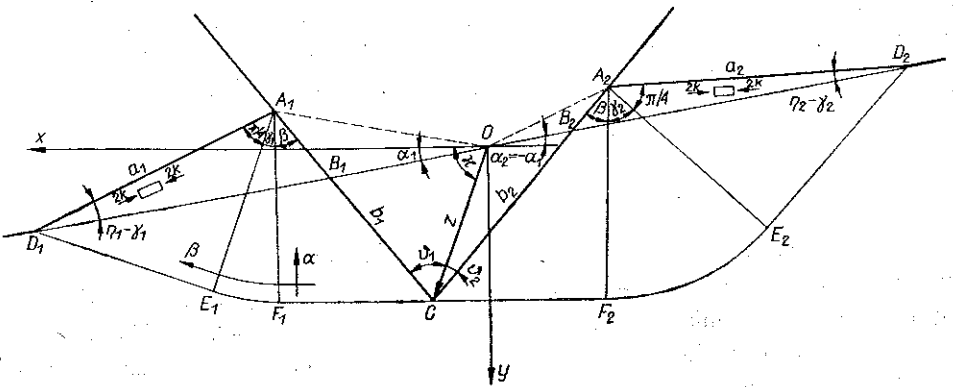
\* Praca została wykonana w czasie rocznego stazu autora w Pracowni Badań Doświadczalnych Plastyczności IPPT-PAN.

podstawowym, analizowany jest proces, w którym pole naprężeń jest ciągle. Druga część (rozwiązanie zmodyfikowane) to analiza procesu, dla którego w rozwiązaniu podstawowym pojawiła by się w polu naprężeń linia nieciągłości.

## 2. ROZWIĄZANIE PODSTAWOWE

### 2.1. Założenia i oznaczenia

Badany jest proces wciskania sztywnego klina o kącie wierzchołkowym  $\vartheta_1 + \vartheta_2$  (rys. 1) w ośrodek idealnie sztywno plastyczny o granicy plastyczności  $k$ . Dla analizy procesu przyjmujemy, iż siły bezwładności są pomijalne, a zatem proces ma charakter quasi-statyczny.



Rys. 1

W przedstawionym rozwiązaniu przyjęto umowę, że naprężenia ściskające są dodatnie, co nie powinno mieć istotnego znaczenia, ponieważ w analizowanym procesie tylko takie naprężenia mają miejsce. Charakter odkształceń materiału w tym procesie nie ulega zmianie w czasie, zmianie ulegają tylko wymiary proporcjonalnie do zagłębienia  $z$ , którym można mierzyć stopień zaawansowania tego procesu. Takie procesy nazywane są procesami samopodobnymi. Po obu stronach klina następuje lokalne wypchnięcie materiału ponad początkową powierzchnię.

Założmy, iż materiał jest nieściśliwy, co nie będzie sprzeczne z przyjęciem stowarzyszonego prawa płynięcia dla wyznaczenia kinematyki zadania. Założmy ponadto, że brzeg swobodny wypchniętego materiału jest linią prostą w całym procesie. Założenie to jest poprawne, ponieważ, jak pokażemy, zbudowane na jego podstawie rozwiązanie części kinematycznej zadania spełnia wszystkie warunki procesu.

Konieczne jest także założenie, iż podział materiału współpracującego z każdą ze ścian klina odbywa się wzdłuż trajektorii ruchu ostrza klina. Inaczej mówiąc, nie zakłada się przepływu materiału przez trajektorię ruchu ostrza, co wydaje się założeniem naturalnym przy braku ruchu materiału jako całości.

Przy powyższych założeniach należy zauważyć, iż możliwe jest rozpatrywanie procesu oddzielnie dla każdej ze ścian klina: proces zapoczątkowany po dodatniej stronie osi  $x$  (indeksy 1) rozwija się niezależnie od procesu zapoczątkowanego po ujemnej stronie osi  $x$  (indeksy 2).

Oto następujące parametry zadania:

$\vartheta_1, \vartheta_2$  oznaczają odchylenia ścian klina od kierunku zagłębienia,  $\alpha_1, \alpha_2$  kąt nachylenia powierzchni nieodkształconej materiału do osi  $x$ ,  $\kappa$  — kąt odchylenia kierunku zagłębienia klina od osi  $x$ . Na rozwiązanie wpływać będą warunki tarcia na styku klin—materiał (grunt).

Za dodatnie wartości powyższych parametrów będziemy uważali te, które zgodne są z kierunkami zaznaczonymi na rys. 1. Warto zauważyć, że współpracę danej ściany klina z materiałem określa dodatnia wartość kąta  $\vartheta$ . Dla zachowania charakteru procesu (wciskanie klina) należy dokonywać wyboru parametrów zadania tak, aby spełnione były nierówności

$$(2.1) \quad \vartheta_1 < \pi - \kappa + \alpha_1, \quad \vartheta_2 < \kappa + \alpha_2.$$

Zapewnia to dodatnią wartość kątów  $OB_1C$  i  $OB_2C$ .

Konieczne jest także ograniczenia kąta nachylenia  $\kappa$ :

$$(2.2) \quad \alpha_1 < \kappa < \pi - \alpha_2.$$

## 2.2. Rozwiązanie stanu naprężenia

Rozwiązanie znajdziemy tylko dla jednej strony klina, ponieważ drugą można rozwiązać zgodnie z tym, co powiedziano poprzednio, niezależnie i w podobny sposób. Charakter siatki linii poślizgu jest identyczny z przyjmowanym w cytowanych na początku pracach. Siatka składa się z dwu trójkątów prostokątnych  $A_1 D_1 E_1$  (zadanie brzegowe Cauchy'ego),  $A_1 F_1 C$  (zadanie mieszane — warunki tarcia) oraz wycinka biegunowego  $A_1 F_1 E_1$  o kącie wierzchołkowym  $\gamma_1$  (zdegenerowane zadanie charakterystyczne).

Dla jednoznacznego określenia wymiarów siatki charakterystyk przy danym stopniu zaawansowania procesu (wartości  $z$ ) konieczne jest wyznaczenie następujących wielkości:

$$a_1 = A_1 D_1, \quad b_1 = A_1 C, \quad \gamma_1, \quad \beta.$$

Kąt  $\beta$  w trójkącie  $A_1 F_1 C$  otrzymamy z zależności określających warunki tarcia na ścinanie klina, co dokładnie omówimy dalej. Zależność między  $a_1$  i  $b_1$  otrzymujemy z zależności geometrycznych w siatce charakterystyk:

$$(2.3) \quad b_1 = \frac{\cos \pi/4}{\cos \beta} a_1 = n a_1.$$

Żądając, aby punkt  $D_1$  pozostawał w czasie procesu na powierzchni nieodkształconej materiału, korzystając z twierdzenia sinusów dla trójkątów  $OA_1 B_1$  i  $OB_1 C$  i z równości

$$A_1 B_1 + B_1 C = b_1,$$

otrzymamy

$$(2.4) \quad \frac{z \sin(\kappa - \alpha_1) + a_1 \sin(\eta_1 - \gamma_1)}{\sin(\vartheta_1 + \kappa - \alpha_1)} = na_1,$$

gdzie

$$\eta_1 = \vartheta_1 + \kappa - \alpha_1 - \beta - \pi/4.$$

W myśl poprzednich założeń (nieściśliwość, podział materiału) pola trójkątów  $A_1OD$  i  $A_1OC$  powinny być równe. Stąd otrzymamy brakujące równanie

$$1/2 \cdot OD \cdot a_1 \sin(\eta_1 - \gamma_1) = \frac{a_1 z \cos \frac{\pi}{4} \sin \vartheta_1}{2 \cos \beta},$$

stąd

$$(2.5) \quad a_1 \sin(\eta_1 - \gamma_1) \frac{na_1 \sin \vartheta_1 - a_1 \sin[\eta_1 - \gamma_1 - (\kappa - \alpha_1)]}{\sin(\kappa - \alpha_1)} = na_1 z \sin \vartheta_1.$$

Równania (2.3), (2.4), (2.5) stanowią podstawowy układ równań, który można sprowadzić do jednego równania

$$(2.6) \quad 2n \sin \vartheta_1 (\eta_1 - \gamma_1) - \sin(\eta_1 - \gamma_1) \sin[\eta_1 - \gamma_1 - (\kappa - \alpha_1)] - n^2 \sin \vartheta_1 \sin(\vartheta_1 + \kappa - \alpha_1) = 0.$$

Końcowe równanie dla drugiej strony klina otrzymamy podstawiając

$$\kappa_2 = \pi - \kappa, \quad \alpha_2 = -\alpha_1.$$

Zatem dla drugiej strony mamy równanie

$$(2.7) \quad 2n \sin \vartheta_2 \sin(\eta_2 - \gamma_2) - \sin(\eta_2 - \gamma_2) \sin[\eta_2 - \gamma_2 - (\kappa_2 - \alpha_2)] - n^2 \sin \vartheta_2 \sin(\vartheta_2 + \kappa_2 - \alpha_2),$$

gdzie

$$\eta_2 = \vartheta_2 + \pi - \kappa + \alpha_1 - \beta - \pi/4.$$

Niewiadome  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  wyznaczone z równań (2.6) i (2.7) będą przydatne dla naszego zadania, jeśli spełnią następujące warunki:

$$(2.7') \quad 0 \leq \gamma_1 < \eta_1, \quad 0 \leq \gamma_2 < \eta_2.$$

Zapewni to ciągłość pola naprężeń.

Wyznaczanie wartości kąta  $\beta$ , koniecznej do rozwiązania równań (2.6) i (2.7), zależy od sposobu przyjęcia warunków współpracy na styku narzędzie — materiał [7, 8, 9]. Najczęściej przyjmuje się warunki tarcia w postaci

przypadek a

$$(2.8) \quad \tau_{nt} = k \sin 2\delta,$$

przy czym  $\delta \leq \pi/4$ ,

przypadek b

$$(2.9) \quad \tau_{nt} = 2\mu k,$$

przy czym  $\mu \leq 0,5$ ,

przypadek c

$$(2.10) \quad \tau_{nt} = \mu^* \sigma_n.$$

Rozwiązania przedstawione w tej pracy obejmują każdy z przytoczonych tu warunków tarcia.

Rysunek 2 przedstawia graficzną interpretację wymienionych powyżej warunków tarcia w dość szczególnej sytuacji kiedy dla wszystkich przypadków na ścianie klina mamy jednakowy rozkład naprężeń.

Opierając się na wzorach określających składowe naprężeń wzdłuż np. lewych ścian klina

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma_n^{(1)} &= k [2\chi_1^{(1)} + \cos 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1)], \\ \tau_{nt}^{(1)} &= k \sin 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1), \end{aligned}$$

gdzie  $\psi_1$  oznacza kąt między kierunkiem normalnej do ściany a osią  $x$ ,  $\chi_1^{(1)}$  i  $\varphi_1^{(1)}$  niewiadome dla lewej ściany klina (rys. 2), można wyznaczyć  $\varphi_1^{(1)}$  i  $\beta$  dla przypadków a i b.

dla a

$$(2.12) \quad \varphi_1^{(1)} = \vartheta_1 + \kappa + \delta - \pi/2, \quad \beta = \pi/4 - \delta;$$

dla b

$$(2.13) \quad \varphi_1^{(1)} = \vartheta_1 + \kappa + \frac{\arcsin 2\mu}{2} - \pi/2, \quad \beta = \frac{\arcsin 2\mu}{2}.$$

Przypadki a i b nie różnią się jakościowo, a wartości  $\mu$  i  $\delta$  związane są równością

$$(2.14) \quad \delta = \frac{\arcsin 2\mu}{2}.$$

Przyjęcie warunków tarcia w postaci (2.10) komplikuje rozwiązanie zadania, gdyż następuje zmiana niewiadomych. W tym przypadku niewiadomymi są następujące wielkości: tak jak poprzednio  $a_1$ ,  $b_1$  oraz kąty  $\varphi$  na brzegu  $A_1 D_1 - \varphi_0^{(1)}$  i na ścianie  $A_1 C - \varphi_1^{(1)}$ . Trzy pierwsze równania otrzymamy podobnie jak równania (2.3), (2.4), (2.5). A po wyrugowaniu z nich  $a_1$  i  $b_1$  otrzymamy równanie

$$(2.15) \quad 2m \sin \vartheta_1 \sin(\varphi_0^{(1)} - \alpha_1) - \sin(\varphi_0^{(1)} - \alpha_1) \sin(\varphi_0^{(1)} - \kappa) - m^2 \cdot \sin \vartheta_1 \sin(\vartheta_1 + \kappa - \alpha_1) = 0,$$

gdzie

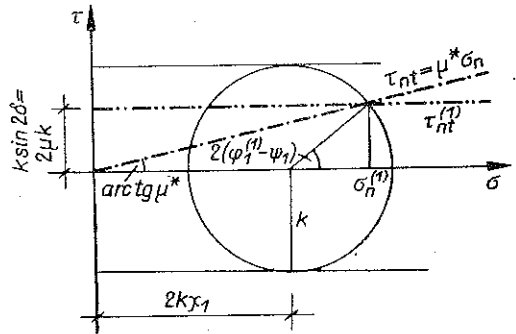
$$m = \frac{\cos \pi/4}{\cos(\vartheta_1 + \kappa - \varphi_1^{(1)} - \pi/4)} = \frac{\cos \pi/4}{\cos(\psi_1 - \varphi_1^{(1)} + \pi/4)}.$$

Brakującym równaniem będzie warunek tarcia, który otrzymamy wykorzystując zależności wzdłuż charakterystyki  $\beta$  oraz równanie (2.11). Z równania (2.11) mamy

$$(2.16) \quad 2\mu^* \chi_1^{(1)} = \sin 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1) - \mu^* \cos 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1),$$

gdzie

$$\psi_1 = \vartheta_1 + \kappa - \pi/2.$$



Rys. 2

Zależności wzdłuż charakterystyki  $\beta$  mają postać

$$\chi_0^{(1)} - \varphi_0^{(1)} = \chi_1^{(1)} - \varphi_1^{(1)},$$

gdzie indeksy „0” oznaczają wartości  $\chi$  i  $\varphi$  na brzegu swobodnym a indeksy „1” wartości  $\chi$  i  $\varphi$  na ścianie klina. Jeżeli przyjmiemy

$$\chi_0^{(1)} = 0,5, \quad \varphi_1^{(1)} = \varphi_0^{(1)} + \gamma_1,$$

to otrzymamy

$$(2.17) \quad \chi_1^{(1)} = 0,5 + \gamma_1.$$

Po podstawieniu (2.17) do równania (2.16) i pamiętając, że

$$(2.18) \quad \gamma_1 = \varphi_1^{(1)} - \varphi_0^{(1)},$$

otrzymamy czwarte równanie układu podstawowego:

$$(2.19) \quad \sin 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1) = \mu^* [1 + 2(\varphi_1^{(1)} - \varphi_0^{(1)}) + \cos 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1)].$$

Równania (2.15) i (2.19) tworzą układ równań z niewiadomymi  $\varphi_0^{(1)}$  i  $\varphi_1^{(1)}$ . Układ ten dla lewej ściany przedstawia się następująco

$$(2.20) \quad 2 \frac{\cos \pi/4}{\cos(\psi_1 - \varphi_1^{(1)} + \pi/4)} \sin \vartheta_1 \sin(\varphi_0^{(1)} - \alpha_1) - \sin(\varphi_0^{(1)} - \alpha_1) \sin(\varphi_0^{(1)} - \kappa) - \\ - \left[ \frac{\cos \pi/4}{\cos(\psi_1 - \varphi_1^{(1)} + \pi/4)} \right]^2 \sin \vartheta_1 \sin(\vartheta_1 + \kappa - \alpha_1) = 0, \\ 2\varphi_0^{(1)} = 1 + 2\varphi_1^{(1)} + \cos 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1) - \frac{1}{\mu^*} \sin 2(\varphi_1^{(1)} - \psi_1).$$

Pierwiastki powyższego układu równań będą dla nas przydatne, jeśli spełnią następujący warunek:

$$\alpha < \varphi_0 \leq \varphi_1 \leq \psi.$$

Dla prawej ściany klina równanie (2.20) otrzymamy zmieniając odpowiednie indeksy oraz wykonując podstawienia

$$\kappa_2 = \pi - \kappa, \quad \alpha_2 = -\alpha_1.$$

### 2.3. Rozkład naprężenia na ścianach klina. Siły i momenty

Naprężenia  $\sigma_n$  i  $\tau_{nt}$  pojawiające się na ścianach klina określimy ze wzorów (2.11) zastępując potrzebną wartość  $\chi_1$  przez (2.17) oraz nadając  $\varphi_1$  wartość odpowiednią do przyjętego warunku tarcia. Tak np. rozkłady naprężeń wzdłuż ścian klina dla przypadków a i b będą następujące:

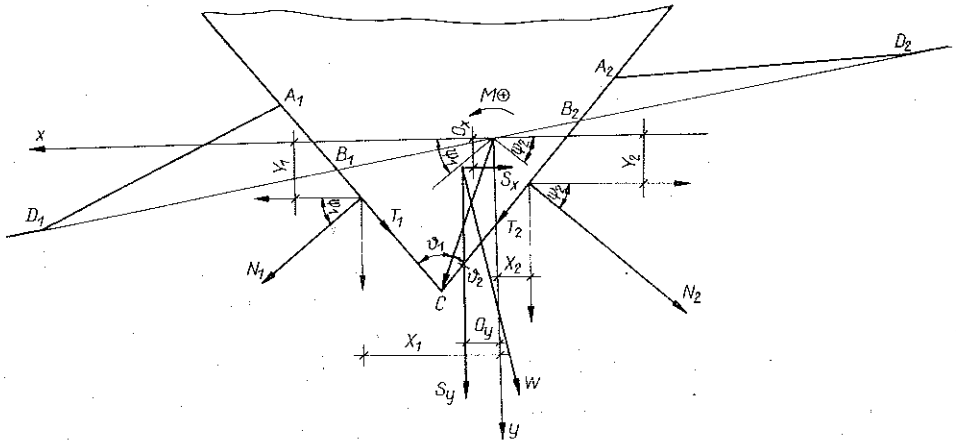
dla przypadku a

$$(2.21) \quad \sigma_n = k [1 + 2\gamma + \cos 2\delta], \quad \tau_{nt} = k \sin 2\delta;$$

dla przypadku b

$$(2.22) \quad \sigma_n = k [1 + 2\gamma + \cos(\arcsin 2\mu)], \quad \tau_{nt} = 2\mu k.$$

Ponieważ dla wszystkich przypadków warunków tarcia na ścianie otrzymamy z rozwiązań stałe wartości na  $\chi_1$  i  $\varphi_1$ , przeto rozkład naprężeń na ścianach klina będzie stały i wyznaczenie sił przypadających na jednostkę szerokości ścian nie



Rys. 3

przedstawia trudności. Na rys. 3 przedstawiono rozmieszczenie (i oznaczenia) sił, które należy wyznaczyć:

$$(2.23) \quad N_1 = \sigma_n^{(1)} b_1, \quad T_1 = \tau_{nt}^{(1)} b_1, \quad N_2 = \sigma_n^{(2)} b_2, \quad T_2 = \tau_{nt}^{(2)} b_2.$$

Składowe siły wypadkowej równoległej do osi współrzędnych  $S_x$  i  $S_y$  oraz wypadkową  $W$  można wyznaczyć z następujących wzorów:

$$(2.24) \quad \begin{aligned} S_x &= N_1 \cos \psi_1 - T_1 \sin \psi_1 - N_2 \cos \psi_2 + T_2 \sin \psi_2, \\ S_y &= N_1 \sin \psi_1 + T_1 \cos \psi_1 + N_2 \sin \psi_2 + T_2 \cos \psi_2, \\ W &= \sqrt{S_x^2 + S_y^2}. \end{aligned}$$

Współrzędne punktów przyłożenia sił  $N$  i  $T$  na odpowiednich ścianach klina są następujące:

$$(2.25) \quad X_1 = z \cos \kappa + 1/2 b_1 \sin \varphi_1, \quad Y_1 = z \sin \kappa - 1/2 b_1 \cos \psi_1;$$

$$(2.26) \quad X_2 = z \cos \kappa - 1/2 b_2 \sin \psi_2, \quad Y_2 = z \sin \kappa - 1/2 b_2 \cos \psi_2.$$

Przyjmując umowę dotyczącą znaku momentów (por. rys. 2), znajdziemy

$$(2.27) \quad \begin{aligned} M_x &= -(N_1 \cos \psi_1 - T_1 \sin \psi_1) Y_1 + (N_2 \cos \psi_2 - T_2 \sin \psi_2) Y_2, \\ M_y &= (N_1 \sin \psi_1 + T_1 \cos \psi_1) X_1 + (N_2 \sin \psi_2 + T_2 \cos \psi_2) X_2, \\ M &= M_x + M_y. \end{aligned}$$

Znając siły i momenty możemy określić położenie punktu zaczepienia siły wypadkowej. Oznaczając odległość tego punktu od osi  $x$  przez  $0x$ , a od osi  $y$  przez  $0y$ , znajdziemy

$$(2.28) \quad 0x = -\frac{M_x}{S_x}, \quad 0y = \frac{M_y}{S_y},$$

## 2.4. Kinematyczna część rozwiązania

Sprawdźmy teraz, czy pole prędkości odpowiadające przyjętej siatce linii poślizgu spełnia kinematyczne warunki zadania. Wzdłuż linii styku  $A_1 C$  i  $A_2 C$  składowe normalne prędkości płynięcia muszą być równe normalnym składowym ruchu klina, dla lewej ściany wynosi ona  $V_0 \sin \vartheta_1$ , dla prawej  $V_0 \sin \vartheta_2$ .

Drugi warunek otrzymujemy wzdłuż linii poślizgu  $CF_1 E_1 D_1$  i  $CF_2 E_2 D_2$ ; są one liniami nieciągłości prędkości, ponieważ obszar leżący poniżej jest nieruchomy. Stąd z równań Geirinegra dla całego pola  $ADEFC$  mamy  $V_\alpha = 0$  i  $V_\beta = \text{const}$ ,

przy czym  $V_\beta^{(1)} = V_0 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \beta}$  w polu  $A_1 D_1 E_1 F_1 C$  oraz  $V_\beta^{(2)} = V_0 \frac{\sin \vartheta_2}{\cos \beta}$  w obszarze  $A_2 D_2 E_2 F_2 C$ . Wynika stąd, że trójkąt  $AFC$  przesuwa się jako ciało sztywne w kierunku  $FC$ , a trójkąt  $ADE$  w kierunku  $DE$  oraz że swobodny brzeg  $AD$  przemieszcza się równoległe do swojego poprzedniego położenia, co potwierdza niesprzeczność przyjętego przez nas założenia o prostoliniowości tego brzegu.

Zauważmy, że  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  w trakcie całego procesu nie ulegają zmianie przy zadanych parametrach zadania, co wynika z równań (2.6) i (2.7). Zatem ściany klina muszą przemieszczać się równoległe. Zapewnia to stały rozkład prędkości wzdłuż tych ścian (brak obrotów).

Biorąc jeszcze pod uwagę warunek (2.1) otrzymujemy dla naszego zadania dopuszczalną klasę wymuszonych prędkości klina  $V_0$ .

## 2.5. Wyznaczanie odkształcenia regularnej siatki prostokątnej

Dla wyznaczenia odkształceń regularnej siatki prostokątnej związanej z ciałem nieodkształconym najlepiej posłużyć się metodą podaną w pracy [1] (metoda tzw. «płaszczyzny jednostkowej»). Metoda ta jest opisana w książce W. SZCZEPIŃSKIEGO [8] i jej szczegóły nie będą tu omawiane.

Powstaje kwestia udowodnienia istnienia takiej płaszczyzny jednostkowej dla klasy zadań tu rozpatrywanych. Dowód ten przeprowadzimy dla jednej ściany klina, co nie umniejsza jego ogólności.

Płaszczyzna jednostkowa istnieje, jeśli hodograf wrysowany do wykresu rozwiązania statycznego w sposób taki, że prędkość  $V_0$  pokrywa się z zagłębieniem z zajmie taką pozycję, że koniec wektora prędkości  $OS_1 = V_0 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \beta}$  będzie leżał na ścianie klina, a koniec wektora  $OT_1 = V_0 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \beta}$  znajdzie się na przedłużeniu odcinka  $A_1 D_1$  (rys. 4). Innymi słowy, chcemy dowieść, że istnieją bieguny trajektorii ruchu punktów w płaszczyźnie jednostkowej. Jeśli punkty  $T_1$  i  $S_1$  są skrajnymi biegunami (rys. 4), to dla punktu  $S_1$  musi zachodzić równość

$$(2.29) \quad OS_1 = z \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \beta}.$$

Równość ta wynika z twierdzenia sinusów dla trójkąta  $OS_1 C$ .





równoległego do  $D_1 E_1$ . Materiał zawarty w obszarze  $OG_1 E_1 F_1$  znajduje się w końcu w obszarze  $A_1 S_1 F_1 E_1$ . Stan jego odkształcenia jest bardziej złożony niż w obu trójkątach.

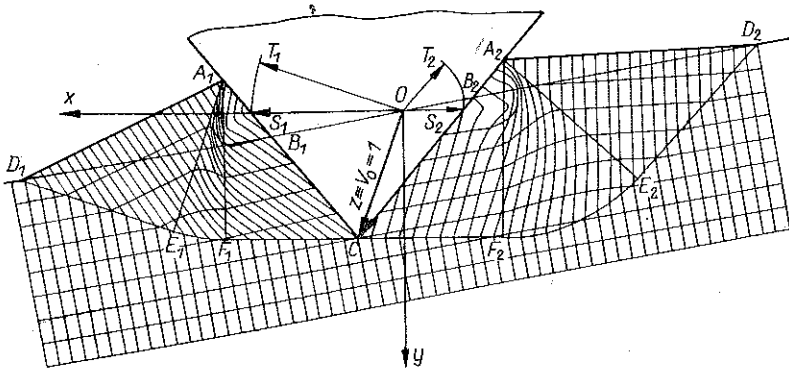
### 2.6. Przykład

Dla przykładu rozwiązano zadanie, w którym przyjęto następujące wartości parametrów:  $\vartheta_1 = 60^\circ$ ,  $\vartheta_2 = 20^\circ$ ,  $\kappa = 70^\circ$ ,  $\alpha_1 = 10^\circ$ ,  $\mu = 0,1 \equiv \delta = 5^\circ 46'$ . Rozwiązując równania (2.6), (2.7) i (2.13) otrzymano wartości  $\beta = 39^\circ 14'$ ,  $\gamma_1 = 10^\circ 50'$  i  $\gamma_2 = 48^\circ 58'$  spełniające ograniczenia (2.7). Stąd

$$\begin{aligned} a_1 &= 1,669 \text{ z}, & a_2 &= 1,849 \text{ z}, \\ b_1 &= 1,523 \text{ z}, & b_2 &= 1,688 \text{ z}. \end{aligned}$$

Następnie korzystając ze wzorów (2.22) – (2.28), wyliczono

$$\begin{aligned} S_x &= -1,6299 \text{ kz}, & W &= 7,2958 \text{ kz}, \\ S_y &= 7,1115 \text{ kz}, \\ M_x &= 0,2945 \text{ kz}^2, \\ M_y &= 1,5164 \text{ kz}^2, & M &= 1,8109 \text{ kz}^2, \\ O_x &= 0,19807 \text{ z}, & O_y &= 0,2132 \text{ z}. \end{aligned}$$



Rys. 5

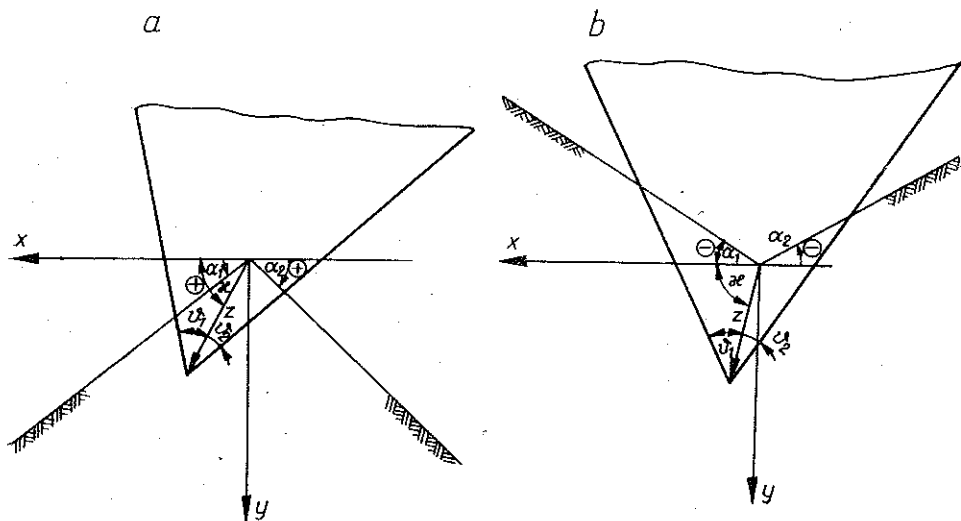
Na rys. 5 przedstawiono deformację regularnej siatki prostokątów związanej z ciałem nieodkształconym. Zdeformowaną siatkę otrzymano na płaszczyźnie jednostkowej całkując graficznie równanie.

$$(2.31) \quad \ln \frac{z}{z_0} = \int_0^s \frac{ds}{f(s)},$$

gdzie  $z_0$  oznacza zagłębienie klina, przy którym obszar odkształcenia plastycznego dochodzi do rozpatrywanego węzła siatki,  $f(s)$  — odległość naszego węzła od bieżąca odpowiadającego jego położeniu.

2.7. Niektóre przypadki szczególne rozwiązania

Rozpatrywaliśmy dotychczas proces wciskania sztywnego klina w półprzestrzeń bez załamań powierzchni. Wykorzystując rozwiązanie podstawowe, można śledzić proces w przypadku nacinania półprzestrzeni ograniczonej dwiema nachylonymi względem siebie płaszczyznami. Dwa przykłady takiego rozwiązania, gdy proces rozpoczyna się wzdłuż styku tych płaszczyzn, przedstawiono na rys. 6.



Rys. 6

Podobnie jak i poprzednio można skonstruować rozwiązanie niezależnie dla prawej i lewej ściany klina. Na rys. 6 przedstawiono znaki wartości kątów  $\alpha$ , jakie należy przyjąć. Należy wspomnieć, że wszystkie wyszczególnione wyżej ograniczenia pozostają w mocy.

Inną możliwość zastosowania rozwiązania podstawowego stwarza proces skrawania w jego początkowej fazie. Wówczas z materiałem współdziała jedna ściana naszego klina — noża. Oznacza to, że  $\vartheta_1$  lub  $\vartheta_2$  przyjmuje wartość ujemną. Dla zobrazowania tego przypadku rozpatrzono przykład, w którym przyjęto:  $\vartheta_1 = 75^\circ$ ,  $\vartheta_2 = -15^\circ$ ,  $\kappa = 15^\circ$ ,  $\alpha_1 = -15^\circ$ ,  $\mu = 0,25 \equiv \delta = 15^\circ$ . Znalaziono następujące wielkości:

$$\begin{aligned} \beta &= 30^\circ, & \gamma_1 &= 8^\circ 50', & a_1 &= 1,1695 z, & b_1 &= 0,955 z, \\ S_x &= 2,0761 kz, & S_y &= 0,4774 kz, & W &= 2,1326 kz, \\ M_x &= 0,4538 kz^2, & M_y &= 0,4612 kz^2, & M &= 0,915 kz^2, \\ O_x &= -0,2186 z, & O_y &= 0,9659 z, \end{aligned}$$

Na rys. 7 przedstawiono rozwiązanie powyższego zadania oraz deformację regularnej siatki prostokątów związanej z ciałem nieodkształconym. Konstrukcję zdeformowanej siatki wykonano na płaszczyźnie jednostkowej w identyczny sposób z poprzednim.





zania nie komplikuje części kinematycznej zadania, ponieważ oba obszary, ten w stanie granicznym i ten wolny od naprężeń, zachowują się jak jeden obszar sztywny (prędkość płynięcia wszystkich punktów jest jednakowa). W obszarze  $B_1CD_1$  panuje jednoosiowe ściskanie równoległe do  $B_1D_1$ . W konsekwencji tego wzdłuż styku narzędzia z materiałem mamy nieciągły rozkład naprężeń. W procesie rzeczywistym nieciągłość ta ulegnie rozmyciu dzięki sprężystym własnościom materiału i narzędzia.

E. H. LEE w pracy [3] stwierdza, iż wybór między proponowanym przez niego rozwiązaniem a rozwiązaniem Fielda i Merchanta powinien być oparty na kryterium minimalnej siły. Niemniej jednak E. H. Lee uważa na podstawie analizy rozwiązań konkretnych przypadków, że proponowane rozwiązania Merchanta dają zbyt strome płaszczyzny ścinania, aby można przyjąć, iż w obszarze objętym rozwiązaniem nie wystąpi inna strefa uplastycznienia poza płaszczyzną ścięcia.

Praktyczne wykorzystanie «rozwiązania podstawowego» jest ograniczone stosunkowo wąskim przedziałem zmienności wartości parametrów zadania. Celem rozszerzenia możliwości uzyskania rozwiązania procesu zaadoptujemy pomysł E. H. Lee przedstawiony na rys. 9.

E. H. Lee uzyskał rozwiązanie geometrycznie przy innym wyborze parametrów, uniemożliwiającym wprowadzenie warunku tarcia w sposób jawny oraz nie analizował stanu odkształcenia materiału.

W dalszej części pracy pomysł E. H. Lee zostanie wykorzystany dla uzyskania rozwiązania analitycznego przy wyborze takich samych parametrów, jak w «rozwiązaniu podstawowym» dla różnych warunków tarcia oraz uzupełniony analizą kinematyki i stanu odkształcenia materiału.

### 3.2. Pole naprężeń

Rozwiązanie przeprowadzimy dla jednej ściany klina (zachowując oznaczenia przyjęte w zadaniu podstawowym). Dla określenia wymiarów obszaru rozwiązania wyprowadzimy układ równań, w którym niewiadomymi są: kąt  $\beta$  w zagadnieniu przysięciennym oraz długość  $A_1C = b_1$ .

Kąt  $\beta$  określimy z warunków tarcia na styku narzędzie — materiał. Dla warunków typu a lub b (por. zadanie podstawowe) kąt  $\beta$  określa się ze wzorów (2.12) i (2.13). Wzór dla warunku tarcia typu c wyprowadzimy w sposób następujący. Wstawiając  $\chi_1 = 0,5$  (por. równanie (2.17)) do równania (2.19) otrzymamy

$$(3.1) \quad \sin 2(\varphi_0^{(1)} - \psi_1) = \mu^* [1 + \cos 2(\varphi_0^{(1)} - \psi_1)],$$

czyli

$$(3.2) \quad \mu^* = \frac{\sin 2(\varphi_0^{(1)} - \psi_1)}{1 + \cos 2(\varphi_0^{(1)} - \psi_1)} = \operatorname{tg}(\varphi_0^{(1)} - \psi_1).$$

Zatem

$$(3.3) \quad \varphi_1^{(1)} = \varphi_0^{(1)} = \vartheta_1 + \kappa - \pi/2 + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu^*, \quad \beta = \pi/4 - \operatorname{arctg} \mu^*.$$

Spełnienie warunku nieściśliwości, czyli równości pola powierzchni trójkątów  $OF_1C$  i  $A_1F_1D_1$ , zapewnia równoległość odcinków  $A_1O$  i  $CD_1$ . Pozwala to przy wykorzystaniu twierdzenia sinusów dla trójkąta  $A_1CO$  na wyprowadzenie zależności dla drugiej niewiadomej  $b_1$ :

$$(3.4) \quad b_1 = z(\cos \vartheta_1 + \sin \vartheta_1 \operatorname{tg} \beta) = z \frac{\cos(\vartheta_1 - \beta)}{\cos \beta}.$$

Z zależności geometrycznych w siatce charakterystyk, składającej się z dwu zagadnień brzegowych Cauchy'ego i mieszanego, można znaleźć

$$(3.5) \quad B_1D_1 = c_1 \quad \text{i} \quad B_1C = d_1, \quad d_1 = \frac{CD_1}{\sin \beta + \cos \beta}, \quad c_1 = d_1 \frac{\cos \beta}{\sin \pi/4},$$

przy czym

$$(3.6) \quad CD_1 = z \frac{\sin(\kappa - \alpha_1)}{\cos(\vartheta_1 - \beta + \kappa - \alpha_1)}.$$

Długość  $A_1D_1 = a_1$  można wyznaczyć na przykład z twierdzenia cosinusów dla trójkąta  $A_1CD_1$ . Rozwiązanie powinno spełniać warunek

$$(3.7) \quad \kappa - \alpha_1 < \pi/2 + \beta - \vartheta_1,$$

wynikający z geometrycznych własności rozwiązania:  $CD_1$  przecina się z powierzchnią skarpy.

Przyjęcie warunku

$$(3.8) \quad b_1 - d_1 \geq 0$$

daje możliwość określenia zależności między parametrami zadania zapewniających istnienie rozwiązania zmodyfikowanego.

Wykorzystując wzory (3.4) i (3.5) otrzymamy w przypadku, gdy

$$\cos(\vartheta_1 - \beta + \kappa - \alpha_1) > 0$$

nierówność

$$(3.9) \quad \operatorname{ctg}(\kappa - \alpha_1) \geq \operatorname{tg}(\vartheta_1 - \beta) + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \beta) \cos^2(\vartheta_1 - \beta)},$$

a dla

$$\cos(\vartheta_1 + \kappa - \beta - \alpha_1) < 0$$

nierówność

$$(3.10) \quad \operatorname{ctg}(\kappa - \alpha_1) \leq \operatorname{tg}(\vartheta_1 - \beta) + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \beta) \cos^2(\vartheta_1 - \beta)}.$$

Z drugiej strony należy pamiętać, że kąt  $A_1D_1C$  nie może być mniejszy niż  $45^\circ$ .

W momencie gdy  $b_1 = d_1$  rozwiązanie zmodyfikowane przechodzi w rozwiązanie podstawowe, dla którego  $\gamma_1 = 0$ .

Przypomnijmy jeszcze raz o rozkładzie naprężeń na ścinanie klina. Na odcinku  $A_1 B_1$  narzędzie jest nieobciążone (ośrodek nieważki), na odcinku  $B_1 C$  w zależności od przyjętego warunku tarcia mamy:

dla warunku a

$$(3.11) \quad \delta_n = k [1 + \cos 2\delta], \quad \tau_{nt} = k \sin 2\delta;$$

dla warunku b

$$(3.12) \quad \sigma_n = k [1 + \cos (\arcsin 2\mu)], \quad \tau_{nt} = 2\mu k.$$

dla warunku c

$$(3.14) \quad \sigma_n = k [1 + \cos 2(\arctg \mu^*)], \quad \tau_{nt} = k \sin 2(\arctg \mu^*).$$

Siły, momenty i punkty przyłożenia wypadkowej można wyznaczyć stosując wzory (2.23) – (2.28) zamieniając w nich  $b_1$  na  $d_1$ .

### 3.3. Kinematyka i odkształcenia

Jak już wspomniano, kinematyka zmodyfikowanego rozwiązania jest niezwykle prosta. Linia  $CD_1$  jest charakterystyką  $\beta$ , a zarazem linią nieciągłości prędkości. Prędkość płynięcia w obszarze uplastycznionym jest jednakowa dla wszystkich punktów i wynosi  $V_\beta = V_0 \frac{\sin \vartheta_1}{\cos \beta}$  oraz  $V_\alpha = 0$ . Obszar uplastyczniony  $B_1 CD_1$  niesie na sobie nienaprężony obszar sztywny  $A_1 B_1 D_1$ . Przyjęte założenie o prostoliniowości brzegu swobodnego  $A_1 D_1$  nie prowadzi do sprzeczności. Zmodyfikowane rozwiązanie należy do klasy zadań samopodobnych. Biegunem trajektorii ruchu cząstek na płaszczyźnie jednostkowej jest punkt  $A_1$ .

Łatwo zauważyć, że materiał zawarty wewnątrz trójkąta  $OCD_1$  przeszedł w całości do trójkąta  $A_1 CD_1$ , który powstał przez zmianę postaci  $OCD_1$ . Stan odkształcenia w  $A_1 CD_1$  jest stanem czystego ścinania równoległego do  $CD_1$ .

### 3.4. Przykład

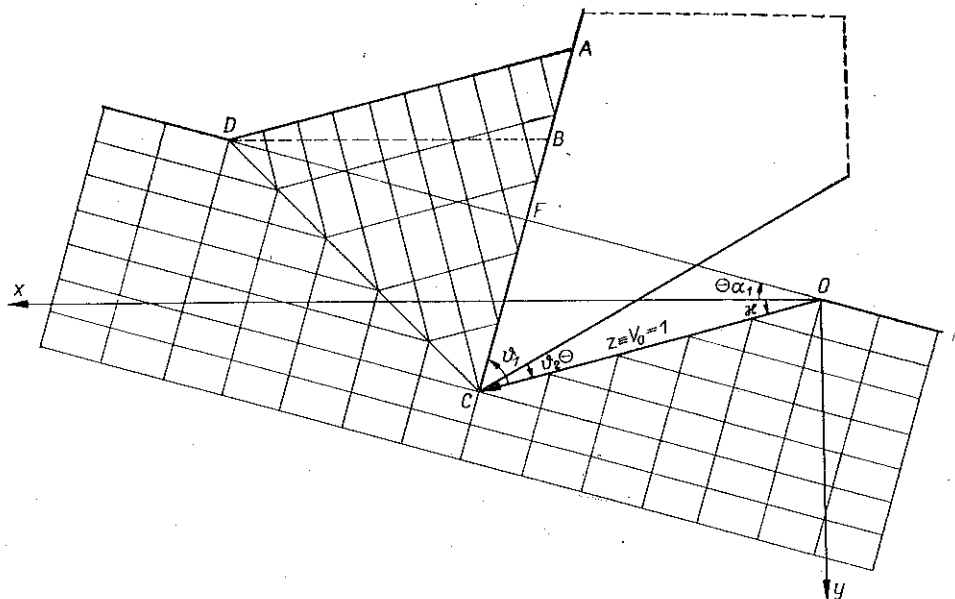
Jako przykład rozwiążemy początkowy proces skrawania przyjmując, następujące parametry:  $\vartheta_1 = 60^\circ$ ,  $\vartheta_2 = -15^\circ$ ,  $\kappa = 15^\circ$ ,  $\alpha_1 = -15^\circ$ ,  $\mu = 0,25$ . Powyższe parametry są takie same jak w przykładzie z punktu 2.7, oprócz nachylenia ściany skrawającej  $\vartheta_1$ . Można stwierdzić, że dla  $\vartheta_1 = 60^\circ$  nie otrzymamy rozwiązania z ciągłym polem naprężeń, ponieważ  $\gamma_1$  przyjmuje wartość ujemną. Stąd celowe jest zastosowanie dla tego przypadku rozwiązania zmodyfikowanego. Łatwo stwierdzić, iż obrane parametry spełniają nierówności (3.7) i (3.8), co umożliwia otrzymanie interesującego nas rozwiązania.

Kąt  $\beta$  dla  $\mu = 0,25$  otrzymujemy ze wzorów (2.13),  $\beta = 30^\circ$ . Jak wynika ze wzoru (3.4)  $b_1 = z$ . Pozostałe wymiary wynoszą kolejno:  $CD_1 = z$ ,  $d_1 = 0,732 z$ ,  $c_1 = 0,896 z$ ,  $a_1 = z$ .

Naprężenia, siły i momenty wyznaczono ze wzorów (3.12), (2.23) – (2.28).  $S_x = \sqrt{2} k z = 1,4142 k z$ ,  $S_y = 0$ ,  $W = S_x$ ,  $Ox = 0,8712 z$ ,  $Oy = 0,0947 z$ ,  $M_x = 0,1339 k z^2$ ,  $M_y = 0$ .

Rys. 10 przedstawia deformację początkowo prostokątnej regularnej siatki.





Rys. 10

#### 4. UWAGI OGÓLNE

Uzyskano kinematycznie dopuszczalne rozwiązanie procesu wciskania stępła w kształcie klina w półprzestrzeń z materiału idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Treski. Proces ma charakter samopodobny. Według HILLA [11] w tym rozwiązaniu procesu moc dysypacji energii jest dodatnia. Określono klasę możliwych ruchów stępła spełniających (warunki procesu) założenia zadania. Wydaje się, że przeprowadzenie przedłużenia stanu naprężenia w obszar sztywny nie powinno napotykać na trudności, co prowadziłoby do rozwiązania kompletnego dla tego procesu.

Udowodniono istnienie płaszczyzny jednostkowej dla rozpatrywanego procesu, co pozwoliło stosunkowo prosto określić deformację materiału.

Zarówno wzory w formie zamkniętej na siły i momenty, jak i określanie deformacji materiału — stanowią punkt wyjścia do weryfikacji doświadczalnej rozwiązań.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. R. HILL, E. H. LEE, S. J. TUPPER, *The theory of wedge indentation of ductile materials*, Proc. Roy Soc. A., **188**, 273, 1947.
2. G. I. BYKOWCEW, D. D. IWLEW, *Ob opredelenij predelnoj nagruzki tel vdvliwajemych w plastičeskuju sredu*, Mechanika i Masinostrojenije, **1**, 173, 1961.
3. E. H. LEE, *A plastic-flow problem arising in the theory of discontinuous machining*, Trans. ASME, 189–194, 1954.
4. D. S. DUGDALE, *Wedge indentation experiments with cold-worked metals*, J. Mech. Phys. Solids, **2**, 14–26, 1953.

5. J. GRUNDZWEIG, J. M. LONGMAN, N. J. PETCH, *Calculations and measurements on wedge-indentation*, J. Mech. Phys. Solids, 2, 81-86, 1954.
6. W. W. SOKOŁOWSKI, *Statyka ośrodków sypkich*, PWN, Warszawa 1958.
7. A. D. TOMLENOW, *Teorija plastičeskovo deformirovanija metalov*, Izd. „Metalurgija”, Moskwa 1972.
8. W. SZCZEPIŃSKI, *Wstęp do analizy procesów obróbki*, PWN, Warszawa 1967.
9. P. G. HODGE, *Approximate solutions of problems of plane plastic flow*, J. Applied Mech., 257-264, 1950.
10. M. FIELD, M. E. MERCHANT, *Mechanics of formation of the discontinuous chip in metal cutting*, Trans. ASME, 71, 421-428, 1949.
11. R. HILL, *The mathematical theory of plasticity*, Oxford 1950.

## Резюме

ПЛОСКИЙ ПРОЦЕСС ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА НАРЕЗАННОГО  
ЖЕСТКИМ ШТАМПОМ В ФОРМЕ КЛИНА

В работе представлено кинематически допустимое решение процесса вдавливания штампа, в форме клина, в пластичекое поупространство. Рассматриваемая задача принадлежит к нестационарным процессам сохраняющим геометрическое подобие сетки линий скольжения. Решение напряженного и деформационного состояний проведено для разным образом формулированных условий трения на контакте материал-инструмент.

## SUMMARY

A PLANE PROCESS OF PLASTIC FLOW OF THE MATERIAL CUT BY A RIGID PUNCH  
HAVING FORM OF WEDGE

The kinematically admissible solution of the process of pression of the wedge-like punch into plastic halfspace is presented. The problem considered belongs to the nonstationary processes conserving geometrical similarity of the slip line net. The solution of the state of stress and strain is obtained for different conditions of friction on the contact of the material with a tool.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 listopada 1975 r.*