

## STATYKA BUDYNKÓW O SZKIELECIE WSPÓLPRACUJĄCYM Z PŁYTAMI

JAN B. OBRĘBSKI (WARSZAWA)

Praca poświęcona jest analizie statycznej budynków o konstrukcji szkieletowej wypełnionej płytami, charakteryzujących się regularnością i powtarzalnością poszczególnych ich elementów. Proponowana metoda przystosowana jest do obliczeń numerycznych, a jej podstawowym założeniem jest wciągnięcie do współpracy ze szkieletem nośnym budynku elementów wypełniających go, jakimi są płyty ścienne — osłonowe, działowe i stropowe, oraz skratowania. Dodatkowo przyjmuje się, że szkielet może być zaprojektowany w wersji kratowej lub ramowej, a obciążenia zewnętrzne mogą być przyjmowane zarówno przez płyty wypełniające jak i przez szkielet budynku. Podano dla zaproponowanej metody algorytm numeryczny oraz przykład liczbowy.

### 1. WSTĘP

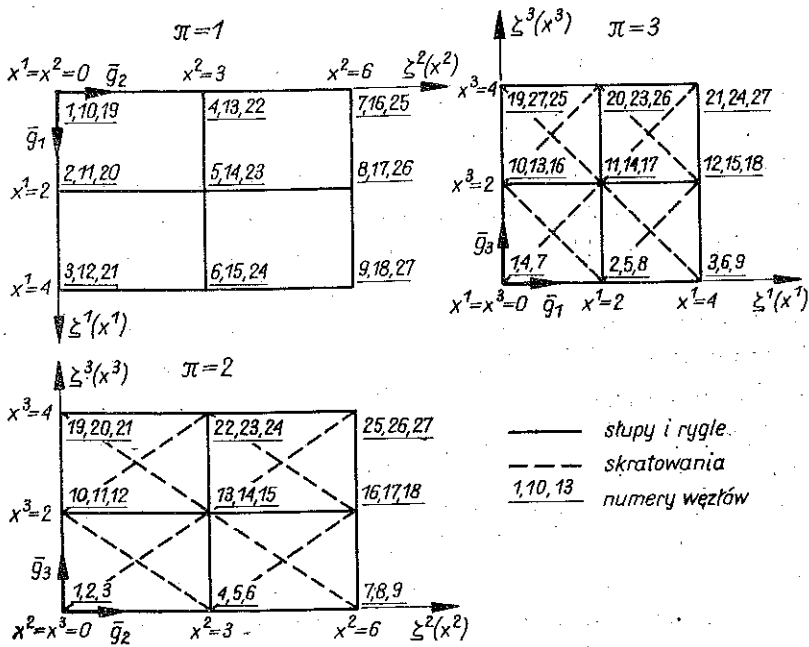
Praca poświęcona jest analizie statycznej budynków o konstrukcji szkieletowej wypełnionej płytami, charakteryzujących się regularną budową oraz powtarzalnością poszczególnych ich elementów. Wymienione powyżej założenia odpowiadają w zupełności kierunkom rozwoju nowoczesnego budownictwa. Sama metoda rozwiązania jest przystosowana do obliczeń numerycznych, a jej podstawowym celem jest umożliwienie przy obliczeniach uwzględnienia współpracy szkieletu nośnego budynku z wypełniającymi go elementami, jakimi są płyty ścienne osłonowe, działowe i stropowe oraz skratowania. Zakłada się ponadto, że szkielet może być zaprojektowany w wersji kratowej lub ramowej. Obciążenia zewnętrzne mogą przyjmować zarówno płyty wypełniające jak i sam szkielet budynku. Do tej pory brak było w literaturze krajowej opracowań dotyczących tak postawionego zagadnienia, pomimo że daje ono najpełniejszy obraz pracy konstrukcji. Świadczą o tym prace [2, 4 i 5]. Pewną próbą w tym zakresie była praca [6] wskazująca na możliwość zastosowania mechaniki ciał dyskretnych do obliczania budynków. Zawarty tam materiał stanowił jedynie szkic metody rozwiązania, nie wiążąc go w zasadzie z żadnym z istniejących schematów konstrukcyjnych. Ostatnio podobne zagadnienia podjęte zostały przez kilkusobowe zespoły w IPPT PAN<sup>(1)</sup> i w ETOB w Warszawie, o czym sygnalizowano w komunikatach na XVI Polskiej Konferencji Mechaniki Ciała Stałego w Krynicy w 1974 r. O wadze omawianego problemu świadczą mogą nieliczne dostępne w kraju publikacje zagraniczne, traktujące zagadnienie nadzwyczaj ogólnikowo [1 i 3].

<sup>(1)</sup> Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

Niniejsza praca stanowi rozszerzenie i uzupełnienie wcześniejszej publikacji autora [8], podając jednocześnie krótki opis algorytmu numerycznego i zbudowanego według niego programu. Rozważania teoretyczne poparto wynikami prostego przykładu liczbowego.

## 2. ZAŁOŻENIA I WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

Oprócz przyjętych we wstępie, w pracy obowiązują następujące założenia. Szkielet rozpatrywanych konstrukcji składa się z prostych sprężystych prętów przyrządowych, zbiegających się w sztywnych węzłach w taki sposób, że ich osie obojętne przecinają się w jednym punkcie. Szkielet wypełniony jest płytami i skratowaniami związanymi z nim za pomocą idealnych przegubów. Skratowania łączą sąsiednie węzły wzdłuż przekątnych płyt ściennych i stropowych. Konstrukcja może być obciążona w węzłach siłami i momentami skupionymi o dowolnie skierowanych wektorach oraz obciążeniem ciągłym, rozłożonym równomiernie i pod stałym kątem do powierzchni każdej z płyt. Te ostatnie obciążenia mogą odpowiadać obciążeniu użytkowemu, własnemu, obciążeniu śniegiem i wiatrem. Jego zmiany dopuszczalne są skokowo przy przejściu od jednej płyty do drugiej. Pomija się w zupełności



Rys. 1

wzajemne oddziaływanie na siebie płyt wzdłuż wspólnych krawędzi, przyjmując tam jednak zgodność przemieszczeń przy ich zmienności liniowej, tak jak w metodzie elementów skończonych [9]. Ponadto zakłada się, że w konstrukcji można wyodrębnić skończoną liczbę elementów powtarzalnych, zarówno płytowych jak i prętowych, z których przez translację i obrót da się otrzymać każdy inny ele-

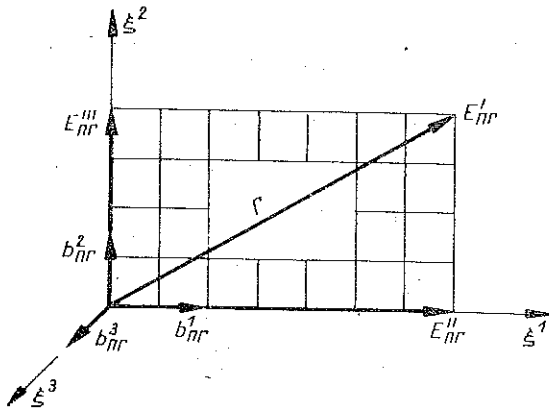
ment. Założenie to pozwala przy budowie konkretnego programu na znaczne zmniejszenie liczby wprowadzanych danych w porównaniu z metodą elementów skończonych. W pracy posłużono się trzema układami odniesienia. Jednym ogólnym  $\zeta^t$  o współrzędnych całkowitych  $x^t$ , przeznaczonym do opisu cech geometrycznych całej konstrukcji, drugim lokalnym  $z^t$ , budowanym oddzielnie w każdym węźle o osiach równoległych do osi układu  $\zeta^t$ , służącym do opisu cech geometrycznych jednocześnie wszystkich elementów zbiegających się w tych węzłach. Trzeci z nich  $\xi^t$ , związany z elementem płytowym, przeznaczony jest do jego analizy. Przedstawiona metoda rozwiązania jest metodą przemieszczeń, w której każdemu węzłowi szkieletu budynku przypisano wektor przemieszczeń o składowych  $u^t$  oraz wektor nieskończenie małego kąta obrotu o składowych  $\theta^t$  we współrzędnych lokalnych  $z^t$ . Parametryzację punktów węzłowych szkieletu budynku określono na podstawie układu odniesienia  $\zeta^t$  o osiach  $0\zeta^1$  i  $0\zeta^2$  leżących w podstawie i osi  $0\zeta^3$  skierowanej w górę wzdłuż jednej z krawędzi bocznych (rys. 1). W układzie tym promień-wektor dowolnego węzła można określić w sposób następujący:

$$\mathbf{r} = x^j \mathbf{g}_j,$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{g}}_j = \beta_j^i \mathbf{g}_i^*, \quad [\beta_j^i] = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{g}_i^*| = 1$$

oraz gdzie  $\mathbf{g}_j^*$  są jednostkowymi wektorami bazy układu  $\zeta^t$ ,  $x^j$  są liczbami całkowitymi, a  $l_i$  określają odległości dwóch sąsiednich punktów siatki rozmieszczonych wzdłuż każdej z linii współrzędnych  $\zeta^t$ . Wymiar ten może być liczbą rzeczywistą, odpowiadającą modułowi budowlanemu lub jego wielokrotności.



Rys. 2

Wszystkie wzory opisujące stan równowagi zostały napisane za pomocą elementów rachunku różnic skończonych, gdzie zdefiniowano cztery odmiany podstawowego operatora przesunięcia  $E_A$ :

a) Dla prętów prostych:

$$E_A \varphi(x^t) = E_i^{a^t} \varphi(x^t) = \varphi(x^t + a^t),$$

gdzie  $a^l$  są liczbami całkowitymi,  $l=1, 2, \dots, N$  jest kierunkiem związanym ściśle z punktem, do którego następuje przesunięcie,  $N$  jest maksymalną liczbą kierunków przypisanych prętom.

b) Dla płyty leżącej w płaszczyźnie współrzędnych o numerze  $\pi$ , posiadającej na tej płaszczyźnie kierunek przekątnej  $\Gamma$  (rys. 2):

$$E''_{\pi\Gamma} \varphi(x^l) = E_i^{h^l} \varphi(x^l) = \varphi(x^l + h^l) = E_A \varphi(x^l),$$

gdzie oprócz wprowadzonych oznaczeń przyjęto następujące:  $h^l$  są liczbami całkowitymi,  $l=N+1, N+2, \dots, N+N_1$ ,  $N_1$  jest maksymalną liczbą kierunków przypisanych przekątnym płyt.

c) Operacje wzdłuż dwóch krawędzi określonej wyżej płyty:

$$E''_{\pi\Gamma} \varphi(x^l) = E_i^{c^l} \varphi(x^l) = \varphi(x^l + c^l),$$

$$E''_{\pi\Gamma} \varphi(x^l) = E_i^{d^l} \varphi(x^l) = \varphi(x^l + d^l),$$

gdzie  $c^l = h^l |b_{\pi\Gamma}^{1l}|$ ,  $d^l = h^l |b_{\pi\Gamma}^{2l}|$ ,  $i=1, 2, 3$  oraz  $b_{\pi\Gamma}^{ij}$  są składowymi jednostkowych wektorów definiujących orientację w przestrzeni dowolnej płyty leżącej w płaszczyźnie  $\pi$  i posiadającej kierunek przekątnej  $\Gamma$ . Wektory  $b_{\pi\Gamma}^i$  pokazane na rys. 2 tworzą układ ortogonalny i to taki, że  $b_{\pi\Gamma}^1$ ,  $b_{\pi\Gamma}^2$  są zorientowane odpowiednio wzdłuż obydwu krawędzi płyty wybiegających z rozpatrywanego węzła oraz  $b_{\pi\Gamma}^1$  pokrywa się z osią układu  $z^l$  o numerze odpowiadającym numerowi  $\pi$  płaszczyzny współrzędnych, w której leży płyta. Natomiast trzeci wektor spełnia warunek  $b_{\pi\Gamma}^3 = -b_{\pi\Gamma}^1 \times b_{\pi\Gamma}^2$  i jest prostopadły do powierzchni płyty. Ostatecznie zakładamy, że wektory  $b_{\pi\Gamma}^i$  pokrywają się co do zwrotu i kierunku z odpowiednimi osiami układu  $\xi^i$  związanego z płytą. Przy powyższych założeniach składowe kontrawariantne wektorów  $b_{\pi\Gamma}^i$  w bazach lokalnych  $z^l$  można obliczyć w myśl wzorów:

$$b_{\pi\Gamma}^{1i} = \begin{cases} \text{sign}(h^i), & \text{jeśli } i = \pi \\ 0 & , \text{jeśli } i \neq \pi \end{cases} \quad \pi = 1, 2, 3;$$

$$b_{\pi\Gamma}^{2i} = \begin{cases} \text{sign}(h^i), & \text{jeśli } i-1 = \pi \\ 0 & , \text{jeśli } i-1 \neq \pi \end{cases} \quad \pi = 1, 2;$$

$$b_{\pi\Gamma}^{3i} = \begin{cases} \text{sign}(h^i), & \text{jeśli } i+2 = \pi \\ 0 & , \text{jeśli } i+2 \neq \pi \end{cases} \quad \pi = 3;$$

$$b_{\pi\Gamma}^{31} = b_{\pi\Gamma}^{12} b_{\pi\Gamma}^{23} - b_{\pi\Gamma}^{22} b_{\pi\Gamma}^{13},$$

$$b_{\pi\Gamma}^{32} = b_{\pi\Gamma}^{13} b_{\pi\Gamma}^{21} - b_{\pi\Gamma}^{23} b_{\pi\Gamma}^{11},$$

$$b_{\pi\Gamma}^{33} = b_{\pi\Gamma}^{11} b_{\pi\Gamma}^{22} - b_{\pi\Gamma}^{21} b_{\pi\Gamma}^{12},$$

gdzie  $i=1, 2, 3$  oraz ostatnie trzy wzory wynikają z definicji iloczynu wektorowego. W przypadku gdy układ  $z^l$  jest układem prostokątnym, dodatkowo spełnione są zależności  $b_{\pi\Gamma}^i = b_{\pi\Gamma}^{ij}$ .

Zorientowanie w przestrzeni pręta prostego o kierunku  $A$  wyznacza trójka ortogonalnych jednostkowych wektorów kierunkowych  $\tilde{t}_A, \tilde{t}_A, \tilde{t}_A$  zdefiniowanych podobnie jak w pracy [7] z tym, że składowe ich są wyznaczane nie jako funkcje

przyrostów współrzędnych globalnych  $\zeta^i$  układu, lecz uzależnione są od  $E_A z^i$  rzutów pręta na osie układu lokalnego  $z^i$ . Składowe te można wyznaczyć za pomocą wzorów następujących:

$$\begin{aligned} t_A^1 &= \cos \alpha \cos \alpha_d, & t_A^2 &= \cos \alpha \sin \alpha_d, & t_A^3 &= \sin \alpha, \\ \tilde{t}_A^1 &= \sin \alpha_d, & \tilde{t}_A^2 &= -\cos \alpha_d, & \tilde{t}_A^3 &= 0, \\ \tilde{\tilde{t}}_A^1 &= \cos \beta \cos \alpha_d, & \tilde{\tilde{t}}_A^2 &= \cos \beta \sin \alpha_d, & \tilde{\tilde{t}}_A^3 &= -\sin \beta, \end{aligned}$$

gdzie  $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$  oraz  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ . W przypadku gdy  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , mamy

$$\begin{aligned} t_A^1 &= 0, & t_A^2 &= 0, & t_A^3 &= \text{sign}(\Delta h), \\ \tilde{t}_A^1 &= \text{sign}(\Delta h), & \tilde{t}_A^2 &= 0, & \tilde{t}_A^3 &= 0, \\ \tilde{\tilde{t}}_A^1 &= 0, & \tilde{\tilde{t}}_A^2 &= 1, & \tilde{\tilde{t}}_A^3 &= 0. \end{aligned}$$

Występujące w tych związkach wielkości obliczyć można ze wzorów

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \cos \beta = \frac{\Delta h}{l_{AB}}, & \cos \alpha &= \sin \beta = \frac{l_{A'B'}}{l_{AB}}, \\ \cos \alpha_d &= \frac{E_A z^1}{l_{A'B'}}, & \sin \alpha_d &= \frac{E_A z^2}{l_{A'B'}}, \\ l_{AB} &= \sqrt{(E_A z^1)^2 + (E_A z^2)^2 + (E_A z^3)^2}, \\ l_{A'B'} &= \sqrt{(E_A z^1)^2 + (E_A z^2)^2}, \\ \Delta h &= E_A z^3. \end{aligned}$$

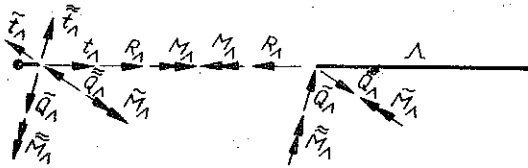
Ze względu na ortogonalność układu  $z^i$  dodatkowo zachodzą zależności  $t_{Ai} = t_{A'}^i$ ,  $\tilde{t}_{Ai} = \tilde{t}_{A'}^i$ ,  $\tilde{\tilde{t}}_{Ai} = \tilde{\tilde{t}}_{A'}^i$ .

### 3. ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA PRĘTA PROSTEGO

Siły wewnętrzne w poszczególnych prętach o kierunku  $A$  wyznaczamy w myśl wzorów podanych w pracy [7]:

$$\begin{aligned} R_A &= C_A t_{Ai} (E_A - 1) u^i, \\ \tilde{Q}_A &= \frac{\tilde{K}_A}{l_A} \left[ -6 \tilde{t}_{Ai} (E_A + 1) \theta^i + \frac{12}{l_A} \tilde{\tilde{t}}_{Ai} (1 - E_A) u^i \right], \\ \tilde{\tilde{Q}}_A &= \frac{\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A} \left[ -6 \tilde{\tilde{t}}_{Ai} (E_A + 1) \theta^i + \frac{12}{l_A} \tilde{t}_{Ai} (E_A - 1) u^i \right], \\ M_A &= K_A t_{Ai} (E_A - 1) \theta^i, \\ \tilde{M}_A &= \tilde{K}_A \left[ \tilde{t}_{Ai} (4 + 2E_A) \theta^i - \frac{6}{l_A} \tilde{\tilde{t}}_{Ai} (1 - E_A) u^i \right], \\ \tilde{\tilde{M}}_A &= \tilde{\tilde{K}}_A \left[ \tilde{\tilde{t}}_{Ai} (4 + 2E_A) \theta^i - \frac{6}{l_A} \tilde{t}_{Ai} (E_A - 1) u^i \right], \end{aligned}$$

gdzie  $R_A$ ,  $\tilde{Q}_A$ ,  $\tilde{\tilde{Q}}_A$  są odpowiednio siłą osiową oraz dwiema siłami poprzecznymi;  $M_A$ ,  $\tilde{M}_A$ ,  $\tilde{\tilde{M}}_A$  są momentami skręcającymi i zginającymi w przekroju przywęzłowym pręta  $A$ . Zorientowanie wektorów sił względem wektorów kierunkowych  $\tilde{t}_A$ ,  $\tilde{\tilde{t}}_A$  przedstawia rys. 3. Pozostałe symbole oznaczają:  $C_A$ ,  $K_A$ ,  $\tilde{K}_A$ ,  $\tilde{\tilde{K}}_A$  odpowiednio sztywność pręta na rozciąganie, skręcanie i zginanie,  $l_A$  długość pręta  $A$ .



Rys. 3

#### 4. ZWIĄZKI FIZYCZNE DLA PŁYTY

Elementy płytowe, wypełniające konstrukcję, zdolne są zgodnie z przyjętymi założeniami do przenoszenia sił skupionych  $F$  przekazywanych im w narożach przez przegubowe węzły łączące je z konstrukcją. Celem wyznaczenia tych reakcji występujących w jednym z naroży płyty, wyrazimy je przez przemieszczenia dane we wszystkich jej narożach oraz przez składowe obciążenia danego na jej powierzchni, następnie skorzystamy z metody zaproponowanej dla elementów wieloprętowych w pracy [7]. Ogólnie rzecz biorąc jest to metoda superpozycji obciążeń, w wyniku której otrzymujemy wzory transformacyjne o budowie podobnej do analogicznych wzorów dla pręta prostego w metodzie odkształceń. Obciążeniami w danym przypadku są poszczególne siły zewnętrzne o składowych  $Q^n$  jak i przyłożone do elementu jednostkowe przemieszczenia czterech jego węzłów narożnych o składowych  $\vartheta^n$ . Obierając kolejno te jednostkowe obciążenia przy zerowej wartości pozostałych, obliczamy dla wszystkich przypadków wywołane w ten sposób siły wewnętrzne oraz reakcje w narożach. Następnie w celu wyznaczenia wartości sił wewnętrznych i reakcji narożnych, wywołanych dowolnym obciążeniem, wystarczy przemnożyć odpowiednie siły przez wartości danych sił zewnętrznych i przemieszczeń, a następnie je dodać. Jeśli wartości danych sił i przemieszczeń oznaczymy odpowiednimi symbolami, to otrzymamy poszukiwane wzory transformacyjne. Przy każdorazowym obliczaniu sił wewnętrznych i reakcji narożnych dla wybranego elementu płytowego, wywołanych obciążeniem jednostkowym, postępujemy następująco. Obieramy układ punktów węzłowych rozmieszczonych w całym obszarze płyty. Jeśli płyta wykonana jest jako regularna nośna rama o sztywnych węzłach, wypełniona pokryciem i ociepleniem, to obrane punkty pokrywają się oczywiście z węzłami tej ramy. Następnie budujemy układ równań równowagi całej płyty z wyjątkiem węzłów narożnych oraz leżących na krawędziach zewnętrznych. Układ ten można napisać w postaci

$$(4.1) \quad DX = B,$$

gdzie  $D$  jest macierzą sztywności,  $X$  wektorem przemieszczeń węzłów,  $B$  wektorem reprezentującym obciążenia zewnętrzne. Macierz  $D$  można zbudować korzystając ze wzorów znanych w metodzie elementów skończonych [9], gdzie równania równowagi węzła  $i$  mają postać

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^N [k_{ij}] \{\delta_j\} = R_i.$$

W równaniu tym przyjęto oznaczenia:  $R_i$  — siły zewnętrzne przyłożone do węzła,  $[k_{ij}]$  — macierz sztywności elementu  $j$ ,  $\delta_j$  — przemieszczenia węzłów elementu  $j$ .

Dla płyty o ramowej konstrukcji nośnej można w tym miejscu skorzystać ze znacznie łatwiejszego w stosowaniu wzoru zaproponowanego w pracy [7], podanego w zapisie różnicowo-macierzowym

$$(4.3) \quad \sum_{A=1}^N (W_A E_A + \hat{W}_A) x = \bar{Q},$$

gdzie  $E_A$  jest operatorem przesunięcia,  $W_A$  i  $\hat{W}_A$  macierzami charakteryzującymi sztywność węzła,  $x$  — wektorem przemieszczeń,  $\bar{Q}$  — wektorem obciążeń węzła.

W obydwu przypadkach, jeśli w równaniu (4.1) przeniesiemy na prawą stronę równości wyrazy odpowiadające tylko danym przesunięciom węzłów brzegowych (a nie ich obrotom), to dochodzimy do zależności

$$(4.4) \quad D_0 X_0 = Q - CS.$$

We wzorze tym po lewej stronie równości występuje iloczyn quasi-macierzy współczynników  $D_0$  przez wektor niewiadomych przemieszczeń węzłów leżących wewnątrz obszaru płyty  $X_0$ , natomiast po prawej stronie wektor  $Q$  odpowiadający obciążeniom elementu siłami zewnętrznymi oraz iloczyn odpowiedniej quasi-macierzy współczynników  $C$  i wektora danych przemieszczeń węzłów brzegowych  $S$ . W wektorze  $S$  przemieszczenia węzłów brzegowych, leżących na krawędziach płyty, są uzależnione liniowo od przemieszczeń naroży. Rozwiązanie równania (4.4) daje w wyniku poszukiwane przemieszczenia węzłów płyty. Wyznaczenie tych niewiadomych wygodnie jest ze względu na stosowanie metody superpozycji obciążeń i konieczność dokonywania wielokrotnych obliczeń przeprowadzić w myśl wzoru

$$X_0 = D_0^{-1} Q_0,$$

gdzie  $Q_0 = Q - CS$  oraz  $D_0^{-1}$  jest macierzą odwróconą. Przekształcając równania równowagi węzła narożnego, z równania (4.2) otrzymamy

$$(4.5) \quad \bar{R}_i = \sum_{j=1}^N ([k_{ij}] \{\delta_j\}) + R_i$$

oraz z równania (4.3)

$$(4.6) \quad \bar{R} = \sum_{A=1}^N (W_A E_A + \hat{W}_A) x + \bar{Q}.$$

Równania (4.5) i (4.6) pozwalają obliczyć interesujące nas składowe reakcji działających w narożach. We wzorach tych  $\bar{R}_i$  i  $\bar{R}$  są wektorami reakcji narożnych (w których uwzględniono już znak ich zwrotu), z jakimi działa płyta na szkielet budynku. Wyniki obliczeń dla płyty zamykamy w odpowiednie wzory transformacyjne, mogące wyrażać bądź reakcje węzłów narożnych, bądź siły wewnętrzne. Ponieważ płyty mogą mieć różne rozmiary, a nawet płyty o takich samych wymiarach zewnętrznych mogą mieć różne otwory lub w ogóle być ich pozbawione, przeto wzorom transformacyjnym przypisujemy indeks  $\gamma$ , oznaczający numer typu płyty. Dla przykładu, postać omawianych wzorów dla elementu  $\gamma$  przyjmie postać

$$(4.7) \quad F_{\gamma m} = A_{\gamma 0mn} \mathcal{S}^n + A_{\gamma 1mn} E'_{\pi\Gamma} \mathcal{S}^n + A_{\gamma 2mn} E''_{\pi\Gamma} \mathcal{S}^n + A_{\gamma 3mn} E'''_{\pi\Gamma} \mathcal{S}^n + A_{\gamma 4mn} Q^n,$$

gdzie  $A_{\gamma\delta mn}$  dla  $\delta=0, 1, 2, 3, 4$  oraz  $m, n=1, 2, 3$  są współczynnikami macierzy sztywności. Poszczególne siły  $F_{\gamma 1}, F_{\gamma 2}, F_{\gamma 3}$  są odpowiednio równoległe do osi układu  $\xi^i$ , a tym samym do wektorów  $\mathbf{b}_{\pi\Gamma}^1, \mathbf{b}_{\pi\Gamma}^2, \mathbf{b}_{\pi\Gamma}^3$ . Występujące we wzorze (4.7) składowe przemieszczeń  $\mathcal{S}^n$  oraz składowe obciążeń zewnętrznych  $Q^n$  są odniesione do osi układu  $\xi^i$  związanego z elementem. Wyrażając je przez składowe  $u^i$  i  $q^i$  przemieszczeń i obciążeń, przypisanych odpowiednio węzłom konstrukcji szkieletu i płytom całego budynku wyrażone w układzie  $z^i$ , znajdziemy

$$(4.8) \quad \mathcal{S}^n = \mathbf{b}_{\pi\Gamma}^n \cdot \mathbf{u} = b_{\pi\Gamma i}^n u^i, \quad Q^n = \mathbf{b}_{\pi\Gamma}^n \cdot \mathbf{q} = b_{\pi\Gamma i}^n q^i.$$

Podstawiając (4.8) do (4.7) otrzymamy

$$(4.9) \quad F_{\gamma m} = A_{\gamma 0mn} b_{\pi\Gamma i}^n u^i + A_{\gamma 1mn} b_{\pi\Gamma i}^n E'_{\pi\Gamma} u^i + A_{\gamma 2mn} b_{\pi\Gamma i}^n E''_{\pi\Gamma} u^i + \\ + A_{\gamma 3mn} b_{\pi\Gamma i}^n E'''_{\pi\Gamma} u^i + A_{\gamma 4mn} b_{\pi\Gamma i}^n q^i.$$

Na zakończenie tego rozdziału należy zauważyć, że pod pojęciem płyty w niniejszej pracy rozumiemy płaski trójwymiarowy element budowlany, pracujący zgodnie z założeniami teorii sprężystości zarówno w stanie tarczowym jak i płytowym.

## 5. RÓWNANIA RÓWNOWAGI WĘZŁA SZKIELETU BUDYNKU

W celu opisanego stanu równowagi samego szkieletu konstrukcji skorzystano z równania równowagi dowolnego węzła ramownicy przestrzennej, podanego w zapisie różnicowo macierzowym w pracy [7] łącznie ze wszystkimi towarzyszącymi mu założeniami. Ponieważ w naszej pracy ograniczono się do budynków o prostokątnym układzie szkieletu, parametryzowanych prostokątnym układem odniesienia, przeto wspomniane równanie przyjmie postać

$$(5.1) \quad \sum_{A=1}^N (W_A E_A + \hat{W}_A) x = \bar{Q},$$

gdzie

$$W_A = \begin{bmatrix} W_{(su)A} & W_{(s\theta)A} \\ W_{(mu)A} & W_{(m\theta)A} \end{bmatrix}, \quad \hat{W}_A = \begin{bmatrix} \hat{W}_{(su)A} & \hat{W}_{(s\theta)A} \\ \hat{W}_{(mu)A} & \hat{W}_{(m\theta)A} \end{bmatrix}, \quad \bar{Q} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_p \\ \bar{Q}_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_u \\ x_\theta \end{bmatrix},$$



$$\begin{aligned}
 W_{(su)A} &= \left[ \left[ C_A t_{Ar} t_{Ai} + \frac{12\tilde{K}_A}{l_A^2} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} + \frac{12\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A^2} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 W_{(s\theta)A} &= \left[ \left[ \frac{6\tilde{K}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - \frac{6\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 W_{(mu)A} &= \left[ \left[ -\frac{6\tilde{K}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} + \frac{6\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 W_{(m\theta)A} &= [(K_A t_{Ar} t_{Ai} - 2\tilde{K}_A \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - 2\tilde{\tilde{K}}_A \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai})], \\
 \dot{W}_{(su)A} &= \left[ \left[ -C_A t_{Ar} t_{Ai} - \frac{12\tilde{K}_A}{l_A^2} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - \frac{12\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A^2} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 \dot{W}_{(s\theta)A} &= \left[ \left[ \frac{6\tilde{K}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - \frac{6\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 \dot{W}_{(mu)A} &= \left[ \left[ \frac{6\tilde{K}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - \frac{6\tilde{\tilde{K}}_A}{l_A} \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} \right] \right], \\
 \dot{W}_{(m\theta)A} &= [(-K_A t_{Ar} t_{Ai} - 4\tilde{K}_A \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai} - 4\tilde{\tilde{K}}_A \tilde{t}_{Ar} \tilde{t}_{Ai})], \\
 x_u &= \begin{bmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{bmatrix}, \quad x_\theta = \begin{bmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \\ \theta^3 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_p = \begin{bmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ -P_3 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}_m = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ -M_3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

oraz gdzie oprócz wprowadzonych już oznaczeń  $i, r=1, 2, 3$ . W przypadku gdy przęty skratowań są połączone z węzłem przegubowo i przenoszą tylko siły osiowe, przyjmując  $K_A = \tilde{K}_A = \tilde{\tilde{K}}_A = 0$  dla  $A=N+1$  do  $A=M$ , równanie (5.1) napiszemy w postaci

$$(5.2) \quad \sum_{A=1}^N (W_A E_A + \dot{W}_A) x + \sum_{A=N+1}^M \dot{W}_A (E_A - 1) x = \bar{Q},$$

gdzie

$$\dot{W}_A = \begin{bmatrix} W_{(su)A} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W_{(su)A} = [(C_A t_{Ar} t_{Ai})], \quad i, r=1, 2, 3$$

oraz 0 jest macierzą zerową o wymiarze  $3 \times 3$ . W przypadku gdy szkielet wypełniony jest płytami, równanie (5.2), a właściwie ta jego część, która odpowiada sumie rzutów sił na każdą z osi układu  $z^i$ , zostanie uzupełniona następnymi wyrazami pochodzącymi od sił wzajemnego oddziaływania szkieletu i wypełniających go płyt. W celu uwzględnienia tych sił wzajemnego oddziaływania postępujemy podobnie jak w pracy [7]. Napiszemy więc sumę wszystkich sił wzajemnego oddziaływania, przyłożonych do wybranego węzła, w postaci wektorowej

$$(5.3) \quad S = \sum_{\pi} \sum_{\Gamma} F_{\pi\Gamma} b_{\pi\Gamma}^m,$$

gdzie numer typu elementu płytowego  $\gamma = \gamma(\pi, \Gamma)$  jest związany z układem geometrycznym całej konstrukcji. Rozkładając wektory  $b_{\pi\Gamma}^m$  na składowe wzdłuż osi układu  $z^i$  oraz dokonując rzutu sumy wektorowej na kierunek  $r$ , otrzymamy

$$(5.4) \quad S_r = \sum_{\pi} \sum_{\Gamma} F_{\gamma m} b_{\pi\Gamma}^m.$$

Podstawiając do (5.4) wyrażenie na siły  $F_{\gamma m}$  (4.9) otrzymamy

$$(5.5) \quad S_r = \sum_{\pi} \sum_{\Gamma} (A_{\gamma 0mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n u^i + A_{\gamma 1mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n E'_{\pi\Gamma} u^i + \\ + A_{\gamma 2mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n E''_{\pi\Gamma} u^i + A_{\gamma 3mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n E'''_{\pi\Gamma} u^i + \\ + A_{\gamma 4mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n q^i).$$

Opierając się na (5.2) i (5.5) równanie opisujące stan równowagi w węźle szkieletu budynku wypełnionego płytami i skratowaniami znajdziemy

$$(5.6) \quad \sum_{A=1}^N (W_A E_A + \dot{W}_A) x + \sum_{A=N+1}^M \dot{W}_A^* (E_A - 1) x + \\ + \sum_{\pi} \sum_{\Gamma} (W_{\pi\Gamma} + W'_{\pi\Gamma} E'_{\pi\Gamma} + W''_{\pi\Gamma} E''_{\pi\Gamma} + W'''_{\pi\Gamma} E'''_{\pi\Gamma}) x = \bar{Q} + \bar{Q}',$$

gdzie oprócz znanych już oznaczeń wprowadzono następujące:

$$W_{\pi\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{W}_{\pi\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W'_{\pi\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{W}'_{\pi\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W''_{\pi\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{W}''_{\pi\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ W'''_{\pi\Gamma} = \begin{bmatrix} \bar{W}'''_{\pi\Gamma} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{Q}' = \begin{bmatrix} \bar{q}_r \\ 0 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\bar{W}_{\pi\Gamma} = [(A_{\gamma 0mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n)], \quad \bar{W}''_{\pi\Gamma} = [(A_{\gamma 1mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n)], \\ \bar{W}'_{\pi\Gamma} = [(A_{\gamma 2mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n)], \quad \bar{W}'''_{\pi\Gamma} = [(A_{\gamma 3mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n)], \\ \bar{q}_r = \{(-A_{\gamma 4mn} b_{\pi\Gamma}^m b_{\pi\Gamma}^n q^i)\}.$$

We wzorze (5.6) wszystkie macierze  $W_A$ ,  $\dot{W}_A$ ,  $W_{\pi\Gamma}$ ,  $W'_{\pi\Gamma}$ ,  $W''_{\pi\Gamma}$ ,  $W'''_{\pi\Gamma}$ , mają wymiar  $6 \times 6$  oraz macierze  $x$ ,  $\bar{Q}$ ,  $\bar{Q}'$  wymiar  $6 \times 1$ . W przypadku gdy konstrukcję szkieletu budynku traktujemy jako kratownicę stężoną płytami i prętami przenoszącymi jedynie siły osiowe, wzór (5.6) znacznie upraszcza się, gdyż pomijamy wówczas pierwszą sumę występującą po lewej stronie równości, w związku z czym równanie to przyjmie postać

$$(5.7) \quad \sum_{A=1}^N \dot{W}_A^* (E_A - 1) x + \sum_{\pi} \sum_{\Gamma} (W_{\pi\Gamma} + W'_{\pi\Gamma} E'_{\pi\Gamma} + W''_{\pi\Gamma} E''_{\pi\Gamma} + W'''_{\pi\Gamma} E'''_{\pi\Gamma}) x = \bar{Q} + \bar{Q}'.$$

W tym przypadku

$$(5.8) \quad \dot{W}_A = W_{(st)A}, \quad W_{\pi\Gamma} = \bar{W}_{\pi\Gamma}, \quad W'_{\pi\Gamma} = \bar{W}'_{\pi\Gamma}, \quad W''_{\pi\Gamma} = \bar{W}''_{\pi\Gamma}, \quad W'''_{\pi\Gamma} = \bar{W}'''_{\pi\Gamma},$$

$$(5.9) \quad \bar{Q} = \bar{Q}_p, \quad \bar{Q}' = \bar{q}_r, \quad x = x_u.$$

Wszystkie macierze (5.8) mają wymiar tylko  $3 \times 3$  oraz macierze (5.9) wymiar  $3 \times 1$ . Podobnie we wzorze (5.7) liczba niewiadomych zmniejsza się w stosunku do wzoru (5.6) o połowę.

## 6. ALGORYTM NUMERYCZNY

Z względu na skalę trudności sformułowanego w pracy problemu jedyną drogą do osiągnięcia konkretnych wyników są obliczenia numeryczne. Wyprowadzone wzory (5.6) i (5.7) doskonale nadają się do zaprogramowania. Obliczenia rozpoczynamy od ponumerowania węzłów szkieletu w taki sposób, że zachowując na poziomie każdego stropu jednakową kolejność numeracji węzłów przechodzimy począwszy od pierwszej kondygnacji budynku do ostatniej. Kolejność taka gwarantuje otrzymanie macierzy sztywności całej konstrukcji o możliwie najmniejszej szerokości pasma. Dalszy proces obliczeń jest już typowy i nie wymaga szerszego omówienia [7]. Przy założeniu, że szkielet budynku stanowi ramownicę przestrzenną, korzystamy z równania równowagi węzła określonego wzorem (5.6), co prowadzi do układu równań algebraicznych liniowych o  $6 \times N$  niewiadomych, gdzie  $N$  jest liczbą węzłów. W przypadku rozpatrywania szkieletu jako kratownicy przestrzennej stosujemy wzór (5.7) i odpowiedni układ równań posiadać będzie tylko  $3 \times N$  niewiadomych, a więc liczba niewiadomych zmniejsza się o połowę. Stosowanie przy obliczeniach wzorów transformacyjnych dla elementów płytowych o postaci (4.9) bądź to dla wyrażenia reakcji w narożach, bądź sił wewnętrznych w płycie, znacznie zmniejsza niezbędną liczbę operacji i umożliwia wielokrotne wykorzystanie raz otrzymanych wyników pośrednich w różnych programach. Uproszczony schemat blokowy programu liczącego według podanych wzorów przedstawia rys. 4a. Należy zwrócić uwagę na fakt, że opis różnicowy zastosowany w niniejszej pracy ułatwia w sposób naturalny wykorzystanie powtarzalności układu, co prowadzi do zmniejszenia ilości wprowadzanych danych. Wystarczy tylko raz w programie obliczyć składowe wektorów kierunkowych  $\vec{t}_A, \vec{\tilde{t}}_A, \vec{\tilde{\tilde{t}}}_A$  oraz  $\vec{b}_{nr}^n$ , aby później korzystać z gotowych już wartości. Podobne oszczędności przynoszą jak to wspomniano wyżej wzory transformacyjne dla płyt. Widać to wyraźnie dla dużych i wysokich budanków szczególnie na etapie poszukiwania płyt, w których wystąpią największe siły wewnętrzne, gdzie należałoby przy korzystaniu z dotychczas znanych metod wielokrotnie obliczać te same płyty poddane jedynie innym obciążeniom.

Program użytkowy dla omawianego zagadnienia należy sporządzić dla maszyn cyfrowych z dużą jednostką centralną o pamięci operacyjnej co najmniej 64K. Warunek ten spełniają m.in. dostępna Odra 1305 oraz CYBER 70. Program napisany nawet dla ODRY 1305 teoretycznie przy właściwej organizacji umożliwi obliczanie budynków do około 7,5 tys. węzłów przegubowych (22,5 tys. stopni swobody) oraz około 70 węzłów w jednym stropie. Daje to właściwie nieograniczone możliwości obliczeniowe. W przypadku EMC CYBER 70 parametry te będą jeszcze większe. W programie należy przyjąć taką organizację wprowadzania danych, aby oprócz liczb całkowitych, opisujących współrzędne, podawać dla

każdego węzła jedynie sposób jego obciążenia oraz obciążenia sąsiadujących z nim płyt, a także wyłącznie jego numer jako węzła powtarzalnego. Układ geometryczny węzłów powtarzalnych należy definiować przez podanie jedynie numerów kierunków  $A$  opisujących przez wykładniki operatora przesunięcia położenie pręta lub płyty w przestrzeni. Zakłada się przy tym, że kierunki  $A=1, 2, \dots, N$  odpowiadają prętom układu, natomiast kierunki  $A=N+1, N+2, \dots, N+N_1$  odpowiadają przekątnym płyt. W tym przypadku pomiędzy jednocześnie wszystkimi trzema wykładnikami cząstkowymi operatorów  $E_A$  i  $E'_{\pi\Gamma}$  przykładowo mogą zachodzić zależności

$$h^i [4(\pi-1) + \Gamma] = a^i [A], \quad \pi=1, 2, 3, \quad \Gamma=1, 2, 3, 4,$$

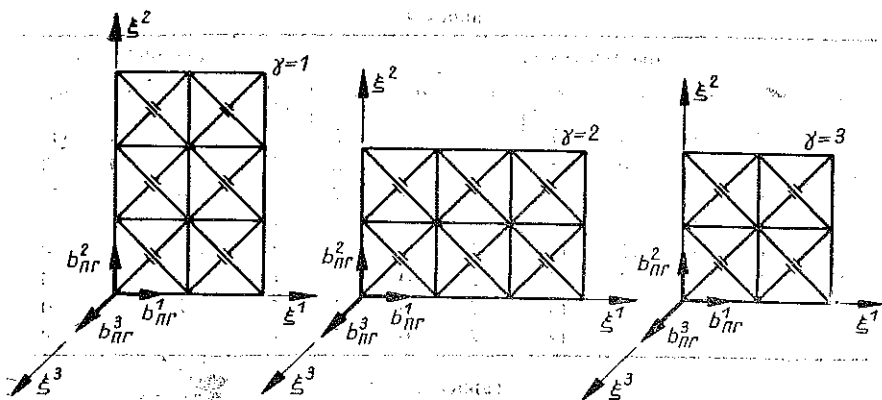
skąd raz w całym programie można ustalić metodą przeszukiwania przypisane odpowiednim numerom kierunków  $A$  dla przekątnych płyt właściwe płaszczyzny  $\pi$  oraz kierunki  $\Gamma$ . Zapisać to można następująco:  $\pi = \pi(A)$ ,  $\Gamma = \Gamma(A)$ .

## 7. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

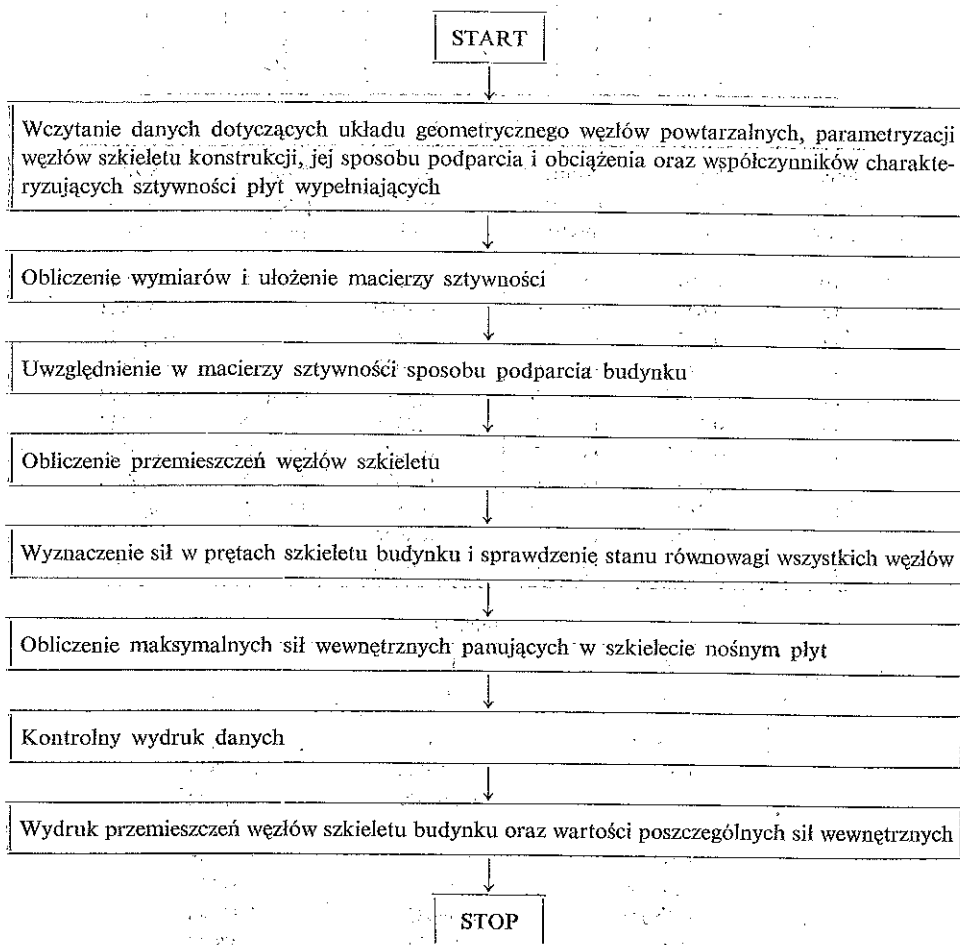
W celu ilustracji zastosowania podanych w pracy wzorów ułożony został program dla maszyny cyfrowej ODRA 1204 z bębniami, którego schemat blokowy przedstawia rys. 4a. Program ten wymaga stosunkowo niewielkiej liczby wprowadzanych danych, opisujących układ geometryczny węzłów powtarzalnych, parametryzację wszystkich węzłów, składowe ich obciążeń, sposób podparcia budynku, przekroje i stałe materiałowe poszczególnych grup prętów oraz współczynniki  $A_{\gamma\delta mn}$ , które są obliczane oddzielnym programem. Duża część ręcznie przygotowanych danych wczytywana jest w postaci liczb całkowitych. Omawiany program sprawdzono na kilku przykładach, we wszystkich przypadkach uzyskując dostatecznie dokładne wyniki.

Schemat statyczny jednej z obliczanych konstrukcji przedstawia rys. 1. Rozwiązanie tego przykładu wymagało sporządzenia trzech macierzy współczynników  $A_{\gamma\delta mn}$  wzorów transformacyjnych (4.9) dla trzech elementów płytowych o schematach ramowych szkieletów nośnych przedstawionych na rys. 4. Ponadto należało zdefiniować ukierunkowanie w przestrzeni powtarzalnych prętów układu przez podanie wykładników cząstkowych  $a^i$  operatora przesunięcia  $E_A$ , zamieszczonych w tablicy 1; dla płyt znajdujących się na płaszczyźnie  $\pi$  i o kierunku przekątnej  $\Gamma$  przyjęto wykładniki  $h^i$  zgodnie z tablicą 2. Program zbudowano na podstawie równania równowagi (5.7) budynku o szkielecie kratowym, co pozwala na dwukrotne zmniejszenie liczby niewiadomych w zadaniu. Oszczędność taka jest nie bez znaczenia nawet przy korzystaniu z maszyny ODRA 1204 z pełnym wyposażeniem w 4 bębny.

Wyniki liczbowe dla omawianego przykładu zilustrowanego na rys. 1 są zamieszczone w tablicy 3, gdzie podano wartości sił osiowych występujących w prętach szkieletu. Tablica 4 zawiera reakcje podłoża oraz tablica 5 zawiera dla przykładu współczynniki  $A_{\gamma\delta mn}$  dla płyty  $\gamma=1$  z rys. 4. Obliczenia przeprowadzono przy obciążeniu wszystkich płyt pionowych jedynie ciężarem własnym o składowych  $q^3 = -0,1 \text{ T/m}^2$  oraz poziomych ciężarem  $q^3 = -0,5 \text{ T/m}^2$ , modułach siatki punktów



Rys. 4



Rys. 4a

Tablica 1

dla budynku								dla płyt			
$A$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$A$	$a^1$	$a^2$	$a^3$	$A$	$a^1$	$a^2$	$a^3$
1	2	0	0	7	0	3	2	1	1	0	0
2	-2	0	0	8	0	3	-2	2	-1	0	0
3	0	3	0	9	0	-3	-2	3	0	1	0
4	0	-3	0	10	0	-3	2	4	0	-1	0
5	0	0	2	11	2	0	2	5	1	1	0
6	0	0	-2	12	-2	0	2	6	1	-1	0
				13	-2	0	-2	7	-1	-1	0
				14	2	0	-2	8	-1	1	0

Tablica 2

$\Gamma$	$\pi=1$			$\pi=2$			$\pi=3$		
	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^1$	$h^2$	$h^3$	$h^1$	$h^2$	$h^3$
1	2	3	0	0	3	2	2	0	2
2	2	-3	0	0	3	-2	-2	0	2
3	-2	-3	0	0	-3	-2	-2	0	-2
4	-2	3	0	0	-3	2	2	0	-2

Tablica 3

Numery końców prętów		Sily osiowe [T]	Numery końców prętów		Sily osiowe [T]	Numery końców prętów		Sily osiowe [T]
1	10	-1,6016	5	14	-2,5234	13	19	0,0588
1	13	-0,6568	10	19	-0,6860	13	23	-0,5863
1	11	-0,9121	10	13	0,3366	13	22	-1,0451
2	10	-0,5489	10	11	0,5037	14	23	-1,4518
2	11	-1,8242	10	20	-0,3415	14	22	-0,2649
2	14	-0,7764	10	22	-0,2525	19	20	-0,0929
4	10	-0,2597	11	20	-0,9643	19	22	-0,0169
4	13	-2,1347	11	14	0,3874	20	23	-0,0048
4	14	-1,2617	11	19	-0,1852	22	23	0,1264
5	11	-0,2930	11	23	-0,3936			
5	13	-0,7333	13	14	0,6679			

Tablica 4

Nr. podp.	$R_1$ [T]	$R_2$ [T]	$R_3$ [T]
1	0,750253	0,696426	3,31648
2	0,0	0,810714	4,07049
3	-0,750253	0,696426	3,31648
4	1,026900	0,0	4,51774
5	0,0	0,0	5,55758
6	-1,026900	0,0	4,51774
7	0,750253	-0,696426	3,31648
8	0,0	-0,810714	4,07049
9	-0,750253	-0,696426	3,31648

Tablica 5

$\delta$	Płyta stropowa współcz. macierzy $A_{1\delta mn}$ [T]			
	$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$	1	2	3
0	1	-9801,77	-2691,06	0,00
	2	-2691,06	-8729,47	0,00
	3	0,00	0,00	-40,49
1	1	1495,64	2691,06	,00
	2	2691,06	3481,71	0,00
	3	0,00	0,00	-5,98
2	1	7533,94	-696,57	0,00
	2	696,57	1625,89	0,00
	3	0,00	0,00	32,07
3	1	772,18	696,57	0,00
	2	-696,57	3621,87	0,00
	3	0,00	0,00	14,40
4	1	1,50	0,72	0,00
	2	0,42	1,50	0,00
	3	0,00	0,00	1,50

$l_1 = l_2 = l_3 = 1,5$  m, przekrojach słupów  $A = 0,01$  m<sup>2</sup> oraz module Younga  $E = 21,0 \times 10^6$  T/m<sup>2</sup>. Natomiast dla płyt powtarzalnych przyjęto  $A = 0,001$  m<sup>2</sup>,  $J = 3,0 \times 10^{-6}$  m<sup>4</sup>,  $\tilde{J} = \tilde{J} = 15,0 \times 10^{-7}$  m<sup>4</sup>,  $G = 81,0 \times 10^5$  T/m<sup>2</sup>,  $E = 21,0 \times 10^6$  T/m<sup>2</sup>. Z uwagi na symetrię zadania tablica 3 zawiera wyniki dla jednej czwartej budynku.

LITERATURA

1. V. L. AGASKAR, W. WEAVER, *Automated design of tier buildings*, Computers and Structures, 2, 5/6, 1972.
2. W. BOGUCKI, *Budownictwo stalowe*, Arkady, 1967.
3. H. S. JYENGAR, N. AMIN and LARUEN CARPENTER, *Computerized design of worlds tallest buildings*, Computers and Structures, 2, 5/6, 1972.
4. M. ŁUBIŃSKI, J. KWIATKOWSKI, *Systemy statyczno-konstrukcyjne wysokich budynków stalowych*, Materiały z Konferencji Regionalnej Planowania i Projektowania Budynków Wysokich — Referaty generalne, Warszawa 1972.
5. J. KWIATKOWSKI, B. OSIROWSKI, *Analiza statyczna układu pionowych płaskich tężników kratowych w szkieletach przegubowych*, Materiały z Konferencji Regionalnej Planowania i Projektowania Budynków Wysokich, Warszawa 1972.
6. M. KWIECIŃSKI, M. KLEIBER, *Konstrukcja budynku wysokiego jako zagadnienie mechaniki ciał dyskretyzowanych*, Materiały z Konferencji Regionalnej Planowania i Projektowania Budynków Wysokich, Warszawa 1972.
7. J. OBRĘBSKI, *Statyka heksagonalnych siatek prętowych*, Prace IPPT, 36/1972.
8. J. OBRĘBSKI, *Algorytm i program do statycznej analizy budynków o szkielecie współpracującym z płytami*, Materiały z XX Konferencji Naukowej KI PAN i KN PZITB, Krynica 1974.
9. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, 1972.

## Резюме

## СТАТИКА ЗДАНИЙ СО СКЕЛЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕМ С ПЛИТАМИ

Работа посвящена статическому анализу зданий скелетной конструкции, заполненной плитами, характеризующихся регулярностью и повторяемостью отдельных их элементов. Предлагаемый метод приспособен для численных расчетов, а его основным предположением является вовлечение к взаимодействию с несущим скелетом здания элементов заполняющих скелет, какими являются стеночные плиты — защитные, разделительные, перекрывающие, а также соединительные решетки. Дополнительно принимается, что скелет может проектироваться в решетчатом или рамочном вариантах, а внешние нагрузки могут передаваться так через заполняющие плиты, как и через скелет здания. Для предложенного метода даются численный алгоритм, а также числовой пример.

## SUMMARY

## STATICS OF FRAMEWORK-PLATE BUILDING STRUCTURES

The paper deals with a static analysis of buildings having skeleton type structure filling by plates which are highly regular and repeated elements. The method of solution of the problem is adopted to the purely numerical computations under the main assumption that the building skeleton cooperates with such plate elements filling it like walls, partition walls, floors and trusses. Besides it is assumed that the skeleton may be designed as a lattice or frame structure and the external forces may be transmitted as well through the plates as through the skeleton. For the method proposed an numerical algorithm is derived and numerical example presented.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 19 maja 1975 r.*