

O ZAGADNIENIU WYZNACZANIA ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTYCH W WALCU O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI(*)

KONSTANTIN J A M B O L I E W (SOFIA)

Rozwiązanie zagadnienia naprężeń i odkształceń w walcu sprężystym napotyka na trudności z powodu konieczności uwzględnienia w warunkach brzegowych przemieszczeń promieniowych lub naprężeń stycznych na podstawach ściskanego walca. Celem pracy jest wskazanie sposobu wyznaczenia tych odkształceń na podstawach, a także stanu deformacji całego walca, gdy znane są odkształcenia w kilku jego punktach wewnętrznych. Zagadnienie to rozwiązano przy mieszanych warunkach brzegowych.

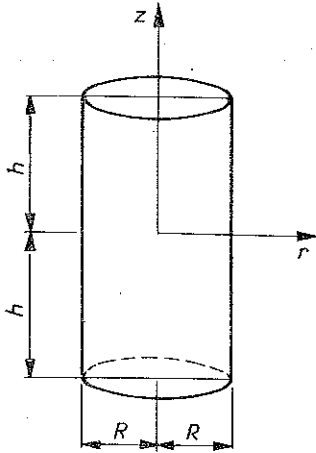
Zagadnienie wyznaczenia naprężeń i odkształceń w walcu w stanie sprężystym należy do podstawowych tematów teorii sprężystości. Zagadnieniem tym zajmowało się wielu badaczy jeszcze w końcu zeszłego stulecia. Wyznaczanie stanu odkształcenia i naprężenia w walcu ściskanym jest szczególnym przypadkiem tego zagadnienia, którego rozwiązanie jest znane i stosunkowo nieskomplikowane, jeżeli przyjąć, że ściskanie na podstawach walca jest równomiernie rozłożone i że nie istnieje tarcie na powierzchniach styku przy przyłożeniu obciążenia. Takie ogólne rozwiązanie walca jest podane w artykule [1]. W tej pracy za pomocą szeregów trygonometrycznych rozwiązano zagadnienie osiowo-symetrycznego walca o skończonej długości. Rozpatrzono przypadki osiowego ściskania i rozciągania walca a także obciążeń normalnych i stycznych na powierzchni bocznej.

W literaturze znane są również i inne rozwiązania, jak na przykład przedstawione w pracach [2 i 3]. W żadnym z tych rozwiązań nie sformułowano warunków na przemieszczenia promieniowe lub naprężenia styczne na podstawach walca. W rzeczywistości doświadczalnie stwierdzono, że wskutek tarcia występującego na powierzchniach styku walca i płyt prasy występują istotne zmiany stanu odkształcenia: stan ten staje się bardzo złożony. Rozwiązanie osiowo-symetrycznego walca o skończonej długości z mieszаныmi warunkami brzegowymi jest podane w pracy [4]. Rozwiązanie to wymaga znajomości niektórych naprężeń i przemieszczeń na powierzchni bocznej i podstawach walca. Jednakże istnieje możliwość określenia rzeczywistego rozkładu naprężeń stycznych i przemieszczeń promieniowych na podstawach walca ściskanego na drodze doświadczalnej. Dlatego celem niniejszej pracy jest wskazanie sposobu wyznaczenia odkształceń na podstawach walca, a także stanu deformacji całego walca, gdy znane są odkształcenia w kilku jego punktach wewnętrznych. Zagadnienie to jest rozwiązane przy mieszanych warunkach brzegowych.

(*) Praca jest częścią rozprawy doktorskiej przygotowanej w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki PAN i obronionej w r. 1975.

1. SFORMUŁOWANIE I OGÓLNE ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Przyjęto układ współrzędnych walcowych r, z (rys. 1). Poszukiwane są takie funkcje $u(r, z)$ i $w(r, z)$ określające przemieszczenia wzdłuż promienia i wysokości walca, które spełniają wewnątrz walca równania równowagi Lamégo:



Rys. 1. Układ współrzędnych i oznaczenia

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)} \frac{\partial e}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} &= 0, \\ \frac{2(1-\mu)}{(1-2\mu)} \frac{\partial e}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

W tych równaniach oznaczono przez μ współczynnik Poissona, a przez $e = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}$ odkształcenie objętościowe.

Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano dane uzyskane w badaniach doświadczalnych przedstawionych w pracy [5]. Przedmiotem tych badań były pomiary składowych odkształceń w punktach położonych wewnątrz walca betonowego poddanego ścisłaniu osiowemu. Wykonano również pomiary odkształceń w walcu poddanym jednocześnie ścisłaniu osiowemu i równomiernemu obciążeniu na powierzchni bocznej. W ten sposób znane jest skrócenie walca w kierunku osi z , a także obciążenie przyłożone na powierzchni bocznej. Uwzględniając to można przyjąć następujące warunki brzegowe:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u(r, h) = \alpha^{(1,2)}(r) = u(r, -h), \quad w(r, h) = \beta^{(1,2)}(r) = w(r, -h), \\ \sigma_r(R, z) = \gamma(z), \quad \tau_{rz}(R, z) = 0, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_r(R, z)$ jest naprężeniem normalnym na powierzchni bocznej walca. Przyjęto, że na powierzchni bocznej nie istnieją naprężenia styczne [$\tau_{rz}(R, z) = 0$]. Przyjęto, że funkcje $\alpha(r)$ i $\beta(r)$ mogą być rozwinięte w szeregi Fouriera względem funkcji Bessela pierwszego rodzaju J_0 i J_1 przedstawione w następujący sposób:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \alpha^{(1,2)}(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{(1,2)} J_1(\lambda_n r), \quad \beta^{(1,2)}(r) = \beta_0^{(1,2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(1,2)} J_0(\lambda_n r) \end{aligned}$$

przy $0 \leq r \leq R$.

Indeksy (1, 2) oznaczają odpowiednio górną i dolną podstawę walca. Natomiast $\lambda_n R = \gamma_n$ są dodatnimi pierwiastkami równania $J_1(\gamma) = 0$.

Przyjęto, że funkcja określająca naprężenia na powierzchni bocznej $\gamma(z)$ może być rozwinięta w szereg trygonometryczny Fouriera

$$(1.4) \quad \gamma(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_m \sin \frac{m\pi(z-h)}{2h}$$

w przedziale $-h \leq z \leq h$.

Jeżeli funkcje α , β , γ byłyby znane, to można byłoby skorzystać z rozwiązania zagadnienia podanego w pracy [4]. W rozpatrywanym zagadnieniu niektóre z tych funkcji nie mogą być jednak z góry określone.

Funkcja $\beta(r)$ może być przyjęta jako stała i określona na podstawie skrócenia walca przy założeniu, że płyty prasy są dostatecznie sztywne i nieodkształcalne. Funkcja $\gamma(z)$ także jest znana, ponieważ może być określona przez obciążenie zewnętrzne przyłożone na powierzchni bocznej walca. Funkcja $\alpha(r)$ jest nieznaną. Reprezentuje ona przemieszczenia na powierzchniach styku walca i płyt prasy. Przemieszczenia te zależą od wielkości i charakteru rozkładu sił tarcia na tych powierzchniach. Ich zmierzenie jest związane ze znacznymi trudnościami i nie ma opracowanych dostatecznie pewnych metod do prowadzenia takich badań w elementach z materiałów kompozytowych. Dlatego dla rozwiązania zagadnienia zastosowano następującą metodę półodwrotną. Funkcję $\alpha(r)$ przedstawiono w postaci wielomianu o niewiadomych współczynnikach. Współczynniki te następnie wyznaczono na podstawie znajomości odkształceń w punktach wewnątrz walca. Otrzymane rozwiązanie umożliwia określenie wielkości i rozkładu sił tarcia na powierzchniach styku.

Jeżeli założyć, że przemieszczenia na powierzchniach styku są jednakowe na obydwu podstawach walca, to funkcje $\alpha(r)$ można przyjąć w następującej postaci:

$$(1.5) \quad \alpha(r) = \alpha_1^1(r) = \alpha_2^2(r) = a_1 r + a_2 r^2 + a_3 r^3.$$

W tym przypadku współczynniki szeregu Fouriera α_n we wzorach (1.3) są równe

$$(1.6) \quad \alpha_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)} \int_0^R r \alpha(r) J_1(\alpha_n r) dr$$

lub po podstawieniu

$$(1.7) \quad \alpha_n = \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)} \left[a_1 \int_0^R r^2 J_1(\alpha_n r) dr + a_2 \int_0^R r^3 J_1(\alpha_n r) dr + \right. \\ \left. + a_3 \int_0^R r^4 J_1(\lambda_n r) dr \right].$$

Współczynniki szeregu Fouriera β_n we wzorze (1.3) są następujące:

$$(1.8) \quad \beta_0^{(1,2)} = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \beta^{(1,2)}(r) dr, \quad \beta_n^{(1,2)} = \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n R)} \int_0^R r \beta^{(1,2)}(r) J_0(\lambda_n r) dr.$$

Ponieważ założono, że płyty prasy są dostatecznie sztywne, to można przyjąć, że przemieszczenia podstaw walca są stałe i wynoszą

$$\beta^1 = -\frac{\Delta h}{2} \quad \text{i} \quad \beta^2 = \frac{\Delta h}{2}.$$

Korzystając ze wzoru (1.8)₁ można napisać

$$(1.9) \quad \beta_0^1 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \beta^1(r) dr = -\frac{\Delta h}{2}, \quad \beta_0^2 = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \beta^2(r) dr = \frac{\Delta h}{2}$$

oraz ze wzoru (1.8)₂ po scałkowaniu

$$(1.10) \quad \beta_n^1 = -\frac{\Delta h J_1(\lambda_n R)}{R J_0^2(\lambda_n R) \lambda_n}, \quad \beta_n^2 = \frac{\Delta h J_1(\lambda_n R)}{R J_0^2(\lambda_n R) \lambda_n}.$$

W celu znalezienia przemieszczeń walca wykorzystano rozwiązanie [4], po czym końcowy wzór na przemieszczenia przekształcono tak, aby zawierał stałe występujące we wzorze (1.5)

$$(1.11) \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m + \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad w = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} B_1 z + \sum_{m=1}^{\infty} w_m + \sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

gdzie

$$(1.12) \quad u_m = -\left\{ -\frac{1}{2} C_m \left[4\mu + 2k_m R \frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} \right] I_1(k_m r) + \right. \\ \left. + C_m [2(2\mu-1) I_1(k_m r) + k_m r I_0(k_m r)] \right\} \frac{\sin \frac{mn(z-h)}{2h}}{2(1-\mu) k_m I_1(k_m R)}, \\ w_m = -\left\{ -\frac{1}{2} C_m \left[4\mu + 2k_m R \frac{I_0(k_m R)}{I_1(k_m R)} \right] I_0(k_m r) + \right. \\ \left. + C_m [2I_0(k_m r) + k_m r I_1(k_m r)] \right\} \frac{\cos \frac{mn(z-h)}{2h}}{2(1-\mu) k_m I_1(k_m R)},$$

$$u_n = \frac{J_1(\lambda_n r)}{4(1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n h J_0(\lambda_n R)} \left\{ [-B_n^1 h \operatorname{th} \lambda_n h + \right. \\ \left. + 4(1-\mu) \alpha_n J_0(\lambda_n R)] \operatorname{th} \lambda_n h \operatorname{ch} \lambda_n z + B_n^1 \operatorname{th}(\lambda_n h) z \operatorname{sh}(\lambda_n z), \right. \\ w_n = \frac{J_0(\lambda_n r)}{4(1-\mu) \operatorname{sh} \lambda_n h J_0(\lambda_n R)} \left\{ -[-B_n^1 h \operatorname{th} \lambda_n h + 4(1-\mu) \alpha_n J_0(\lambda_n R)] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{th} \lambda_n h \operatorname{sh} \lambda_n z - B_n^1 \left(\operatorname{th} h z \operatorname{ch} \lambda_n z - \frac{3-4\mu}{\lambda_n} \operatorname{th} \lambda_n h \operatorname{sh} \lambda_n z \right) \right\}.$$

Tutaj $k_m = \frac{m\pi}{2h}$, a przez B_n^1 i B_1 oznaczono następujące wyrażenia:

$$(1.13) \quad B_n^1 = \frac{2}{(3-4\mu) \operatorname{th} \lambda_n h - \frac{\lambda_n h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n h}} \sum_{m=1}^{\infty} C_m \frac{2k_m [\lambda_n^2 - \mu(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{h(\lambda_n^2 + k_m^2)^2} + \\ + \frac{2(1-\mu) \lambda_n J_0(\lambda_n R)}{(3-4\mu) \operatorname{th} \lambda_n h - \frac{\lambda_n h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n h}} (\beta_n^1 - \beta_n^2 + 2\alpha_n \operatorname{th} \lambda_n h), \\ B_1 = -\frac{4\mu}{Rh(1-2\mu)} \sum_{1,3,\dots}^{\infty} \frac{C_m}{k_m^2} \frac{1-\mu}{h(1-2\mu)} \Delta h.$$

W ten sposób do wyznaczenia przemieszczeń u i w otrzymano wzory zawierające nieokreśloną funkcję α_n . Do określenia współczynników C_m uzyskano następujący wzór:

$$\begin{aligned}
 (1.14) \quad C_m = & \frac{2}{k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2-2\mu}{k_m R}} \times \\
 & \times \sum_{m=1,2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3-4\mu) \operatorname{th} \lambda_n h - \frac{\lambda_n h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n h}} \frac{2k_m [\lambda_n^2 - \mu(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{h(\lambda_n^2 + k_m^2)^2} \times \\
 & \times F_{sn} C_s - \frac{16\mu^2}{Rh(1-2\mu)m\pi k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R}} \times \\
 & \times \sum_{s=1,3}^{\infty} \frac{C_s}{k_s^2} - \frac{1}{k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R}} \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_m [\lambda_n^2 - \mu(\lambda_n^2 + k_m^2)]}{h(\lambda_n^2 + k_m^2)^2} \frac{2(1-\mu) \lambda_n J_0(\lambda_n R)}{(3-4\mu) \operatorname{th} \lambda_n h - \frac{\lambda_n h}{\operatorname{ch}^2 \lambda_n h}} \times \\
 & \times (\beta_n^1 - \beta_n^2 + 2\alpha_n \operatorname{th} \lambda_n h) + \frac{2(1-\mu)}{k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R}} \times \\
 & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\lambda_n k_m \alpha_n J_0(\lambda_n R)}{h(\lambda_n^2 + k_m^2)} + \frac{1-\mu}{\left\{ k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R} \right\} G} \gamma_m - \\
 & \frac{4\mu(1-\mu) \Delta h}{hm\pi(1-2\mu) \left\{ k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R} \right\}}.
 \end{aligned}$$

Z tego wzoru widać, że wpływ obciążenia przyłożonego na powierzchni bocznej walca na jego przemieszczenia jest uwzględniony za pośrednictwem wyrazu

$$(1.15) \quad \frac{1-\mu}{\left\{ k_m R \left[\frac{I_0^2(k_m R)}{I_1^2(k_m R)} - 1 \right] - \frac{2(1-\mu)}{k_m R} \right\} G} \gamma_m,$$

w którym G jest współczynnikiem sprężystości na ścinanie, a γ_m są współczynnikami szeregu Fouriera (1.4) określającego funkcję $\sigma_r(R, z)$.

Po zsumowaniu szeregów w (1.14) i przekształceniach otrzymujemy układ równań z niewiadomymi C_m , dla $m=1, 3, 5, \dots$. Równania tego układu mają wy-

razy wolne, zawierające współczynniki a_1, a_2, a_3 . Ogólna postać tego układu równań jest następująca:

$$(1.16) \quad \begin{aligned} c_1^1 C_1 + c_3^1 C_3 + c_5^1 C_5 + \dots + c_{2m-1}^1 C_{2m-1} &= f_1(a_1, a_2, a_3) \\ c_1^2 C_1 + c_3^2 C_3 + c_5^2 C_5 + \dots + c_{2m-1}^2 C_{2m-1} &= f_2(a_1, a_2, a_3) \\ \dots &\dots \\ c_1^k C_1 + c_3^k C_3 + c_5^k C_5 + \dots + c_{2m-1}^k C_{2m-1} &= f_k(a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

Jeżeli podstawić znalezione z tego układu współczynniki C_m występujące we wzorach (1.12)–(1.14), to można otrzymać wzory na przemieszczenia u i w

$$(1.17) \quad u = F_u(a_1, a_2, a_3, r, z), \quad w = F_w(a_1, a_2, a_3, r, z).$$

W ten sposób rozwiązanie zagadnienia sprowadzono do określania niewiadomych współczynników a_1, a_2, a_3 . Do ich wyznaczenia konieczna jest znajomość przemieszczeń w trzech punktach walca. Po wyznaczeniu współczynników a_1, a_2, a_3 znane są wszystkie parametry, od których zależą przemieszczenia walca. Umożliwia to określenie stanu odkształcenia i naprężenia walca.

2. WYZNACZENIE ODKSZTAŁCEŃ SPRĘŻYSTYCH WALCA BETONOWEGO

Przedstawiona metoda została zastosowana do wyznaczenia stanu naprężenia i odkształcenia walca betonowego. Wykorzystano przy tym wyniki pomiarów odkształceń wewnątrz walca betonowego [5]. Pomiarzy te prowadzono przy takim obciążeniu walca, przy którym nie występują odkształcenia nieliniowe. Zakładamy, że walec jest jednorodny i odkształca się sprężysto w granicach stosowanych obciążeń. Wymiary walca oraz cechy betonu przyjęto jak następuje: połowa wysokości $h = 50$ cm, promień przekroju poprzecznego $R = 22,5$ cm, współrzędne punktów, w których są znane odkształcenia z pomiarów $h_1 = 16$ cm, $r_1 = 14$ cm, średnia wartość współczynnika Poissona $\mu = 0,16$, średnia wytrzymałość betonu na podstawie ściskania walców próbnych $\sigma = 364$ kG/cm², odpowiadająca wartość współczynnika sprężystości $E = 3,4 \cdot 10^5$ kG/cm², moduł sprężystości na ścinanie

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} = 1,465 \cdot 10^5 \text{ kG/cm}^2,$$

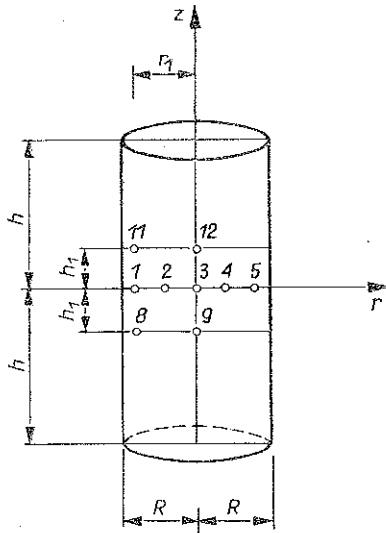
naprężenie ściskające na powierzchni bocznej

$$\sigma_r(R, z) = \sigma_p = 14,2 \text{ kG/cm}^2.$$

Wstępne sprawdzenia wskazują, że przy sumowaniu szeregów względem m w celu określenia współczynników C_m (1.14) wystarcza uwzględnienie tylko dwóch pierwszych składników, tj. $m = 1$ i 3 . Przy sumowaniu szeregów względem n konieczne jest przyjmowanie sześciu wyrazów, tj. $n = 1, \dots, 6$.

W badaniach [5] umieszczano między płytami prasy a podstawami walca przekładki trzech rodzajów, które dalej będą nazywane przekładkami typu 1, 2 i 3. Przy rozwiązywaniu zagadnienia wykorzystano zmierzone odkształcenia przy

obciążeniu walca siłą 60 T i przekładkach typu 1, 2 i 3 oraz przy obciążeniach siłami 60 T i 180 T z jednoczesnym obciążeniem bocznym przy przekładkach typu 2 i 3. Na rys. 2 oznaczono punkty, z których zmierzone odkształcenia wykorzystano w rozwiązaniu.



Rys. 2. Usytuowanie punktów, w których określono przemieszczenia na podstawie pomiarów w celu wyznaczenia współczynników a_1, a_2, a_3

Skrócenie walca wywołane ścisaniem jest równe $\Delta h = h \epsilon_{sr}$. Tutaj średnie odkształcenie przyjęto na podstawie pomiarów w punktach 3, 9 i 12, położonych na osi walca. Wartość tych odkształceń przy różnych przekładkach i maksymalnych obciążeniach podano w tabelicy 1.

Tablica 1

	Przekładki typu	Obciążenie w [T]	Δh [cm]
Przed sprężeniem	1	60	0,00850000
	2	60	0,00785333
	3	60	0,00686667
Po sprężeniu	2	60	0,00676667
	2	180	0,02503333
	3	180	0,02220000

Wartości współczynników Fouriera β_n^1 i β_n^2 są obliczone według wzorów (1.10) przy poszczególnych typach przekładek i maksymalnych obciążeniach. Określenie współczynników Fouriera na podstawie wzorów (1.7) sprowadza się do wyznaczenia następujących całek:

$$J_1 = \int_0^R r^2 J_1(\lambda_n r) dr, \quad J_2 = \int_0^R r^3 J_1(\lambda_n r) dr, \quad J_3 = \int_0^R r^4 J_1(\lambda_n r) dr.$$

Ogólna postać rozwiązania tych całek jest następująca:

$$J_1 = \int_0^R r^2 J_1(\lambda_n r) dr = \frac{R^2}{\lambda_n} J_2(\lambda_n R),$$

$$J_2 = \int_0^R r^3 J_1(\lambda_n r) dr = \frac{1}{\lambda_n^4} \left[3\lambda_n R J_1(\lambda_n R) S_{2,0}(\lambda_n R) - \lambda_n R J_0(\lambda_n R) S_{3,1}(\lambda_n R) + \frac{8\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \right],$$

$$J_3 = \int_0^R r^4 J_1(\lambda_n r) dr = \frac{1}{\lambda_n^5} \left[4\lambda_n R J_1(\lambda_n R) S_{3,0}(\lambda_n R) - \lambda_n R J_0(\lambda_n R) S_{4,1}(\lambda_n R) + \frac{16\Gamma(3)}{\Gamma(-1)} \right].$$

Obliczenie funkcji Lomela $S_{2,0}(\lambda_n R)$, $S_{3,0}(\lambda_n R)$, $S_{3,1}(\lambda_n R)$, $S_{4,1}(\lambda_n R)$ wykonano na maszynie cyfrowej.

W ten sposób współczynniki Fouriera wynoszą:

$$\alpha_1 = -29,158755 a_1 - 427,167440 a_2 - 6717,872383 a_3,$$

$$\alpha_2 = -21,373399 a_1 + 464,954239 a_2 + 9062,002196 a_3,$$

$$\alpha_3 = -17,716480 a_1 - 373,449008 a_2 - 8279,849579 a_3,$$

$$\alpha_4 = 15,466390 a_1 + 344,039714 a_2 - 7475,051516 a_3,$$

$$\alpha_5 = -13,907360 a_1 + 306,269176 a_2 - 6832,795376 a_3,$$

$$\alpha_6 = 12,740808 a_1 + 285,073625 a_2 + 6316,238377 a_3.$$

W p. 1 podano, że naprężenia na powierzchni bocznej są określone przez funkcje $\gamma(z)$ rozwiniętą w szereg Fouriera. W przypadku badanego walca betonowego naprężeniami tymi jest przyłożone na powierzchni bocznej obciążenie równomierne. Wychodząc z tego i korzystając z rozwinięcia

$$\sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{2[(-1)^m - 1]}{m\pi} \sin \frac{m\pi(z-h)}{2h} = 1$$

można określić współczynniki γ_m . Jeżeli $m=1$, to $\gamma_1 = -18,09171$, a jeżeli $m=3$, to $\gamma_3 = -6,029723$.

W ten sposób zostały określone wszystkie wielkości występujące w rozwinięciu C_m . Dwa współczynniki C_1 i C_3 są funkcjami parametrów a_1, a_2, a_3 i mogą być wyznaczone z następującego układu równań:

$$b_1 C_1 + b_2 C_3 = b_5 a_1 + b_6 a_2 + b_7 a_3 + d_1,$$

$$b_3 C_1 + b_4 C_3 = b_8 a_1 + b_9 a_2 + b_{10} a_3 + d_2.$$

Współczynniki $b_{1,2,\dots,10}$ oraz d_1 i d_2 zostały obliczone dla wszystkich etapów obciążenia walca.

Rozwiązanie tego układu równań w sześciu przypadkach wykonano na maszynie cyfrowej ODRA 1204 w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki. Współczynniki C_1 i C_3 wynoszą:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} C_1 &= -0,333499489 a_1 - 0,571764208 a_2 - 19,325120400 a_3 + e_1 \\ C_3 &= -0,076964351 a_1 + 1,537315090 a_2 + 27,160926400 a_3 + e_3. \end{aligned}$$

Wartości e_1 i e_3 zostały obliczone we wszystkich etapach obciążenia.

Po określeniu C_1 i C_3 przemieszczenia u i w , określone przez wzory (1.11), są wyznaczone jako funkcje współczynników a_1 , a_2 i a_3 . Po wykonaniu sumowania względem m we wzorach (1.11) i po przekształceniach otrzymano następujące wzory na przemieszczenia w walcu:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u &= [0,0314 r I_0(0,0314 r) - 3,8022591 I_1(0,0314 r)] C_1 \times \\ &\quad \times \frac{\sin(0,0314 z - 1,57)}{0,01982248716} - [0,0942 r I_0(0,0942 r) - \\ &\quad - 4,6390172 I_1(0,0942 r)] C_3 \frac{\sin(0,0942 z - 4,71)}{0,28124861} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^6 \frac{\operatorname{ch} \lambda_n z}{3,36 \operatorname{ch} 50 \lambda_n J_0(22,5 \lambda_n)} [B'_n(z \operatorname{th} \lambda_n z - 50 \operatorname{th} 50 \lambda_n + \\ &\quad + 3,36 \lambda_n J_0(22,5 \lambda_n))] J_1(\lambda_n r), \\ w &= -0,34553499 C_1 - 0,03815913 C_3 - 0,4047619 s + \\ &\quad + [0,4422591 I_0(0,0314 r) - 0,0314 r I_1(0,0314 r)] C_1 \times \\ &\quad \times \frac{\cos(0,0314 z - 1,57)}{0,01982248716} + [1,2790172 I_0(0,0942 r) - \\ &\quad - 0,0942 r I_1(0,0942 r)] C_3 \frac{\cos(0,0942 z - 4,71)}{0,28124861} + \\ &\quad + \sum_{n=1}^6 \frac{\operatorname{sh} \lambda_n z}{3,36 \operatorname{ch} 50 \lambda_n J_0(22,5 \lambda_n)} \left[B'_n 50 \operatorname{th} 50 \lambda_n - z \operatorname{cth} \lambda_n z + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2,36}{\lambda_n} - 3,36 \lambda_n J_0(22,5 \lambda_n) \right] J_0(\lambda_n r). \end{aligned}$$

Badanie sum w tych wzorach wskazuje, że składniki przy $n > 1$ mają znikomy wpływ na wartości przemieszczeń. Dlatego w dalszych obliczeniach przyjęto tylko pierwsze wyrazy tych szeregów.

We wzorach (2.2) przyjęto

$$B'_1 = 0,6908601474 C_1 + 0,4105932072 C_3 + 0,03204991152 \cdot 10^{-7} + 0,097656 \alpha_1.$$

Wartości s są różne dla każdego typu przekładki.

W znalezionych wzorach na przemieszczenia walca pozostały niewiadome tylko współczynniki a_1 , a_2 , a_3 . Dla ich wyznaczenia zostaną wykorzystane przemiesz-

czenia w trzech punktach wewnątrz walca określone na podstawie zmierzonych odkształceń w walcu. Są to punkty *I*, *II* i *I2* (rys. 2). Przy tym dla określenia przemieszczeń w punktach *II* i *I2* wzięto odkształcenie wzdłuż osi *z*, natomiast w punkcie *I* zmierzono odkształcenie promieniowe. Rozpatrzono odkształcenia przy wszystkich rodzajach przekładek i przy maksymalnych obciążeniach walca. Odkształcenia te są wyrażone przez różnice przemieszczeń końców odpowiednich ramion sond, za pomocą których zmierzone były odkształcenia [5]. Odkształcenia przyjęto jako średnie ze zmierzonych w dwóch symetrycznie usytuowanych punktach. W punkcie *II* przyjęto średnie odkształcenie odkształceń zmierzonych w punktach *II* i 8. Podobnie w punkcie *I2* — średnie z punktów *I2* i 9 oraz w punkcie *I* — średnie z punktów *I* i 5. Wartość tych odkształceń podano w tablicy 2. Przemieszczenia obliczono na maszynie cyfrowej ODRA 1204 w Instytucie Podstawowych Problemów Techniki.

Tablica 2

	Przekładki typu	Obciążenie w [T]	punkt 11	punkt 12	punkt 1
			$\varepsilon_z \cdot 10^6$	$\varepsilon_z \cdot 10^6$	$\varepsilon_r \cdot 10^6$
Przed sprężeniem	1	60	95	84	9
	2	60	76	80	31
	3	60	70	67	68
Po sprężeniu	2	60	65	67	10
	2	180	242	251	20
	3	180	224	220	37

Określając współczynniki a_1 , a_2 i a_3 wyznaczono ostatecznie funkcję α_n . To pozwala na napisanie następujących wzorów na przemieszczenia w badanym walcu betonowym:

$$(2.3) \quad u = [0,0314 r I_0(0,0314 r) - 3,8022591 I_1(0,0314 r)] t_1 \sin(0,0314 z - 1,57) - \\ - [0,0942 r I_0(0,0942 r) - 4,6390172 I_1(0,0942 r)] t_2 \sin(0,0942 z - 4,71) + \\ + J_1(-0,1703 r) \operatorname{ch}(-0,1703 z) \{t_3 [z \operatorname{th}(-0,1703 z) + 50] - t_4\},$$

$$(2.4) \quad w = t_5 z + [0,4422591 I_0(0,0314 r) - 0,0314 r I_1(0,0314 r)] t_1 \cos(0,0314 z - \\ - 1,57) + [1,2790172 I_0(0,0942 r) - 0,0942 r I_1(0,0942 r)] t_2 \cos(0,0942 z - \\ - 4,71) + J_0(-0,1703 r) \operatorname{sh}(-0,1703 z) \{t_3 [-63,857889 z - \\ - z \operatorname{cth}(-0,1703 z)] + t_4\}.$$

Wartości współczynników t_1 , t_2 , t_3 , t_4 i t_5 w poszczególnych etapach badań są różne.

Znając przemieszczenia w ściskanym walcu betonowym można wyznaczyć odkształcenia promieniowe ε_r i odkształcenia wzdłuż wysokości ε_z . Po określeniu pochodnych $\partial u / \partial r$, $\partial w / \partial z$ i szeregu przekształceń otrzymujemy

$$(2.5) \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = t_5 - 0,0314 [0,4422591 I_0(0,0314 r) - 0,0314 r I_1(0,0314 r) t_1 \sin(0,0314 z - 1,57) - 0,0942 [1,2790172 I_0(0,0942 r) - 0,0942 r I_1(0,0942 r) \times t_2 \sin(0,0942 z - 4,71) - J_0(-0,1703 r) \{t_3 [-9,874999 \operatorname{ch}(-0,1703 z) - 0,1703 z] + 0,1703 \operatorname{ch}(-0,1703 z) t_4\}].$$

Podobnie po określeniu pochodnych $\partial u/\partial z$, $\partial w/\partial r$ i przekształceniach mamy

$$(2.6) \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = [0,00049298 r I_0(0,0314 r) - 0,136904 I_1(0,0314 r) - 0,00045298 r I_2(0,0314 r)] t_1 \cos(0,0314 z - 1,57) - [0,01331046 r I_0(0,0942 r) - 0,4632788 I_1(0,0942 r) - 0,00443682 r I_2(0,0942 r)] t_2 \cos(0,0942 z - 4,71) + 3,3599986 \operatorname{sh}(-0,1703 z) J_1(-0,1703) t_3.$$

W ten sposób po wykonaniu szeregu pracochłonnych obliczeń otrzymano wzory na odkształcenia walca betonowego, który jest przedmiotem badań doświadczalnych w pracy.

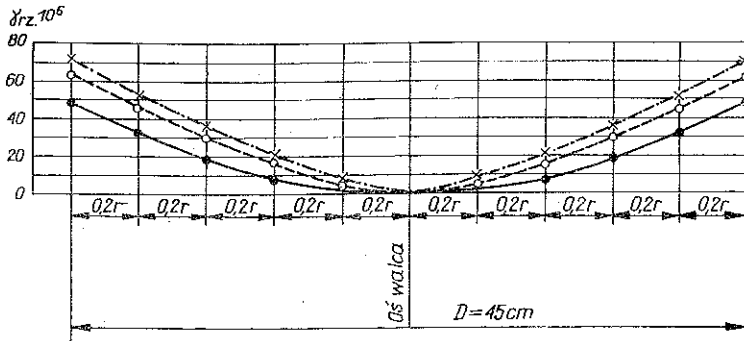
Jeżeli przeanalizować przedstawiony sposób określania odkształceń, to można zauważyć, że obciążenie przyłożone na powierzchni bocznej walca występuje tylko w wyrazach wolnych f_1, f_2, \dots, f_n równań (1.16) albo e_1, e_3 w (2.1). To pozwala na łatwe wykonanie obliczeń przy różnych wariantach tego obciążenia i zbadanie jego wpływu na stan odkształcenia walca.

Opracowana metoda daje możliwość określania wszystkich odkształceń i naprężeń w walcu o danych wymiarach i wykonanym z dowolnego materiału o znanych współczynnikach μ i E . Do tego jest potrzebna znajomość odkształceń w kilku punktach walca, a następnie należy rozwiązać układ (1.16) i określić współczynniki C_1, C_3, \dots, C_m .

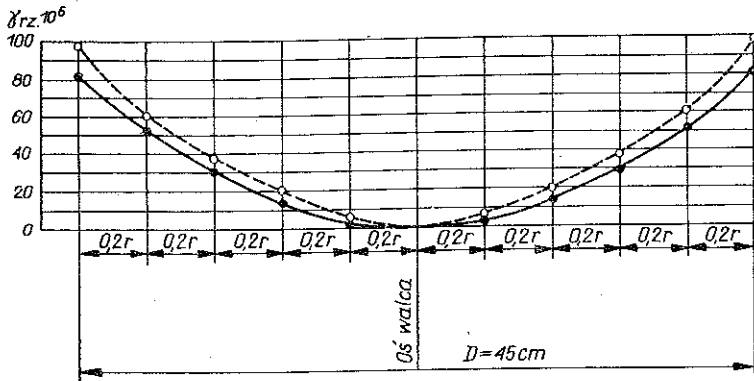
Wyprowadzone wzory pozwalają na określenie odkształceń w każdym punkcie walca betonowego poddanego ścisłaniu osiowemu. Szczególnie interesujące są odkształcenia γ_{rz} na podstawach walca wywołane siłami tarcia. Na rys. 3 pokazane są wykresy odkształceń γ_{rz} wzdłuż promienia walca przy trzech rodzajach przekładek w przypadku, gdy powierzchnia boczna walca jest wolna od obciążeń. Na rys. 4 przedstawiono analogiczne wykresy w przypadku, gdy na powierzchni bocznej walca przyłożone było równomierne obciążenie σ_p . Mając wykresy odkształceń γ_{rz} łatwo można otrzymać wykresy naprężeń stycznych na podstawach walca. Przedstawione wykresy pokazują rozkład odkształceń na podstawach walca, wywołanych przez tarcie. Przy istnieniu takiego tarcia zostały zmierzone odkształcenia wewnątrz walca. W rzeczywistości wielkości i rozkład naprężeń i odkształceń stycznych zależą od szeregu czynników. Ich określenie przez bezpośrednie pomiary jest bardzo trudne, a w przypadku próbek z materiałów kompozytowych prawie

niemożliwe, natomiast otrzymane wykresy odkształceń stycznych pozwalają na ich ocenę.

Z rysunków 3 i 4 widać, zgodnie ze wzorem (2.6), że odkształcenia γ_{rz} zerują się w środkach podstaw walca. To wskazuje, że niezależnie od ich rozkładu wzdłuż promienia i obwodu środki podstaw walca są wolne od odkształceń stycznych. We wszystkich przypadkach największe wartości odkształceń występują na obwodzie podstaw.



Rys. 3. Wykresy odkształceń stycznych γ_{rz} w niesprężonym walcu betonowym: ● — przy przekładkach typu 1, ○ — — — przy przekładkach typu 2, × — · — przy przekładkach typu 3



Rys. 4. Wykresy odkształceń stycznych γ_{rz} w sprężonym walcu betonowym: ● — przy przekładkach typu 2, ○ — — — przy przekładkach typu 3

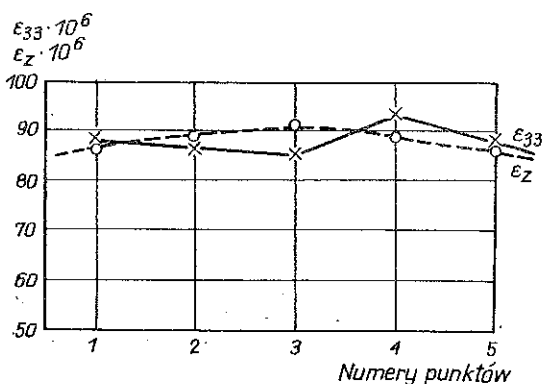
Przedstawione wykresy wskazują również, że w przypadku walca niesprężonego odkształcenia styczne są najmniejsze przy przekładkach typu 1. W przypadku walca sprężonego odkształcenia te są mniejsze przy przekładkach typu 2 niż typu 3.

Przy stosowaniu metody wyznaczania odkształceń walca betonowego przyjęto założenie, że beton jest materiałem jednorodnym izotropowym, a współczynniki μ , E i G są jednakowe we wszystkich punktach. W rzeczywistości beton jest materiałem złożonym i niejednorodnym, a odkształcenia są zmierzone w punktach wewnętrznych walca, w których nieznanne są dokładne wartości tych współczynników. Należy brać to pod uwagę przy porównywaniu wyników teoretycznych

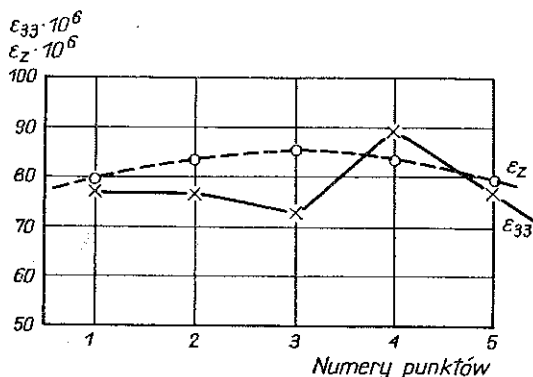
i doświadczalnych. Porównanie powyższe powinno pozwolić jednak na stwierdzenie ogólnej zgodności wyników.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy nie podano tutaj szczegółowej analizy dokładności pomiarów i jej wpływu na wyniki. Analizę taką podano w pracy [6] i wydaje się, że błędy pomiarowe nie zepsuły ilościowego obrazu uzyskanego stanu odkształcenia. Warto przypomnieć, że błędy spowodowane położeniem przyrządów pomiarowych i ich ustawieniem w walcu nie przekraczają wielkości $5 \cdot 10^{-6}$ — czyli najmniejszej działki na skali mostka tensometrycznego. Podobnie należy ocenić inne źródła błędów bezpośrednich wskazań. Składowe liniowe wykorzystane w niniejszej pracy nie zawierają błędów obliczeniowych, ponieważ są określane bezpośrednio z odczytów odpowiednich tensometrów, natomiast składowe kątowe mogą mieć błędy wynikające z wykonanych obliczeń.

Odkształcenia⁽¹⁾ wzdłuż osi walca ε_z są określone wzorem (2.5), z którego można obliczyć odkształcenia w tych punktach leżących w środkowym przekroju walca,

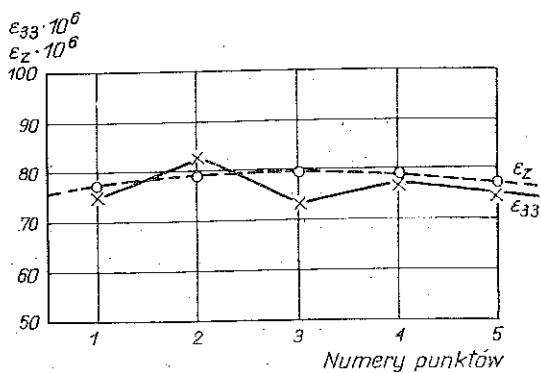


Rys. 5. Wykresy odkształceń zmierzonych ε_{33} i obliczonych ε_z w środkowym przekroju niesprężonego walca przy przekładkach typu 1

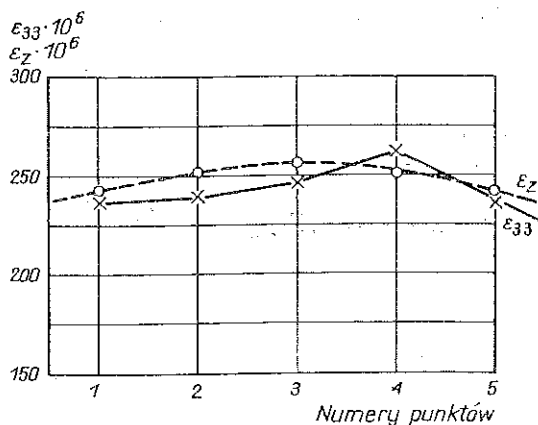


Rys. 6. Wykresy odkształceń zmierzonych ε_{33} i obliczonych ε_z w środkowym przekroju niesprężonego walca przy przekładkach typu 2

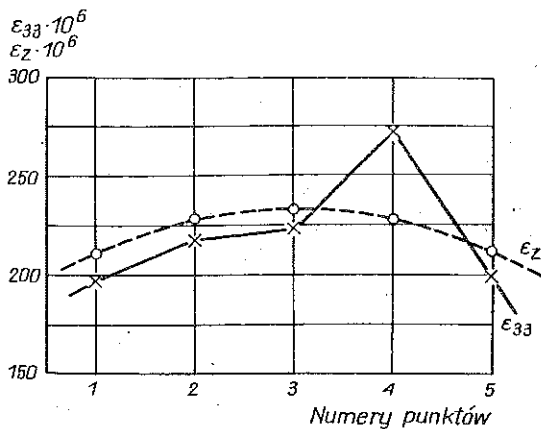
(¹) Dla ułatwienia na wykresach 5–11 odkształcenia otrzymane z pomiarów oznaczono przez ε_{33} , a odkształcenia pionowe walca otrzymane z rozwiązania teoretycznego przez ε_z .



Rys. 7. Wykresy odkształceń zmierzonych ϵ_{33} i obliczonych ϵ_z w środkowym przekroju niesprężonego walca przy przekładkach typu 3



Rys. 8. Wykresy odkształceń zmierzonych ϵ_{33} i obliczonych ϵ_z w środkowym przekroju sprężonego walca przy przekładkach typu 2

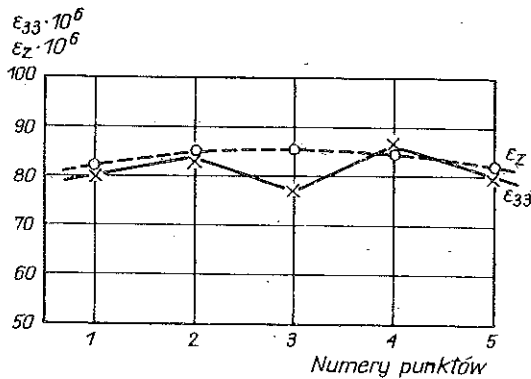


Rys. 9. Wykresy odkształceń zmierzonych ϵ_{33} i obliczonych ϵ_z w środkowym przekroju sprężonego walca przy przekładkach typu 3

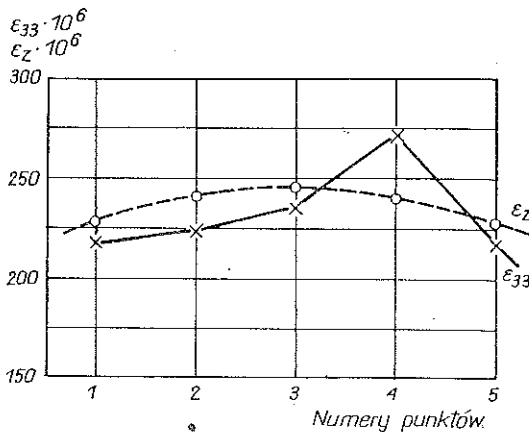
w których zostały one zmierzone. Na rys. 8 i 9 przedstawiono analogiczne wykresy w przypadku walca sprężonego. Na tych wykresach odkształcenia zmierzone wykreślono liniami ciągłymi.

Wykresy obliczonych odkształceń są krzywymi łagodnie zmiennymi wraz i największymi wartościami w osi walca. Porównanie wartości zmierzonych z obliczonych odkształceń wykazuje różnice, które mogą być wyjaśnione niejednorodnością betonu. Na wszystkich wykresach najbliższe są wartości odkształceń w punktach 1 i 5.

Ogólnie można stwierdzić, że wartości zmierzonych i obliczonych odkształceń są tego samego rzędu, a charakter ich zmienności jest podobny. Wyłączając punkt 4, w którym wpływ niejednorodności betonu był najsilniejszy, największa różnica odkształceń występuje w punkcie 3 przy przekładkach typu 3 i wynosi 16%. Na



Rys. 10. Wykresy średnich odkształceń zmierzonych i obliczonych przy trzech rodzajach przekładek w przypadku walca niesprężonego: × — średnie z odkształceń zmierzonych, ○ — — — — — średnie z odkształceń obliczonych



Rys. 11. Wykresy średnich odkształceń zmierzonych i obliczonych przy dwóch rodzajach przekładek w przypadku walca sprężonego: × — średnie z odkształceń zmierzonych, ○ — — — — — średnie z odkształceń obliczonych

większości rysunków występuje jednakowe pochylenie wykresów odkształceń zmierzonych i obliczonych. Jeżeli w każdym z pięciu punktów środkowego przekroju walca obliczyć średnie odkształcenia otrzymane z doświadczeń przy wszystkich rodzajach przekładanek i porównać je ze średnimi odkształceniami obliczonymi teoretycznie, to można zauważyć dobrą zbieżność tych wyników. Takie porównania są przedstawione na rys. 10 i 11. Z tych wykresów porównawczych widać, że wartości odkształceń otrzymane na drodze teoretycznej i doświadczalnej są zadowalająco bliskie. To daje podstawę do stwierdzenia, że przyjęta w pracy teoretyczno-doświadczalna metoda rozwiązywania zagadnienia jest prawidłowa.

Z porównania wykresów odkształceń obliczonych i zmierzonych wynika, że w rzeczywistości beton odkształca się jak materiał niejednorodny. Wykresy odkształceń zmierzonych nie są tak gładkie jak wykresy odkształceń obliczonych, chociaż wartości odkształceń różnią się nieznacznie. Przeprowadzona analiza daje jakościową ocenę stanu odkształcenia walca i pokazuje, w jakim stopniu możliwe jest porównanie wyników uzyskanych metodami teoretycznymi i doświadczalnymi przy rzeczywistych warunkach brzegowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. L. N. G. FILON, *On the equilibrium on circular cylinders under certain practical systems of load*, Trans. Roy. Soc., ser. A, 198, London 1902.
2. А. П. Мелконян, *Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины*, Изв. АН Арм. ССР, Механика, 2, 1971.
3. Г. Н. Бухаринов, *К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра*, Вестник ЛГУ, Математика — механика, вып. 2, 1952.
4. Г. М. Валов, *Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины*, Прикладная математика и механика, 21, вып. 4, Москва 1962.
5. K. JAMBOLIEW, J. KASPERKIEWICZ, *Wyniki badań ściskanego walca betonowego*, Prace IPPT, PAN, 33/1968, Warszawa.
6. K. JAMBOLIEW, *Pola odkształceń walców ściskanych z materiałów kompozytowych*, Praca doktorska, 1974.

Резюме

О ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ В ЦИЛИНДРЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Решение задачи напряжений и деформаций в упругом цилиндре встречает трудности из-за необходимости учета в граничных условиях радиальных перемещений или касательных напряжений на основаниях сжимаемого цилиндра. Целью работы является указать способ определения этих деформаций на основаниях, а также деформированного состояния целого цилиндра, когда известны деформации в нескольких его внутренних точках. Эта задача решена при смешанных граничных условиях.

SUMMARY

ON DETERMINATION OF ELASTIC STRAINS IN A CYLINDER OF FINITE LENGTH

Determination of stresses and strains in an elastic cylinder leads in to a certain difficulty connected with necessity of taking into account in the boundary conditions, i.e., at the ends of the compressed cylinder, the radial displacements or shear stresses. The aim of this paper is to show a manner for determination of the strains mentioned above at the bases of the cylinder and the state of deformations of the whole cylinder when the strains are known in some interior points of the cylinder. The problem above was solved at the assumption of the mixed boundary conditions.

CENTRALNE LABORATORIUM MECHANIKI FIZYKO-CHEMICZNEJ
BULGARSKIEJ AKADEMII NAUK W SOFII

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 maja 1975 r.
