

## DYNAMIKA PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O ZMIENNYCH PRZEKROJACH OTWARTYCH

JERZY WEKBEZER (GDAŃSK)

Omawiany problem rozwiązano drogą zastosowania metody elementów skończonych oraz założeń upraszczających teorii profili cienkościennych do liniowej teorii powłok. Pręt podzielono płaszczyznami prostopadłymi do jego osi podłużnej tworząc tzw. segmenty, a następnie dokonano aproksymacji powierzchni środkowej każdego segmentu za pomocą elementów trójkątnych. Dla tak opisanego segmentu skonstruowano macierz sztywności i macierz mas. Rozwiązano układ równań ruchu otrzymując częstości i postacie drgań własnych pręta. Metodę zaprogramowano na EMC ODRA 1204 w języku Algol-60 i zilustrowano przykładem liczbowym.

### 1. WSTĘP

Praca niniejsza stanowi kontynuację zagadnień dotyczących prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych i ściśle związana jest z pracą [5], poświęconą analizie statystycznej rozważanych prętów. Podobnie jak w [5], koncepcja rozwiązania zagadnienia dynamicznego oparta jest na wykorzystaniu metody elementów skończonych w liniowej teorii powłok z zastosowaniem założeń upraszczających teorii profili cienkościennych, podanych w [7] przez W. Z. WŁASOWA. Macierz sztywności, występująca w równaniu drgań własnych pręta, przyjęta została jak w [5], natomiast dodatkowo występująca tu macierz mas wyznaczono w tzw. konsyistentnej postaci [1 i 6].

Po odpowiednich przekształceniach macierzowego równania zagadnienia oblicza się dla niego wartości własne i wektory własne, a następnie dla znanych wektorów własnych i parametrów geometrycznych pręta wyznacza się jego postacie drgań w formie najwygodniejszej do analizy.

### 2. FUNKCJA KSZTAŁTU

Pręt cienkościenny o zmiennym przekroju otwartym i długości  $l$  podzielmy myślowo na odcinki o długościach  $\Delta z_i$  płaszczyznami prostopadłymi do osi podłużnej pręta  $z$ . Odcinki te nazywane są dalej segmentami. Przemieszczenie dowolnego punktu leżącego na powierzchni wybranego segmentu pręta można na podstawie [5] zapisać w postaci wektora

$$(2.1) \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x - (y - c_y) \theta \\ \xi_y - (x - c_x) \theta \\ \zeta - x \xi'_x - y \xi'_y + (\Omega_1 + \Omega_2 z + \Omega_3 z^2 - \omega) \theta' \end{bmatrix},$$

gdzie  $u_1, u_2, u_3$  oznaczają przemieszczenia dowolnego punktu na powierzchni pręta wzdłuż osi  $x, y$  i  $z$ ,  $\xi_x, \xi_y, \xi_z$  translacje całego przekroju poprzecznego pręta odpowiednio wzdłuż osi  $x, y$  i  $z$ ,  $\theta$  kąt skreślenia przekroju poprzecznego oraz  $c_x, c_y$  współrzędne dowolnie przyjętej osi skręcania.

We współrzędnej  $u_3$  wektora (2.1) występuje podany w nawiasach trójmian kwadratowy względem  $z$ , który przedstawia współrzędną wycinkową rozważanego punktu. Aproksymacja powierzchni środkowej segmentu dokonywana jest zgodnie z pracą [5] przez zbiór płaskich elementów trójkątnych; z tego względu  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  są pewnymi stałymi zależnymi od wymiarów tych elementów, a  $\omega$  jest przyrostem współrzędnej wycinkowej w obszarze badanego elementu trójkątnego (odpowiednie wzory podano w [5]).

Przemieszczenia translacyjne oraz kąt skręcania  $\theta$  przekroju poprzecznego pręta przyjęto w [5] w postaci

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \xi_y &= \alpha_1 + \alpha_2 z + \alpha_3 z^2 + \alpha_4 z^3, \\ \xi_x &= \alpha_5 + \alpha_6 z + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 z^3, \\ \xi_z &= \alpha_9 + \alpha_{10} z + \lambda \left(1 - \frac{z}{Az}\right) \frac{z}{Az}, \\ \theta &= \alpha_{11} + \alpha_{12} z + \alpha_{13} z^2 + \alpha_{14} z^3. \end{aligned}$$

Czternaście parametrów  $\alpha_i$  stanowiących składowe wektora  $\alpha$  wyznaczyć można jako funkcje przemieszczeń węzłowych segmentu  $\delta^s$  ([5]):

$$(2.3) \quad \alpha = C^{-1} \delta^s,$$

gdzie  $C^{-1}$  jest macierzą  $14 \times 14$  o elementach zależnych od długości segmentu  $Az_i$ . Parametr  $\lambda$  występujący w (2.2) nie zależy od przemieszczeń węzłowych  $\delta^s$ , a wyznaczyć go można drogą minimalizacji całkowitej energii sprężystej segmentu.

Do współrzędnych wektora (2.1) podstawić można przyjęte funkcje przemieszczeń (2.2) oraz ich pochodne, co pozwala na przedstawienie tego wektora w postaci

$$(2.4) \quad u = \Phi \alpha + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(1 - \frac{z}{Az}\right) \frac{z}{Az} \end{bmatrix} \lambda.$$

Przez podstawienie (2.3) do (2.4) otrzymujemy:

$$(2.5) \quad u = \Phi C^{-1} \delta^s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(1 - \frac{z}{Az}\right) \frac{z}{Az} \end{bmatrix} \lambda.$$

Łatwo zauważyć, że macierz  $\Phi$  ( $3 \times 14$ ) zależy od zmiennych  $x, y, z$ . Między tymi zmiennymi a współrzędnymi  $z, s$  na powierzchni pręta istnieje zależność

$$(2.6) \quad x = M + Pz + Rs, \quad y = J + Kz + Ls.$$

Stałe występujące w (2.6) są wielkościami zależnymi od wielkości geometrycznych elementów trójkątnych i podane zostały w [5]. Ostateczną i najwygodniejszą do całkowania postać macierzy  $\Phi$  podaje tablica 1.

Tablica 1. Macierz  $\Phi^T$  we współrzędnych  $z, s, \omega$

	1	
	$z$	$-(J+Kz+Ls-c_y)$
	$z^2$	$-2z(J+Kz+Ls-c_y)$
	$z^3$	$-3z^2(J+Kz+Ls-c_y)$
1		
$z$		$-(M+Pz+Rs-c_x)$
$z^2$		$-2z(M+Pz+Rs-c_x)$
$z^3$		$-3z^2(M+Pz+Rs-c_x)$
		1 /
		$z$
$-(J+Kz+Ls-c_y)$	$M+Pz+Rs-c_x$	
$-z(J+Kz+Ls-c_y)$	$z(M+Pz+Rs-c_x)$	$(\Omega_1 + \Omega_2 z + \Omega_3 z^2 - \omega)$
$-z^2(J+Kz+Ls-c_y)$	$z^2(M+Pz+Rs-c_x)$	$-2z(\Omega_1 + \Omega_2 z + \Omega_3 z^2 - \omega)$
$z^3(J+Kz+Ls-c_y)$	$z^3(M+Pz+Rs-c_x)$	$-3z^2(\Omega_1 + \Omega_2 z + \Omega_3 z^2 - \omega)$

Jeżeli  $\lambda$  w (2.5) potraktować jako uogólnione przemieszczenie na równi z  $\delta^s$ , to zgodnie z przyjętą definicją [6], funkcją kształtu oprócz iloczynu  $\Phi C^{-1}$  będzie również składnik  $\left(1 - \frac{z}{Az}\right) \frac{z}{Az}$ , który uwzględnić należy zarówno w macierzy sztywności, jak i macierzy mas każdego segmentu.

### 3. RÓWNANIE MACIERZOWE ZAGADNIENIA

Macierzowe równanie drgań własnych pręta napiszemy w postaci układu jednorodnych równań różniczkowych o  $r$  równaniach:

$$(3.1) \quad K\delta + M \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta = 0.$$

Układ równań (3.1) opisuje drgania własne przy pominięciu tłumienia. Zaniedbanie tego efektu jest o tyle uzasadnione, że wpływ tłumienia na częstości i odpowiadające im formy drgań własnych jest mały dla większości rozwiązań konstrukcyjnych [4]. Drugi składnik równania (3.1) uwzględnia siły bezwładności d'Alemberta, przy czym globalna macierz mas  $M$ , podobnie jak globalna macierz sztywności  $K$ , jest macierzą pasmową i symetryczną. Rozwiązanie układu (3.1) zakłada się w postaci harmonicznego

$$(3.2) \quad \delta = X \sin \omega t.$$

Po wstawieniu (3.2) do układu równań (3.1) uzyskuje się, po podzieleniu przez  $\sin \omega t$ , układ  $r$  jednorodnych równań algebraicznych:

$$(3.3) \quad (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{X} = \mathbf{0}.$$

Jak wiadomo, układ równań ruchu (3.3) ma tylko wtedy rozwiązanie nietrywialne, gdy wyznacznik wyrażenia w nawiasach (3.3) równy jest zeru. Własność tę wykorzystuje się do obliczeń częstości drgań własnych  $\omega$  i odpowiadających im wektorów własnych  $\mathbf{X}$ .

#### 4. MACIERZ MAS

Macierz sztywności segmentu  $\mathbf{K}^S$  wyznaczona w [5] ma wymiar  $15 \times 15$  i została wyprowadzona w dwóch etapach. Początkowo uwzględniono wpływ pierwszego składnika funkcji kształtu, tj.  $\Phi \mathbf{C}^{-1}$ , w wyniku czego otrzymano macierz o wymiarach  $14 \times 14$ , która odpowiada pełnej macierzy sztywności  $\mathbf{K}^S$  z nieuzupełnionym ósmym wierszem i kolumną. Drugi składnik funkcji kształtu  $\left(1 - \frac{z}{\Delta z}\right) \frac{z}{\Delta z}$ , z tak dobranym jednocześnie parametrem  $\lambda$ , aby całkowita energia sprężysta segmentu miała wartość minimalną, powoduje uzupełnienie macierzy sztywności.

W analogiczny sposób zbudować można macierz mas dla segmentu, której główny składnik zgodnie z [6] wynika z funkcji kształtu  $\Phi \mathbf{C}^{-1}$ :

$$(4.1) \quad \mathbf{M}^S = (\mathbf{C}^{-1})^T \int_{V^S} \Phi^T \Phi dV^S \mathbf{C}^{-1} \rho.$$

Całkowanie w (4.1) dotyczy objętości całego segmentu, a  $\rho$  jest jego masą właściwą. Ponieważ cały obszar całkowania  $V^S$  składa się z podobszarów  $\Gamma^e$  w postaci elementów trójkątnych o grubości  $t$ , więc całkę (4.1) zamienić można na sumę całek w granicach każdego elementu trójkątnego:

$$(4.2) \quad \mathbf{M}^S = \rho (\mathbf{C}^{-1})^T \sum_{i=1}^n \left( t \sqrt{a} \int_{\Gamma^e} \Phi^T \Phi ds dz \right) \mathbf{C}^{-1},$$

przy czym  $a$  jest tutaj wyznacznikiem tensora metrycznego dla rozważanego elementu trójkątnego (jakobianem przekształcenia z układu ukośnokątnego do ortokartezjańskiego).

Uzyskanie jawnej postaci macierzy mas okazuje się jednak kłopotliwe ze względu na proste pod względem formalnym, lecz bardzo żmudne rachunki. Pomimo tego, całki występujące w macierzach sztywności i mas udało się w opracowanych programach obliczać w sposób ścisły.

Macierz mas musi mieć oczywiście ten sam wymiar, jaki ma macierz sztywności. Należy więc rozszerzyć ją do piętnastu wierszy i piętnastu kolumn analizując drugi składnik funkcji kształtu występujący w (2.5). Ponieważ zawiera on tylko jedną współzrzedną niezerową, zgodnie z [6], będzie więc

$$(4.3) \quad M^S [8,8] = \int_{V^S} \frac{z^2}{\Delta z^2} \left(1 - \frac{z}{\Delta z}\right)^2 \rho dV^S.$$

Wzór (4.3) przedstawia wartość elementu w ósmym wierszu macierzy mas położonego na głównej przekątnej. Pozostałe elementy tego wiersza i kolumny będą równe zeru. Przez zamianę całki (4.3) na sumę całek w granicach każdego elementu trójkątnej otrzymuje się:

$$(4.4) \quad M^S [8,8] = \rho \sum_{i=1}^n t \sqrt{a} \int_{r^0} \int \frac{z^2}{\Delta z^2} \left( 1 - \frac{z}{\Delta z} \right)^2 ds dz.$$

Wzory (4.2) i (4.4) określają sposób konstruowania macierzy mas segmentu. Globalna macierz mas  $\mathbf{M}$  ma analogiczną budowę do globalnej macierzy sztywności. Warunki brzegowe w macierzy mas uwzględnia się przez całkowite zerowanie wiersza i kolumny łącznie z elementem na głównej przekątnej o numerze  $i$  odpowiadającym  $i$ -tej, zerowej współrzędnej wektora własnego  $\mathbf{X}$  układu (3.3). Postępowanie to równoważne jest wyeliminowaniu  $i$ -tego stopnia swobody układu.

## 5. WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE UKŁADU

Łatwo jest rozwiązać zagadnienie wartości własnych dla układu równań typu

$$(5.1) \quad \mathbf{H}\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y},$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest macierzą symetryczną dodatnio określoną.

Aby doprowadzić układ równań (3.3) do postaci (5.1) nie tracąc symetrii podczas odwracania macierzy sztywności, przedstawimy tę macierz podobnie jak w pracy [6] w postaci iloczynu

$$(5.2) \quad \mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T.$$

Macierz  $\mathbf{L}$  oznacza tu macierz trójkątną dolną powstałą z rozkładu macierzy sztywności. Za pomocą (5.2) zapisać można układ równań (3.3), po odwróceniu macierzy sztywności, w równoważnej postaci

$$(5.3) \quad \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{L}^T\mathbf{X},$$

gdzie  $\lambda = 1/\omega^2$ .

Wprowadzając do wzoru (5.3) oznaczenie

$$(5.4) \quad \mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}$$

otrzymuje się

$$(5.5) \quad \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{L}^{-1})^T\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y}.$$

Jest to postać odpowiadająca (5.1). Z porównania tych wzorów wynika, że  $\mathbf{H}$  jest macierzą symetryczną (forma kwadratowa). Dla tej macierzy poszukuje się wartości własnych  $\lambda$  i wektorów własnych  $\mathbf{Y}$  metodą Householdera za pomocą ogólnodostępnych programów zawartych w pakietach firmowych komputerów. Po ich wyznaczeniu częstości drgań własnych znaleźć można z (5.3)<sub>2</sub>:

$$(5.6) \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

a następnie wektory własne układu (3.3) na podstawie (5.4):

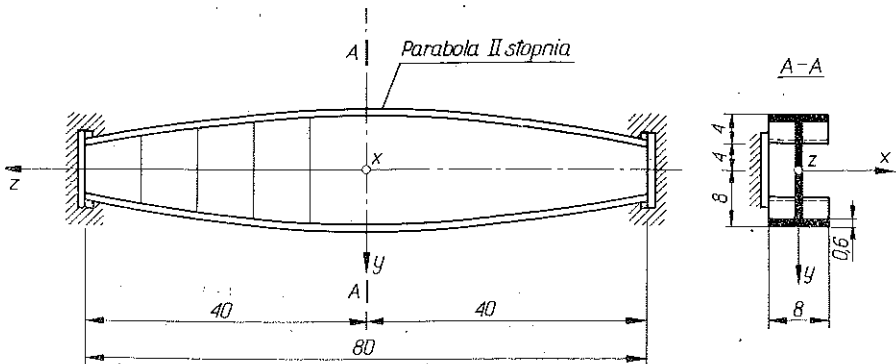
$$(5.7) \quad \mathbf{X} = (\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{Y}.$$

Otrzymany w (5.7) wektor własny zależy od przyjętego położenia początku układu współrzędnych. Wielkością niezależną od tego przyjęcia są bezpośrednie przemieszczenia danych na konturze punktów. Przemieszczenia te są funkcją wektorów własnych (5.7) oraz wymiarów geometrycznych przekrojów poprzecznych pręta a ich wyznaczenie znacznie ułatwia analizę form drgań.

Przemieszczenia dowolnego punktu wzdłuż osi  $x$ ,  $y$ ,  $z$  opisuje wektor (2.1). Jeśli we wzorze tym przyjąć  $z=0$ , co oznacza węzeł początkowy segmentu, to wielkości  $\xi_y$ ,  $\xi'_y$ ,  $\xi_x$ ,  $\xi'_x$ ,  $\zeta$ ,  $\theta$  i  $\theta'$  będą przemieszczeniami węzła początkowego segmentu, określonymi wektorem własnym (5.7). Pozostałe wielkości w (2.1) są współrzędnymi opisującymi położenie punktów na konturze. Znając współrzędne tych punktów w położeniu równowagi oraz przemieszczenia węzłowe z wektora (5.7) obliczać można przemieszczenia każdego punktu na konturze. Przemieszczenia te jednoznacznie określają postacie drgań rozważanego pręta.

## 6. PRZYKŁAD LICZBOWY

Opisaną w pracy metodę zaprogramowano na komputer ODRA 1204 w języku Algol-60. W celu jej weryfikacji obliczono częstości i postacie drgań własnych wolno podpartej belki dwuteowej o średniku zmiennym według paraboli II stopnia (rys. 1). Temat tego przykładu wybrany został nieprzypadkowo, bowiem zagadnienie to zostało wcześniej rozwiązane przez Z. CYWIŃSKIEGO, a wyniki podano w pracach [2 i 3]. Należy jednak podkreślić, że przedstawiona metoda pozwala na rozwiązywanie prętów o bardziej skomplikowanych przekrojach poprzecznych. Dlatego też zamieszczony tu przykład nie jest najbardziej reprezentatywny dla podkreślenia możliwości metody, natomiast wykazać ma jedynie jej poprawność.

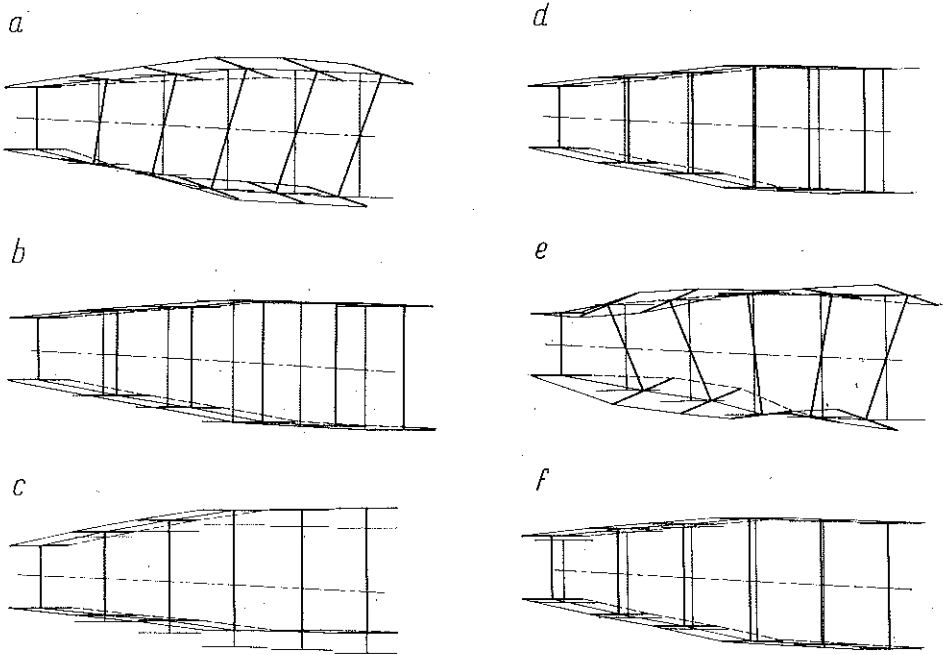


Rys. 1. Wolnopodparta belka dwuteowa o parabolicznie zmiennej wysokości średnika

W przykładzie rozważa się symetryczne drgania własne dzieląc powłokę belki na pięć segmentów o czterdziestu stopniach swobody. Tyle też otrzymano wartości własnych i wektorów własnych. Wiadomo jednak, że najistotniejsze z nich są najniż-

sze częstotliwości i dopowiadające im postacie drgań. Rysunek 2 przedstawia pierwsze sześć form symetrycznych drgań połowy pręta.

Otrzymane wyniki są zgodne z przewidywanymi, a ponadto pierwsza częstość drgań skrętnych  $\omega=322$  jest praktycznie tą samą częstością, jaką podał Z. CYWIŃSKI ( $\omega=321$ ) w [2 i 3] rozwiązując różniczkowy układ równań ruchu metodą różnic skończonych (wyższych częstości w [2 i 3] nie obliczono).



Rys. 2. Symetryczne częstości i postacie drgań własnych belki dwuetowej

- a) Częstość I: 322. Drgania skrętne
- b) Częstość II: 390. Drgania poziome
- c) Częstość III: 1402. Drgania pionowe
- d) Częstość IV: 3519. Drgania poziome o dwóch półfalach
- e) Częstość V: 3829. Drgania skrętne o dwóch półfalach
- f) Częstość VI: 6204. Drgania podłużne

Otrzymane postacie drgań wskazują na spełnienie wszystkich poczynionych założeń. Tak więc drganiom skrętnym towarzyszy pacyzenie się przekrojów poprzecznych, drganiom giętnym — odpowiednie obroty płaszczyzn przekrojów, a drganiom podłużnym — równoległe przemieszczenie się punktów na konturze pręta wzdłuż jego osi.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. S. ARCHER, *Consistent matrix formulations for structural analysis using finite-element techniques*, AIAA Journal, 3, 10, 1910-1918, 1965.
2. Z. CYWIŃSKI, *Statyka i dynamika skręcanego, cienkościennego dwuetownika o zmiennym, bismetrycznym przekroju poprzecznym*, Rozpr. Inżyn., 17, 2, 185-217, 1969.

3. Z. CYWIŃSKI, *Techniczna teoria prętów cienkościennych o zmiennych, otwartych przekrojach złożonych*, Zeszyty Naukowe P.G., Nr 134, 1968.
4. KRUSZEWSKI, J., MAJEWSKI, *Metoda sztywnych elementów skończonych w zastosowaniu do obliczeń częstości drgań własnych złożonych układów liniowych*, Zeszyty Naukowe P.G., nr 165. Mechanika, Zeszyt XII, Gdańsk 1971.
5. J. WEKEZER, *Statyka prętów cienkościennych o zmiennych przekrojach otwartych*, Rozpr. Inżyn., 1, 1976.
6. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.
7. В. З. Власов, *Тонкостенные упругие стержни*, Государственное Издательство Физико-Математической Литературы, Москва 1959.

### Резюме

#### ДИНАМИКА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО, ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Рассматриваемая проблема решена при употреблении метода конечных элементов и упрощающих предположений теории тонкостенных стержней в линейной теории оболочек. Стержень разделен вертикальными плоскостями по отношению его продольной оси, создавая так называемые сегменты и затем осуществлена аппроксимация срединной поверхности каждого сегмента при помощи треугольных элементов. Для так описанного сегмента составлена матрица жёсткости и матрица масс. Решена система уравнений движения, получая частоты и формы собственных колебаний стержня. Метод запрограммирован на цифровой машине ОДРА 1204 на языке Альголь-60 и проиллюстрирован примером.

### SUMMARY

#### DYNAMICS OF THIN-WALLED BARS WITH VARIABLE OPENED CROSS-SECTION

The problem under discussion was solved with the help of the finite elements method and simplified assumption to the linear shell theory. The bar was divided into segments by vertical surfaces towards the oblong axis of the bar and then the segment's central area was approximated with the help of triangular elements. For each segment the stiffness matrix and the mass matrix was constructed. System equations of motion were solved, then frequency and vibration forms of the bar were obtained. This method was programmed for computer ODRA 1204 in Algol-60 language. As an illustration, an example was presented.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 27 czerwca 1975 r.*