

TŁUMIONE DRGANIA STRUNY I PRĘTA WYWOŁANE RUCHOMĄ SIŁĄ

PAWEŁ ŚNIA D Y (WROCLAW)

W pracy rozpatruje się tłumione drgania struny i pręta wywołane ruchomą siłą (momentem) poruszającą się ze stałą prędkością. Funkcję określającą drgania aperiodyczne przedstawia się w postaci zamkniętej.

1. WSTĘP

Drgania pręta, wywołane ruchomą siłą poruszającą się ze stałą prędkością, rozpatrywane były przez wielu badaczy. Pierwsze prace opublikowane przez KRYŁOWA [1] i TIMOSHENKĘ [2] podawały rozwiązania dla belki swobodnie podpartej w postaci sumy dwóch szeregów. W pracy [3] autor, stosując metodę nakładania ugięć, wykazał dla belki swobodnie podpartej, że część rozwiązania, określająca drgania aperiodyczne pręta, można przedstawić w postaci zamkniętej. Metodę tę zastosowano w [4] przy wyznaczaniu drgań belki z uwzględnieniem tłumienia proporcjonalnego do prędkości przemieszczeń. Rozwiązania zamknięte dla innych warunków brzegowych podano w [5]. W niniejszej pracy omawia się problem tłumionych drgań struny i pręta wywołanych ruchomą siłą (momentem). Funkcję określającą drgania aperiodyczne przedstawia się w postaci zamkniętej. Formy zamknięte wyznacza się wykorzystując fakt, że całka szczególna równania różniczkowego cząstkowego jest również rozwiązaniem pewnego równania różniczkowego zwyczajnego. Przyjmuje się, że dla struny tłumienie jest proporcjonalne do prędkości wychylenia, natomiast dla pręta odpowiada modelowi reologicznemu Voigta. Podaje się rozwiązanie dla struny, gdy jest ona półnieskończona, nieskończona i skończonej długości, a w przypadku pręta, gdy jest on skończonej długości, rozpatrując zarówno drgania skrętne jak i poprzeczne. Podane rozwiązania zamknięte można wykorzystać przy wyznaczeniu drgań belek mostowych, ciągnia kolejek linowych, sieci trakcyjnej kolejowej itp.

2. STRUNA O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Drgania poprzeczne lepkosprężystej struny wywołane siłą skupioną, poruszającą się ze stałą prędkością v (rys. 1), opisuje równanie [6]

$$(2.1) \quad -S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \delta(x-vt),$$

gdzie β oznacza współczynnik tłumienia, m masę struny przypadającą na jednostkę długości oraz $\delta(x)$ funkcję delta-Diraca. Pozostałe oznaczenia są na rys. 1.

Po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$(2.2) \quad X = \frac{x}{l}, \quad T = \frac{vt}{l}, \quad X, T \in [0, 1]$$

równanie (2.1) przyjmuje postać

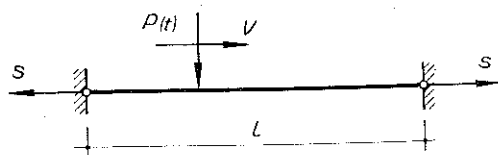
$$(2.3) \quad -w'' + \mathfrak{g}\dot{w} + \eta^2 \ddot{w} = P_0 \delta(X-T),$$

gdzie

$$\mathfrak{g} = \beta \frac{vl}{S}, \quad \eta = \frac{v}{v_p},$$

$$v_p = \sqrt{\frac{S}{m}}, \quad P_0 = \frac{Pl}{S},$$

$$(\cdot)' = \frac{\partial}{\partial X}, \quad (\cdot)^{\cdot} = \frac{\partial}{\partial T}.$$



Rys. 1

Parametr η występujący we wzorze (2.3) określa stosunek prędkości poruszania się siły do prędkości rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie sprężystej. Warunki brzegowe dla struny utwierdzonej na końcach mają postać

$$(2.4) \quad w(0, T) = w(1, T) = 0.$$

Przyjęto następujące warunki początkowe:

$$(2.5) \quad w(X, 0) = 0, \quad \dot{w}(X, 0) = 0.$$

Wykonując na równaniu (2.3) skończoną transformację sinusową Fouriera otrzymuje się

$$(2.6) \quad \ddot{\bar{w}}(n, T) + \frac{\mathfrak{g}}{\eta^2} \dot{\bar{w}}(n, T) + \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 \bar{w}(n, T) = P_0 \sin n\pi T,$$

gdzie

$$\bar{w}(n, T) = \int_0^1 w(X, T) \sin n\pi X dX.$$

Całki szczególnej równania (2.6) poszukujemy w postaci

$$(2.7) \quad \bar{w}_1(n, T) = A_n \sin n\pi T + B_n \cos n\pi T.$$

Po podstawieniu (2.7) do (2.6) i wyznaczeniu stałych A_n i B_n otrzymuje się

$$(2.8) \quad \bar{w}_1(n, T) = \frac{(1-\eta^2)P_0 \sin n\pi T}{(n\pi)^2(1-\eta^2)^2 + \mathfrak{g}^2} - \frac{\mathfrak{g}n\pi P_0 \cos n\pi T}{(n\pi)^2[(n\pi)^2(1-\eta^2)^2 + \mathfrak{g}^2]}.$$

Postać całki ogólnej równania jednorodnego zależy od parametrów \mathfrak{g} i η . Gdy tłumienie jest mniejsze od tzw. tłumienia krytycznego $[(\mathfrak{g}/2\eta) < \pi]$ otrzymuje się

$$(2.9) \quad \bar{w}_2(n, T) = e^{-\frac{\mathfrak{g}}{2\eta^2}T} (C_n \cos \omega_n T + D_n \sin \omega_n T), \quad \omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 - \left(\frac{\mathfrak{g}}{2\eta^2}\right)^2}.$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej i uwzględnieniu (2.8), (2.9), rozwiązanie przyjmuje postać

$$(2.10) \quad w(X, T) = w_1(X, T) + w_2(X, T) =$$

$$= 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\eta^2)(n\pi)^2 \sin n\pi T - \vartheta n\pi \cos n\pi T}{(n\pi)^2 [(n\pi)^2 (1-\eta^2)^2 + \vartheta^2]} \sin n\pi X +$$

$$+ 2e^{-\frac{\vartheta}{2\eta^2} T} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cos \omega_n T + D_n \sin \omega_n T) \sin n\pi X.$$

Stałe C_n i D_n dla warunków początkowych (2.5) wynoszą

$$(2.11) \quad C_n = \frac{P_0 \vartheta}{n\pi [(n\pi)^2 (1-\eta^2)^2 + \vartheta^2]},$$

$$D_n = \frac{P_0 [\vartheta^2 - 2\eta^2 (1-\eta^2) (n\pi)^2]}{2\eta^2 n\pi \omega_n [(n\pi)^2 (1-\eta^2)^2 + \vartheta^2]}.$$

Funkcja $w_1(X, T)$ określona pierwszym szeregiem we wzorze (2.10) przedstawia drgania aperiodyczne struny. Przedstawimy ją w postaci zamkniętej. Zauważmy, że spełnia ona nie tylko równanie różniczkowe cząstkowe (2.3), ale również równanie różniczkowe zwyczajne

$$(2.12) \quad (1-\eta^2)^2 w_1^{IV} - \vartheta^2 w_1'' = -P_0 (1-\eta^2) \delta''(X-T) + P_0 \vartheta \delta'(X-T),$$

przy warunkach brzegowych

$$(2.13) \quad w_1(0, T) = w_1(1, T) = 0, \quad w_1''(0, T) = w_1''(1, T) = 0.$$

Aby to wykazać, wystarczy wykonać na równaniu (2.12) skończoną transformację sinusową Fouriera uwzględniając warunki brzegowe (2.13):

$$(2.14) \quad [(1-\eta^2)^2 (n\pi^4) + (n\pi)^2 \vartheta^2] \bar{w}_1(n, T) =$$

$$= P_0 (n\pi)^2 (1-\eta^2) \sin n\pi T - P_0 \vartheta n\pi \cos n\pi T.$$

We wzorze (2.14) uwzględniono zależność [7]

$$\int_0^1 \delta^{(k)}(X-T) \sin n\pi X dX = (-1)^k \sin^{(k)} n\pi T.$$

Po wykonaniu transformacji odwrotnej

$$(2.15) \quad w_1(X, T) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_1(n, T) \sin n\pi X,$$

z (2.14) otrzymuje się funkcję określoną pierwszym szeregiem w (2.10), co należało wykazać. Po rozwiązaniu równania (2.12), np. za pomocą transformacji Laplace'a, otrzymuje się dla $\eta < 1$

$$(2.16) \quad \begin{aligned} w_1(X, T) &= \frac{P_0}{g} X - \frac{P_0}{g} e^{-\alpha(1-T)} \frac{\text{sh } \alpha X}{\text{sh } \alpha} & \text{dla } X \leq T, \\ w_1(X, T) &= -\frac{P_0}{g} (1-X) + \frac{P_0}{g} e^{\alpha T} \frac{\text{sh } \alpha (1-X)}{\text{sh } \alpha} & \text{dla } X \geq T, \end{aligned}$$

gdzie $\alpha = g/(1-\eta^2)$.

W szczególnym przypadku, gdy prędkość poruszania się siły jest równa prędkości rozchodzenia się fali poprzecznej w strunie sprężystej ($\eta = 1$) z równania (2.12) i ze wzorów (2.10), (2.11) otrzymuje się

$$(2.17) \quad w(X, T) = \frac{P_0}{g} \left\{ [X - H(X-T)] + 2e^{-\frac{g}{2}T} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \omega_n T}{n\pi} + \frac{g \sin \omega_n T}{2\omega_n n\pi} \right] \sin n\pi X \right\} \quad \text{dla } \frac{g}{2} < \pi, \quad \eta = 1,$$

gdzie

$$\omega_n = \sqrt{(n\pi)^2 - \left(\frac{g}{2}\right)^2},$$

$$H(X-T) = \begin{cases} 0 & \text{dla } X < T, \\ 1/2 & \text{dla } X = T, \\ 1 & \text{dla } X > T. \end{cases}$$

3. STRUNA PÓŁ- I NIESKOŃCZENIE DŁUGA

Drgania struny spoczywającej na sprężystym podłożu typu Winklera i wywołane ruchomą siłą określa równanie

$$(3.1) \quad -w'' + k_0 w + g\dot{w} + \eta^2 \ddot{w} = P_0 \delta(X-T),$$

gdzie $k_0 = kl^2/S$ oraz gdzie k oznacza współczynnik sprężystości podłoża.

Rozpatrzmy drgania struny półnieskończonej, spełniającej warunki brzegowe

$$(3.2) \quad w(0, T) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} w(X, T) = 0,$$

gdzie l oznacza dowolną długość porównawczą.

W rozważaniach pominiemy wpływ warunków początkowych, a więc rozwiązanie ograniczymy do wyznaczenia funkcji $w_1(X, T)$. Wykonując na równaniu (3.1) sinusową transformację Fouriera i postępując podobnie jak w p. 2 otrzymuje się

$$(3.3) \quad w_1(X, T) = \frac{2}{\pi} P_0 \int_0^{\infty} \frac{[(1-\eta^2)\alpha^2 + k_0] \sin \alpha T - g\alpha \cos \alpha T}{(1-\eta^2)^2 \alpha^4 + [g^2 + 2k_0(1-\eta^2)] \alpha^2 + k_0^2} \sin \alpha X d\alpha.$$

Dowodzi się, podobnie jak w p. 2, że całka (3.3) spełnia również równanie

$$(3.4) \quad (1-\eta^2)^2 w_1^{IV} - [\vartheta^2 + 2k_0(1-\eta^2)] w_1'' + k_0^2 w_1 = \\ = P_0 [-(1-\eta^2)\delta''(X-T) + \vartheta\delta'(X-T) + k_0\delta(X-T)].$$

Po rozwiązaniu równania (3.4) otrzymuje się funkcję $w_1(X, T)$ w postaci

$$(3.5) \quad w_1(X, T) = \frac{P_0}{(1-\eta^2)^2 (s_2^2 - s_1^2)} \left[\frac{k_0 + \vartheta s_1 - s_1^2 (1-\eta^2)}{s_1} e^{-s_1 T} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{sh} s_1 X - \frac{k_0 + \vartheta s_2 - s_2^2 (1-\eta^2)}{s_2} e^{-s_2 T} \operatorname{sh} s_2 X \right] \quad \text{dla } X \leq T, \\ w_1(X, T) = \frac{P_0}{(1-\eta^2)^2 (s_2^2 - s_1^2)} \left\{ e^{-s_1 X} \left[\frac{k_0 - s_1^2 (1-\eta^2)}{s_1} \operatorname{sh} s_1 T - \vartheta \operatorname{ch} s_1 T \right] - \right. \\ \left. - e^{-s_2 X} \left[\frac{k_0 - s_2^2 (1-\eta^2)}{s_2} \operatorname{sh} s_2 T + \vartheta \operatorname{ch} s_2 T \right] \right\} \quad \text{dla } X \geq T,$$

gdzie

$$s_1^2 = \frac{\vartheta^2 + 2k_0(1-\eta^2) - \vartheta \sqrt{\vartheta^2 + 4k_0(1-\eta^2)}}{2(1-\eta^2)^2}, \\ s_2^2 = \frac{\vartheta^2 + 2k_0(1-\eta^2) + \vartheta \sqrt{\vartheta^2 + 4k_0(1-\eta^2)}}{2(1-\eta^2)^2}.$$

W przypadku struny nieskończenie długiej równanie (3.1) rozwiązujemy stosując wykładniczą transformację Fouriera względem X . Funkcja $w_1(X, T)$ przyjmuje postać

$$(3.6) \quad w_1(X, T) = \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\alpha^2(1-\eta^2) + k_0] \sin \alpha T - \vartheta \alpha \cos \alpha T}{(1-\eta^2)^2 \alpha^4 + [\vartheta^2 + 2k_0(1-\eta^2)] \alpha^2 + k_0^2} \sin \alpha X d\alpha + \\ + \frac{P_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[\alpha^2(1-\eta^2) + k_0] \cos \alpha T + \vartheta \alpha \sin \alpha T}{(1-\eta^2)^2 \alpha^4 + [\vartheta^2 + 2k_0(1-\eta^2)] \alpha^2 + k_0^2} \cos \alpha X d\alpha.$$

Z równania (3.4) tę samą funkcję $w_1(X, T)$ wyznacza się w postaci

$$(3.7) \quad w_1(X, T) = \frac{P_0}{2(1-\eta^2)^2 (s_2^2 - s_1^2)} \left[\frac{k_0 + \vartheta s_1 - s_1^2 (1-\eta^2)}{s_1} e^{s_1(X-T)} - \right. \\ \left. - \frac{k_0 + \vartheta s_2 - s_2^2 (1-\eta^2)}{s_2} e^{s_2(X-T)} \right] \quad \text{dla } X \leq T, \\ w_1(X, T) = \frac{P_0}{2(1-\eta^2)^2 (s_2^2 - s_1^2)} \left[\frac{k_0 - \vartheta s_1 - s_1^2 (1-\eta^2)}{s_1} e^{-s_1(X-T)} - \right. \\ \left. - \frac{k_0 - \vartheta s_2 - s_2^2 (1-\eta^2)}{s_2} e^{-s_2(X-T)} \right] \quad \text{dla } X \geq T.$$

Stałe s_1, s_2 są takie same jak w (3.5). Ze wzoru (3.7) widać, że funkcja $w_1(X, T)$ zależy tylko od zmiennej $z = X - T$.

4. DRGANIA SKRĘTNE PRĘTA

Rozpatruje się drgania skrętne pręta przyzmatycznego o przekroju zwartym, utwierdzonego ze względu na skręcanie na obu końcach, wywołane ruchomym momentem skupionym (rys. 2). Przyjmuje się tłumienie według modelu reologicznego Voigta. Drgania pręta opisuje równanie [8]

$$(4.1) \quad GC \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \alpha_1 GC \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial x^2} - I_0 \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = M \delta(x-vt),$$

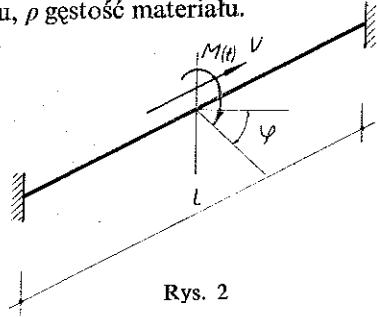
gdzie GC oznacza sztywność belki przy skręcaniu, α_1 współczynnik tłumienia, I_0 biegunowy moment bezwładności przekroju, ρ gęstość materiału.

Stosując zmienne bezwymiarowe (2.2) równaniu (4.1) nadamy postać następującą:

$$(4.2) \quad \varphi'' + \tau \dot{\varphi}'' - \eta^2 \ddot{\varphi} = M_0 \delta(X-T),$$

gdzie

$$\tau = \frac{\alpha_1 v}{l}, \quad \eta^2 = \frac{I_0 \rho v^2}{GC}, \quad M_0 = \frac{Ml}{GC}.$$



Rys. 2

Równanie (4.2) rozwiązuje się przy warunkach brzegowych typu (2.4) i początkowych (2.5). Postępując podobnie jak w p. 2 otrzymuje się

$$(4.3) \quad \varphi(X, T) = \varphi_1(X, T) + \varphi_2(X, T) =$$

$$= 2M_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\eta^2) \sin n\pi T - \tau n\pi \cos n\pi T}{(n\pi)^2 [(n\pi)^2 \tau^2 + (1-\eta^2)^2]} \sin n\pi X + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(T) \sin n\pi X,$$

gdzie

$$a) \quad \text{gdy } n < \frac{2\eta}{\pi\tau},$$

$$K_n(T) = e^{-D_n T} [A_n \cos \omega_n T + B_n \sin \omega_n T],$$

$$(4.4a) \quad D_n = \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 \frac{\tau}{2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{\eta} \sqrt{1 - \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 \frac{\tau^2}{4}};$$

$$b) \quad \text{gdy } n > \frac{2\eta}{\pi\tau},$$

$$K_n(T) = e^{-D_n T} [A_n \operatorname{ch} \omega_n T + B_n \operatorname{sh} \omega_n T],$$

$$(4.4b) \quad D_n = \left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 \frac{\tau}{2}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{\eta} \sqrt{\left(\frac{n\pi}{\eta}\right)^2 \frac{\tau^2}{4} - 1};$$

$$b) \quad \text{gdy } n = \frac{2\eta}{\pi\tau},$$

$$(4.4c) \quad K_n(T) = e^{-\frac{2}{\tau} T} (A_n + B_n T).$$

Dla warunków początkowych (2.5) stałe A_n i B_n wynoszą

$$(4.5a) \quad A_n = \frac{M_0 \tau}{n\pi [(n\pi)^2 \tau^2 + (1-\eta^2)^2]},$$

$$B_n = \frac{M_0 [(n\pi)^2 \tau^2 - 2\eta^2 (1-\eta^2)]}{2\eta^2 \omega_n (n\pi) [(n\pi)^2 \tau^2 + (1-\eta^2)^2]}.$$

Stała B_n określona wzorem (4.5a) jest poprawnie obliczona dla przypadków a i b. W szczególnym przypadku c, gdy $n = 2\eta/\pi\tau$, stała B_n ma postać

$$(4.5b) \quad B_n = \frac{(1+\eta^2) M_0}{n\pi [(n\pi)^2 \tau^2 + (1-\eta^2)^2]}.$$

Funkcja $\varphi_1(X, T)$ określona pierwszym szeregiem we wzorze (4.3) jest również całką równania

$$(4.6) \quad \tau^2 \varphi_1^{IV} - (1-\eta^2)^2 \varphi_1'' = M_0 (1-\eta^2) \delta(X-T) + M_0 \tau \delta'(X-T),$$

przy warunkach brzegowych typu (2.13). Z zależności różniczkowej (4.6) otrzymuje się $\varphi_1(X, T)$ w postaci

$$(4.7) \quad \varphi_1(X, T) = \frac{M_0}{1-\eta^2} X \left[(1-T) + \frac{\tau}{1-\eta^2} \right] - \frac{M_0 \tau}{(1-\eta^2)^2} e^{\gamma(1-T)} \frac{\text{sh } \gamma X}{\text{sh } \gamma} \quad \text{dla } X \leq T,$$

$$\varphi_1(X, T) = \frac{M_0}{1-\eta^2} (1-X) \left(T + \frac{\tau}{1-\eta^2} \right) + \frac{M_0}{(1-\eta^2)^2} e^{\gamma T} \frac{\text{sh } \gamma (1-X)}{\text{sh } \gamma} \quad \text{dla } X \geq T,$$

gdzie $\gamma = (1-\eta^2)/\tau$.

5. DRGANIA POPRZECZNE PRĘTA

DrGANIA belki, dla której przyjęto tłumienie wg modelu reologicznego Voigta, wywołane ruchomą siłą (rys. 3) opisuje równanie [8]

$$(5.1) \quad EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \alpha_2 EJ \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P \delta(x-vt),$$

które dla zmiennych (2.2) przyjmuje postać

$$(5.2) \quad w^{IV} + \tau \dot{w}^{IV} + \sigma^2 \ddot{w} = P_0 \delta(X-T),$$

gdzie

$$\tau = \frac{\alpha_2 v}{l}, \quad \sigma^2 = \frac{mv^2 l^2}{EJ}, \quad P_0 = \frac{Pl^3}{EJ}.$$

Rozpatruje się przypadek belki swobodnie podpartej (2.13) oraz przyjmuje się, że w chwili $T=0$ pręt jest w spoczynku (2.5). Rozwiązanie równania (5.2) w formie rozwiniętej w szereg określa wzór

$$(5.3) \quad w(X, T) = w_1(X, T) + w_2(X, T) = \\ = 2P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n\pi)^2 - \sigma^2] \sin n\pi T - \tau (n\pi)^3 \cos n\pi T}{\tau^2 (n\pi)^8 + (n\pi)^6 - 2\sigma^2 (n\pi)^4 + \sigma^4 (n\pi)^2} \sin n\pi X + 2 \sum_{n=1}^{\infty} K_n(T) \sin n\pi X,$$

gdzie

$$a) \quad \text{gdy } n < \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\tau}},$$

$$K_n(T) = e^{-D_n T} (A_n \cos \omega_n T + B_n \sin \omega_n T),$$

$$(5.4) \quad D_n = \frac{\tau}{2\sigma^2} (n\pi)^4, \quad \omega_n = \frac{(n\pi)^2}{\sigma} \sqrt{1 - (n\pi)^4 \frac{\tau^2}{4\sigma^2}};$$

$$b) \quad \text{gdy } n > \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\tau}},$$

$$K_n(T) = e^{-D_n T} (A_n \operatorname{ch} \omega_n T + B_n \operatorname{sh} \omega_n T),$$

$$D_n = \frac{\tau}{2\sigma^2} (n\pi)^4, \quad \omega_n = \frac{(n\pi)^2}{\sigma} \sqrt{(n\pi)^4 \frac{\tau^2}{4\sigma^2} - 1},$$

$$c) \quad \text{gdy } n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\tau}},$$

$$K_n(T) = e^{-\frac{2\sigma^2}{\tau} T} (A_n + B_n T).$$

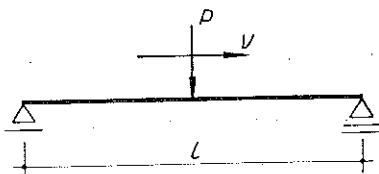


Fig. 3

Dla warunków początkowych (2.5) stała A_n we wszystkich przypadkach a, b, c ma postać

$$(5.5a) \quad A_n = \frac{P_0 \tau (n\pi)}{\tau^2 (n\pi)^6 + (n\pi)^4 - 2\sigma^2 (n\pi)^2 + \sigma^4},$$

a B_n w przypadku a i b wynosi

$$(5.5b) \quad B_n = \frac{P_0 \left\{ \frac{\tau^2}{2\sigma} (n\pi)^6 - \sigma [(n\pi)^2 - \sigma^2] \right\}}{\sigma n \pi \omega_n [\tau^2 (n\pi)^6 + (n\pi)^4 - 2\sigma^2 (n\pi)^2 + \sigma^4]}.$$

Gdy $n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\sigma}{\tau}}$ (przypadek c),

$$(5.5c) \quad B_n = \frac{P_0 [2\sigma^2 (n\pi)^2 - (n\pi)^2 + \sigma^2]}{n\pi [\tau^2 (n\pi)^6 + (n\pi)^4 - 2\sigma^2 (n\pi)^2 + \sigma^4]}$$

Funkcję $w_1(X, T)$ występującą we wzorze (5.3) wyznaczymy w postaci zamkniętej dzięki wykorzystaniu faktu, że jest ona całką równania

$$(5.6) \quad -\tau^2 w_1^{VI} + w_1^{VI} + 2\sigma^2 w_1^{IV} + \sigma^4 w_1'' = \\ = P_0 \tau \delta'''(X-T) + P_0 \delta''(X-T) + P_0 \sigma^2 \delta(X-T)$$

i spełnia warunki brzegowe

$$(5.7) \quad w^{(i)}(0, T) = w^{(i)}(1, T) = 0, \quad i = 0, 2, 4, 6.$$

Z równania (5.6) otrzymuje się

$$(5.8) \quad w_1(X, T) = -P_0 \frac{\sigma^2}{\tau^2} \frac{1}{s_1^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2} (1-T)X + \\ + \frac{P_0}{\tau} \left[\frac{\sigma^2 + s_1^2}{\tau s_1^3} \operatorname{sh} s_1 (1-T) + \operatorname{ch} s_1 (1-T) \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} s_1 X}{[s_1^4 - 2s_1^2 (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2] \operatorname{sh} s_1} + \frac{P_0}{\tau^2} f_1(X, 1-T) + \\ + \frac{P_0}{\tau} f_2(X, 1-T) \quad \text{dla } X \leq T; \\ w_1(X, T) = -P_0 \frac{\sigma^2}{\tau^2} \frac{1}{s_1^2 (\alpha^2 + \beta^2)^2} T(1-X) + \frac{P_0}{\tau} \left[\frac{\sigma^2 + s_1^2}{\tau s_1^3} \operatorname{sh} s_1 T - \operatorname{ch} s_1 T \right] \times \\ \times \frac{\operatorname{sh} s_1 (1-X)}{[s_1^4 - 2s_1^2 (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2] \operatorname{sh} s_1} + \\ + \frac{P_0}{\tau^2} f_1(1-X, T) - \frac{P_0}{\tau} f_2(1-X, T) \quad \text{dla } X \geq T.$$

Funkcje f_1, f_2 są następujące:

$$(5.9) \quad f_1(\xi, \mu) = [a_1 \operatorname{sh} \alpha \mu \cos \beta \mu + a_2 \operatorname{ch} \alpha \mu \sin \beta \mu] \operatorname{sh} \alpha \xi \cos \beta \xi + \\ + [-a_1 \operatorname{ch} \alpha \mu \sin \beta \mu + a_2 \operatorname{sh} \alpha \mu \cos \beta \mu] \operatorname{ch} \alpha \xi \sin \beta \xi, \\ f_2(\xi, \mu) = [b_1 \operatorname{ch} \alpha \mu \cos \beta \mu + b_2 \operatorname{sh} \alpha \mu \sin \beta \mu] \operatorname{sh} \alpha \xi \cos \beta \xi + \\ + [-b_1 \operatorname{sh} \alpha \mu \sin \beta \mu + b_2 \operatorname{ch} \alpha \mu \cos \beta \mu] \operatorname{ch} \alpha \xi \sin \beta \xi,$$

gdzie

$$\mu = (1-T), \quad \xi = X, \quad \text{gdyn } X \leq T, \\ \mu = T, \quad \xi = 1-X, \quad \text{gdyn } X \geq T,$$

$$a_1 = \frac{-1}{2(\alpha^2 + \beta^2)^3 c} \left\{ [(3\alpha^2 - \beta^2 - s_1^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \sigma^2 s_1^2(-3\alpha^2 + \beta^2) + 5\sigma^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\beta^4 \sigma^2] \frac{\text{sh } \alpha \cos \beta}{\alpha} + [(\alpha^2 - 3\beta^2 - s_1^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 - s_1^2 \sigma^2(-\alpha^2 + 3\beta^2) + 3\sigma^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\beta^4 \sigma^2 - 2(\alpha^2 + \beta^2)^2 \sigma^2] \frac{\text{sh } \alpha \cos \beta}{\beta} \right\},$$

$$a_2 = \frac{-1}{2(\alpha^2 + \beta^2)^3 c} \left\{ [(3\alpha^2 - \beta^2 - s_1^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \sigma^2 s_1^2(-3\alpha^2 + \beta^2) + 5\sigma^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 4\sigma^2 \beta^4] \frac{\text{ch } \alpha \sin \beta}{\alpha} - [(\alpha^2 - 3\beta^2 - s_1^2)(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \sigma^2 s_1^2(-\alpha^2 + 3\beta^2) + 3\sigma^2(\alpha^2 - \beta^2)^2 - 2\sigma^2(\alpha^2 + \beta^2)^2] \frac{\text{sh } \alpha \cos \beta}{\beta} \right\},$$

$$b_1 = \frac{-\text{sh } \alpha \cos \beta + \frac{\beta}{2\alpha}(-\alpha^2 + \beta^2 + s_1^2) \text{ch } \alpha \sin \beta}{c},$$

$$b_2 = \frac{-\text{ch } \alpha \sin \beta - \frac{\beta}{2\alpha}(-\alpha^2 + \beta^2 + s_1^2) \text{ch } \alpha \sin \beta}{c},$$

$$c = [s_1^4 - 2s_1^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2] \text{sh}^2 \alpha \cos^2 \beta + \text{ch}^2 \alpha \sin^2 \beta,$$

$$s_1^2 = u + v,$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{1}{(3\eta^2)^3} + \frac{\sigma^2}{3\eta^4} + \frac{\sigma^4}{2\eta^2} + \frac{\sigma^2}{\eta^2} \sqrt{\frac{\sigma^4}{4} + \frac{\sigma^2}{27\eta^2}}},$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{1}{(3\eta^2)^3} + \frac{\sigma^2}{3\eta^4} + \frac{\sigma^4}{2\eta^2} - \frac{\sigma^2}{\eta^2} \sqrt{\frac{\sigma^4}{4} + \frac{\sigma^2}{27\eta^2}}},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{s_1^2 \left(s_1^2 - \frac{1}{\eta^2} \right) - \frac{2\sigma^2}{\eta^2}} - s_1^2 + \frac{1}{\eta^2}},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \sqrt{2 \sqrt{s_1^2 \left(s_1^2 - \frac{1}{\eta^2} \right) - \frac{2\sigma^2}{\eta^2}} + s_1^2 - \frac{1}{\eta^2}}.$$

Podane rozwiązanie zamknięte, mimo złożonej budowy, jest szczególnie przydatne przy wyznaczaniu sił wewnętrznych (momentów zginających i sił tnących), gdyż funkcje w formie rozwiniętej w szereg w wyniku różniczkowania są słabo zbieżne.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. N. KRYŁOW, *Über der erzwungene Schwingungen von gleichformigen elastischen Staben* Math. Ann., **61**, 1905.
2. S. P. TIMOSHENKO, *On the forced vibrations of bridges*, Phil. Mag., **43**, 1922.
3. Z. KĄCZKOWSKI, *Vibration of a beam under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., **4**, 4, 1963.
4. M. ŻYSZKO, *Pewne zagadnienie dynamiki belki mostowej*, Arch. Inżyn. Ładow., **12**, 3, 1966.
5. Z. REIPERT, *Vibration of a beam arbitrarily supported on its edges under a moving load*, Proc. Vibr. Probl., **10**, 2, 1969.
6. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Warszawa 1961.
7. J. OSIOWSKI, *Zarys rachunku operatorowego*, Warszawa 1972.
8. S. KALISKI i inni, *Drgania i fale w ciałach stałych*, Warszawa 1966.

Резюме

ЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ И СТЕРЖНЯ ВЫЗВАННЫЕ ПОДВИЖНОЙ СИЛОЙ

В работе рассматриваются затухающие колебания струны и стержня, вызванные подвижной силой (моментом), движущейся с постоянной скоростью. Функция определяющая аperiodические колебания представлена в замкнутом виде.

SUMMARY

DAMPED VIBRATIONS OF THE STRING AND THE ROD CAUSED BY MOVING FORCE

The paper deals with damped vibrations of the string and the rod caused by the moving force (moment) traveling with a constant velocity. The function determining the aperiodic vibrations is presented in a closed form.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT INŻYNIERII ŁADOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 7 marca 1975 r.