

PODŁUŻNE UDERZENIE MASĄ W PRĘT LEPKOSPĘŻYSTY, PÓLNIESKOŃCZONY

RYSZARD G R Y B O Ś (GLIWICE)

Przedmiotem rozważań jest podłużna fala naprężeń w pręcie lepkospężystym, wzbudzona uderzeniem ciała sztywnego. Cechy lepkospężyste pręta opisano z pomocą całkowego modelu Boltzmanna. Różniczkowo-całkowe równanie ruchu, po sprowadzeniu do postaci standardowej, rozwiązano przy użyciu metody „zamrożenia”. Wyznaczono rozwiązanie szczegółowe dla przypadku maxwellowskiego jądra relaksacji, ograniczone do krótkiego przedziału czasu. Określono wpływ lepkości na prędkość fali oraz na wartość naprężeń na czole fali.

1. WSTĘP

Zagadnienie propagacji fal podłużnych w pręcie niedoskonale sprężystym należy do klasycznych zagadnień dynamicznej teorii lepkospężystości. Można go rozmaicie formułować przyjmując różne modele reologiczne materiału i odpowiednie równania stanu. Można też przyjmować rozmaite sposoby obciążenia i odpowiednie warunki brzegowe, które poza tym dotyczą albo jednego tylko końca, gdy pręt jest półnieskończony, albo obu końców, gdy uwzględniamy jego skończoną długość.

Większość prac z zakresu dynamiki pręta lepkospężystego opiera się na prostym modelu Maxwella [1–11], nieco mniej na modelu Kelvina-Voigta [1, 3, 5 i 12–15], kilka prac dotyczy tzw. ciała standardowego lub innych modeli kombinowanych [16–18].(*) Są to wszystko modele różniczkowe (ze względu na różniczkowy charakter równań stanu), przy czym mogą być one liniowe lub nieliniowe.

W gruncie rzeczy żaden z wymienionych modeli nie opisuje wiernie wszystkich reologicznych cech materiałów rzeczywistych. Popularność swą zawdzięczają one jedynie matematycznej prostocie odpowiednich równań ruchu, które są równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych. Jeśli chodzi o model Kelvina-Voigta, to jego niestosowność w odniesieniu do omawianego zagadnienia pogarsza jeszcze fakt, iż odpowiadające mu równanie różniczkowe ruchu jest eliptyczne i, jako takie, nie opisuje ruchu falowego.

Wpływ lepkości ośrodka na proces propagacji fal naprężeń można uwzględnić w sposób właściwy jedynie opierając się na całkowym modelu Boltzmanna. Niestety odpowiednie równanie ruchu jest równaniem różniczkowo-całkowym o pochodnych cząstkowych, co jest źródłem poważnych trudności matematycznych powstających

(*) Dodajmy, że liczba prac traktujących o propagacji fal w pręcie lepko-plastycznym lub lepko/sprężysto-plastycznym jest znacznie większa.

przy jego rozwiązaniu. Tym tłumaczy się wyjątkowo mała ilość prac traktujących problem na gruncie teorii Boltzmanna [19–24].

Autorzy cytowanych prac poszukują rozwiązania stosując transformacje całkowite (Laplace'a lub Fouriera). Jednak transformacji odwrotnej nie udaje się wykonać. W pracach [2 i 21] uzyskano pewne rozwiązanie przybliżone, oparte na założeniu stałej prędkości fali. Autor pracy [23] podał dwa rozwiązania przybliżone: jedno dla obszaru leżącego w pobliżu czoła fali ciśnienia, drugie, asymptotyczne, dotyczące późniejszej fazy ruchu. Streszczenie tej pracy można znaleźć w [24].

Ostatnio pewne przypadki drgań stacjonarnych (wymuszonych oraz parametrycznych) badał FIŁATOW i jego współpracownicy [25–27]. Korzystali oni z zaproponowanych przez Fiłatowa i Biegnajewa metod « zamrożenia » i uśrednienia. Metody te, poparte ścisłymi dowodami matematycznymi [26 i 28], stanowią efektywny sposób przybliżonego rozwiązywania zarówno liniowych jak i nieliniowych równań różniczkowo-całkowych, jakie występują w dynamicznej teorii lepkosprężystości. W niniejszej pracy korzysta się m.in. z metody « zamrożenia ».

Jeśli chodzi o sposób dynamicznego obciążenia pręta, to w badaniach teoretycznych formułuje się go trojako:

- 1) Brzeg obciążony przemieszcza się według określonego prawa (najczęściej jednostajnie); jest to tzw. wymuszenie kinematyczne.
- 2) Naprężenie na brzegu obciążonym zmienia się według określonego prawa (np. skokowo, impulsowo itd.); jest to tzw. uderzenie bez masy.
- 3) Ciało sztywne o znanej masie uderza z określoną prędkością w jeden brzeg pręta; jest to zatem uderzenie masą.

Niektórzy badacze rozpatrują jeszcze uderzenie pręta w sztywną przegrodę lub zderzenie kolinearne dwóch prętów; są to szczególne przypadki wymuszenia kinematycznego. Autor wspomnianej pracy [23] zakłada również wymuszenie kinematyczne (ściślej mówiąc, stałą prędkość jednego brzegu). Matematycznie najtrudniejszy jest przypadek uderzenia masą, ponieważ odpowiada mu dynamiczny warunek brzegowy typu różniczkowego z nieznaną funkcją przemieszczeń.

W pracy niniejszej rozpatruje się dynamiczny problem pręta lepkosprężystego, półnieskończonego — w przypadku uderzenia masą. Materiał pręta traktuje się jako jednorodny, izotropowy, wykazujący cechy lepkosprężyste zgodne z modelem Boltzmanna oraz maxwellowskim jądrem relaksacji. Podano przybliżone rozwiązanie problemu początkowo-brzegowego, ograniczone do krótkiego przedziału czasu oraz dotyczące materiału o względnie małej lepkości.

Uzyskana dość prosta forma rozwiązania umożliwia wyciągnięcie interesujących wniosków, np. co do prędkości propagacji i naprężenia na czołe fali ciśnienia w początkowej fazie ruchu.

2. RÓŻNICZKOWO-CALKOWE RÓWNIANIE PROBLEMU

W dynamice ośrodków lepkosprężystych znane jest prawo, pozwalające w prosty sposób przejść od równań ruchu ośrodka sprężystego do analogicznych równań ośrodka lepkosprężystego [29]. Wystarczy w tym celu stałe Lamégo λ , μ zastąpić

przez $\lambda - \lambda^*$, $\mu - \mu^*$, gdzie λ^* , μ^* są pewnymi operatorami różniczkowymi lub całkowymi. Ich postać zależy od przyjętego modelu reologicznego. Wyjaśnimy tę kwestię szczegółowo w odniesieniu do modelu Boltzmanna.

W przypadku ośrodka sprężystego zachodzi prosta proporcjonalność między składowymi dewiatorów naprężeń s_{ij} i odkształceń e_{ij} , mianowicie $s_{ij} = 2\mu e_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$). Podobnie związek między naprężeniem średnim $\sigma \stackrel{\text{df}}{=} \sigma_{ii}/3$ i właściwym rozszerzeniem objętościowym $\theta \stackrel{\text{df}}{=} e_{ii}$ ma postać: $\sigma = K\theta$ ($K \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$ jest modułem ściśliwości).

W przypadku izotermicznych odkształceń ośrodka lepkospężystego o cechach ciała Boltzmanna odpowiednimi równaniami stanu są równania [29 i 30]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} s_{ij}(\mathbf{x}, t) &= 2\mu \left[e_{ij}(\mathbf{x}, t) - \int_0^t R(t-\tau) e_{ij}(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right], \\ \sigma(\mathbf{x}, t) &= K \left[\theta(\mathbf{x}, t) - \int_0^t R_1(t-\tau) \theta(\mathbf{x}, \tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Przyjęto tu od razu, że tzw. jądra relaksacji: postaciowej R i objętościowej R_1 — mają postać różnicową, tzn. ich argumenty t, τ występują wyłącznie w postaci różnicy $t - \tau \geq 0$. Ma to miejsce tylko w przypadku ośrodków, których aktualny stan nie zależy od obioru chwili początkowej $t=0$. Poza tym $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ oznacza wektor miejsca we współrzędnych Lagrange'a.

Na podstawie równań (2.1) można podać interpretację operatorów λ^* , μ^* . Niech $f(\mathbf{x}, t)$ będzie dowolną wielkością fizyczną, która jest funkcją współrzędnych położenia i czasu.

Otóż

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \mu^* f(\mathbf{x}, t) &\equiv \mu \int_0^t R(t-\tau) f(\mathbf{x}, \tau) d\tau, \\ \lambda^* f(\mathbf{x}, t) &\equiv \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \int_0^t R_1(t-\tau) f(\mathbf{x}, \tau) d\tau - \frac{2}{3}\mu \int_0^t R(t-\tau) f(\mathbf{x}, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

W zagadnieniu jednowymiarowym (które jest przedmiotem dalszych rozważań), zamiast stałych Lamégo, używa się raczej modułu Younga E i współczynnika Poissona ν^*). Przechodząc do równań ruchu pręta lepkospężystego, zamiast stałej $E = 2\mu(1 + \nu)$, trzeba wprowadzić operator $E - E^*$, przy czym $E^* = 2\mu^*(1 + \nu)$. Na mocy tożsamości (2.2)₁ będzie przeto

$$(2.3) \quad \begin{aligned} (E - E^*) f(x, t) &= E f(x, t) - 2\mu^*(1 + \nu) f(x, t) \\ &= E f(x, t) - 2\mu(1 + \nu) \int_0^t R(t-\tau) f(x, \tau) d\tau, \\ &= E \left[f(x, t) - \int_0^t R(t-\tau) f(x, \tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

(*) Uwaga ta dotyczy oczywiście ośrodka sprężystego.

Weźmy pod uwagę jednowymiarowe równanie falowe pręta sprężystego

$$(2.4) \quad \rho \ddot{u} = E u'' \quad \left(\dot{u} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u' \equiv \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Opisuje ono proces propagacji podłużnej fali naprężeń, przy czym $u(x, t)$ jest przemieszczeniem osiowym, ρ — gęstością. W przypadku pręta lepkosprężystego będzie odpowiednio

$$\rho \ddot{u} = (E - E^*) u''$$

lub po uwzględnieniu przekształcenia (2.3)

$$(2.5) \quad \rho \ddot{u} = E \left[u'' - \int_0^t R(t-\tau) u''(x, \tau) d\tau \right].$$

Jest to podstawowe równanie różniczkowo-całkowe rozpatrywanego zagadnienia.

Jeżeli materiał wykazuje stosunkowo małą lepkość, to dodatkowo określona całka $\int_0^t R(t) dt$ ma wartość małą wobec jedności, co podkreślamy pisząc $\varepsilon \int_0^t \tilde{R}(t) dt$, gdzie $\varepsilon > 0$ jest małym parametrem. W dalszym ciągu pomijamy wężyk nad $\tilde{R}(t)$ i zamiast równania (2.5) piszemy

$$(2.6) \quad \rho \ddot{u} = E \left[u'' - \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) u''(x, \tau) d\tau \right].$$

Opierając się na takim równaniu, FIŁATOW i SZAROWA [26] badali m.in. ustalone drgania podłużne (swobodne i wymuszone) pręta lepkosprężystego. W dalszym ciągu wykorzystamy równanie (2.6) do określenia reakcji takiego pręta na podłużne uderzenie ciałem sztywnym.

Przy rozwiązywaniu równania różniczkowo-całkowego posłużymy się metodą «zamrożenia», którą najpierw pokrótce scharakteryzujemy.

3. METODA «ZAMROŻENIA» I UŚREDNIANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWO-CĄLKOWYCH

Wymienione w tytule metody są dość efektywnym sposobem przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowo-całkowych. Zaproponowali je FIŁATOW i BIEGNAJEW w roku 1970 [25], później opracowano ich podstawy matematyczne, podano oszacowania błędów i zastosowania w teorii lepkosprężystości [26 i 27].

Weźmy pod uwagę układ nieliniowych równań różniczkowo-całkowych w postaci standardowej

$$(3.1) \quad \dot{\mathbf{y}} = \varepsilon Y \left(\mathbf{y}, t, \int_0^t \Phi(\mathbf{y}(\tau), t, \tau) d\tau \right), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

gdzie $\mathbf{y}(t)$ jest n -wymiarowym wektorem. Sprowadzanie równań różniczkowo-całkowych rozmaitych typów do postaci standardowej stanowi odrębne zagadnienie i może być wykonane kilkoma sposobami. Nie będziemy tu szerzej rozwijać tego zagadnienia, a jeden ze sposobów zademonstrujemy w następnym punkcie.

Idea metody «zamrożenia» jest nader prosta. Prawa strona równań (3.1) jest małą rzędu ε , skąd wynika, że wektor-funkcja $y(t)$ zmienia się powoli. Można zatem wspomnianą funkcję pod znakiem całki ustalić («zamrozić») w chwili t , tzn. w całkowym wyrażeniu układu (3.1) zamiast $y(\tau)$ podstawić $y(t)$. Ten prosty zabieg sprowadza układ równań różniczko-całkowych do układu równań różniczkowych o współczynnikach funkcyjnych:

$$(3.2) \quad \dot{\eta} = \varepsilon Y \left(\eta, t, \int_0^t \Phi(\eta(t), t, \tau) d\tau \right), \quad \eta(0) = y_0,$$

który jest na ogół łatwiejszy do rozwiązania od układu (3.1). Z pomocą nierówności całkowych dowodzi się (przy niezbyt mocnych warunkach nałożonych na funkcje Y i Φ), że dla dowolnych stałych $\delta < 0$ i $\lambda < 0$, można wskazać takie ε^* , iż dla $\varepsilon < \varepsilon^*$ w przedziale $0 \leq t \leq \lambda \varepsilon^{-1}$ zachodzi nierówność $\|y(t) - \eta(t)\| < \delta$, czyli że rozwiązanie $\eta(t)$ jest dostatecznie bliskie rozwiązaniu $y(t)$.

Równania (3.2) tworzą tzw. układ równoważny układowi (3.1) w sensie metody «zamrożenia».

Niekiedy rozwiązanie analityczne układu równoważnego okazuje się jeszcze zbyt skomplikowane lub wręcz niemożliwe. Można wtedy uczynić dalszy krok na drodze uproszczenia równań wyjściowych. Polega on na uśrednianiu ich prawych stron w przedziale nieskończonym. Obliczamy w tym celu całkę

$$(3.3) \quad \int_0^t \Phi(y, t, \tau) d\tau \equiv \varphi(y, t),$$

traktując y i t jako parametry. Przypuśćmy, że istnieje granica

$$(3.4) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T Y(y, t, \varphi(y, t)) dt \equiv \tilde{Y}(y).$$

Z kolei tworzymy układ równań różniczkowych o stałych współczynnikach:

$$(3.5) \quad \dot{\eta}^* = \varepsilon \tilde{Y}(\eta^*), \quad \eta^*(0) = y_0,$$

który zawsze jest łatwiejszy do rozwiązania niż układ (3.2). Okazuje się, że wektor-funkcja $\eta^*(t)$ jest również dostatecznie bliska rozwiązaniu $y(t)$ układu równań (3.1), aczkolwiek uzyskuje się tu dokładność nieco mniejszą niż w przypadku funkcji $\eta(t)$.

Filatow zaproponował jeszcze drugi wariant metody uśredniania, który różni się od poprzedniego jedynie tym, że zamiast funkcji $\varphi(y, t)$ pod całkę (3.4) wprowadza się funkcję

$$(3.6) \quad \varphi_\infty(y, t) \equiv \int_0^\infty \Phi(y, t, \tau) d\tau.$$

Równania (3.5) tworzą układ równoważny układowi (3.1) w sensie metody «zamrożenia» z uśrednieniem (według wariantu pierwszego lub drugiego).

4. ROZWIĄZANIE FALOWE PROBLEMU POCZĄTKOWO-BRZEGOWEGO

Niech ciało sztywne o masie m uderza poosiowo z prędkością V_0 w pręt półnie- skończony, jednorodny o stałej masie jednostkowej ρF . Interesuje nas proces propagacji fali naprężeń, wzbudzonej tym uderzeniem.

Niech półoś Ox pokrywa się z osią pręta, a jej początek O leży w płaszczyźnie czołowej pręta, czyli na brzegu uderzonym. Wprowadzamy zmienne bezwymiarowe

$$\bar{x} = \frac{x}{l_m}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{l_m}, \quad \bar{u} = \frac{u}{l_m},$$

gdzie $c = \sqrt{E/\rho}$ jest prędkością falową w pręcie sprężystym, a $l_m \stackrel{\text{df}}{=} m/\rho F$ oznacza długość odcinka, którego masa równa się masie ciała uderzającego. W dalszym ciągu będziemy jednak pomijać kreski nad \bar{x} , \bar{t} , \bar{u} , a różniczkowanie względem \bar{x} i \bar{t} nadal oznaczamy przecinkiem i kropką u góry.

Warunki początkowe i brzegowe mają następującą postać:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & x &\in [0, \infty), \\ \dot{u}(x, 0) &= \begin{cases} V_0/c \equiv v_0 & \text{dla } x=0, \\ 0 & \text{dla } x>0; \end{cases} \\ \ddot{u}(0, t) &= u''(0, t) & \text{dla } t \geq 0. \end{aligned}$$

Weźmy najpierw pod uwagę pręt sprężysty i odpowiadające mu równanie (2.4) lub po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych

$$(4.2) \quad \ddot{u} = u''.$$

Rozwiązanie falowe problemu początkowo-brzegowego (4.1) i (4.2) ma znaną postać

$$(4.3) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= v_0 (1 - e^{-x-t}) \equiv u_0(x, t), & \forall x \in [0, t], \\ u(x, t) &\equiv 0, & \forall x > t. \end{aligned}$$

Zajmijmy się teraz prętem lepkosprężystym. Problem polega na rozwiązaniu równania różniczkowo-całkowego (2.6) lub równania

$$(4.4) \quad \ddot{u} = u'' - \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) u''(x, \tau) dt$$

przy warunkach początkowych i brzegowych (4.1).

W dążeniu do zastosowania metody « zamrożenia » musimy najpierw równanie (4.4) sprowadzić do układu standardowego. Ponieważ wspomniane równanie dla $\varepsilon = 0$ przyjmuje postać (4.2), a warunki początkowe i brzegowe w obu przypadkach są takie same, przeto rozwiązania obu problemów muszą się różnić nieznacznie między sobą. Ścisłej mówiąc rozwiązanie $u(x, t)$ powinno dążyć do $u_0(x, t)$ gdy $\varepsilon \rightarrow 0$.

Uwzględniając powyższe oraz wzór (4.3) postulujemy

$$(4.5) \quad \begin{aligned} u(x, t) &= v_0 [1 - f(t, \varepsilon) e^{-x-t}], & \forall x \in [0, t], \\ u(x, t) &\equiv 0, & \forall x > t. \end{aligned}$$

Na nieznaną funkcję czasu $f(t, \varepsilon)$ nakładamy warunki

$$(4.6) \quad f(t, 0) = 1, \quad f(0, \varepsilon) = 1,$$

przy czym drugi z nich gwarantuje spełnienie obu warunków początkowych (4.1)_{1,2}.

Natomiast warunek brzegowy (4.1)₃ prowadzi do żądania, aby $f'' - 2\dot{f} = 0$ dla $t \geq 0$. Jednak z drugiej strony podstawienie (4.5) do (4.4) daje inne, podstawowe równanie dla $f(t, \varepsilon)$:

$$(4.7) \quad f'' - 2\dot{f} = -\varepsilon e^t \int_0^t R(t-\tau) f(\tau, \varepsilon) e^{-\tau} d\tau.$$

Okazuje się więc, że funkcja (4.5) może zadośćuczynić warunkowi brzegowemu wyłącznie w chwili początkowej, a poza tym, czyli dla $t > 0$, tylko z dokładnością do wyrazów małych rzędu ε . Poprzestaniemy na tym przybliżeniu.

Przystępując do przekształcania równania różniczkowo-calkowego (4.7) zauważamy, że dla $\varepsilon = 0$ redukuje się ono do postaci $f_0'' - 2\dot{f}_0 = 0$. Stąd wynika

$$(4.8) \quad f_0(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \quad (c_1, c_2 = \text{const}).$$

Opierając się na tym rozwiązaniu, szukamy funkcji $f(t, \varepsilon)$ z pomocą metody wariacji stałych. Niech

$$(4.9) \quad \begin{aligned} f(t, \varepsilon) &= c_1(t, \varepsilon) e^{2t} + c_2(t, \varepsilon), \\ \dot{f}(t, \varepsilon) &= 2c_1(t, \varepsilon) e^{2t}, \\ \dot{c}_1(t, \varepsilon) e^t + \dot{c}_2(t, \varepsilon) e^{-t} &= 0. \end{aligned}$$

Ponadto dla spełnienia warunków (4.6) ma być

$$(4.10) \quad \begin{aligned} c_1(t, 0) e^{2t} + c_2(t, 0) &= 1, \\ c_1(0, \varepsilon) + c_2(0, \varepsilon) &= 1. \end{aligned}$$

Podstawiamy (4.9)_{1,2} do równania (4.7). Po uwzględnieniu żądania (4.9)₃ otrzymamy

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \dot{c}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2} e^{-t} \int_0^t R(t-\tau) [c_1(\tau, \varepsilon) e^{\tau} + c_2(\tau, \varepsilon) e^{-\tau}] d\tau, \\ \dot{c}_2 &= \frac{\varepsilon}{2} e^t \int_0^t R(t-\tau) [c_1(\tau, \varepsilon) e^{\tau} + c_2(\tau, \varepsilon) e^{-\tau}] d\tau. \end{aligned}$$

Porównując ten układ równań z (3.1) łatwo zauważyć, iż jest to układ standardowy. Wobec tego piszemy od razu układ równoważny w sensie metody «zamrożenia»:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2} e^{-t} [R^+(t) \gamma_1 + R^-(t) \gamma_2], \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{\varepsilon}{2} e^t [R^+(t) \gamma_1 + R^-(t) \gamma_2], \end{aligned}$$

gdzie

$$\gamma_i(t, \varepsilon) \approx c_i(t, \varepsilon), \quad \forall t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad i=1, 2$$

oraz

$$(4.13) \quad R^\pm(t) \equiv \int_0^t R(t-\tau) e^{\pm\tau} d\tau.$$

Postać współczynników funkcyjnych układu (4.12) zależy więc od postaci jądra relaksacji $R(t)$. W przypadku jądra maxwellowskiego z dyskretnym widmem relaksacji mamy

$$(4.14) \quad R(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-\beta_k t}$$

($A_k, \beta_k = \text{const}$). Poza tym rozmaici autorzy wysuwają w tym względzie różne inne propozycje, np. [30, 31]

$$R(t) = A e^{-\beta t} t^{-1+\alpha}, \quad R(t) = (1+\alpha)^{-1} t^{-\alpha}.$$

Układ równań różniczkowych ze współczynnikami funkcyjnymi (4.12) nie posiada rozwiązania ogólnego w postaci zamkniętej. Ponieważ są to jednak równania liniowe, więc przy rozwiązywaniu przypadków szczególnych mogą się okazać przydatne metody oparte na transformacjach całkowych (np. [23]) lub inne przybliżone metody.

Gdyby te sposoby okazały się mało efektywne, trzeba uwagę skierować na układ równoważny układowi (4.11) w sensie metody « zamrożenia » z uśrednieniem prawych stron. Ten układ równań ma postać

$$(4.15) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1^* &= -\varepsilon (A_1^+ \gamma_1^* + A_1^- \gamma_2^*), \\ \dot{\gamma}_2^* &= \varepsilon (A_2^+ \gamma_1^* + A_2^- \gamma_2^*), \end{aligned}$$

gdzie stałe $A_{1,2}^\pm$ określone są następująco:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} A_1^\pm &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T R^\pm(t) e^{-t} dt, \\ A_1^\pm &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T R^\pm(t) e^t dt \end{aligned}$$

dla pierwszego wariantu metody lub

$$(4.17) \quad \begin{aligned} A_1^\pm &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T R_\infty^\pm(t) e^{-t} dt, \\ A_2^\pm &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_0^T R^\pm(t) e^t dt, \\ R_\infty^\pm(t) &\equiv \int_0^\infty R(t-\tau) e^{\pm\tau} d\tau \end{aligned}$$

według wariantu drugiego. Oczywiście stosowanie metody uśrednienia uwarunkowane jest istnieniem granic występujących we wzorach (4.16) lub (4.17).

Po rozwiązaniu układu równań (4.12) lub (4.15) otrzymamy funkcje $\gamma_i(t, \varepsilon)$ (lub $\gamma_i^*(t, \varepsilon)$) określone z dokładnością do dwóch stałych całkowania, które dobieramy następnie tak, aby spełnić warunki (4.10) lub

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \gamma_1(t, 0)e^{2t} + \gamma_2(t, 0) &= 1, \\ \gamma_1(0, \varepsilon) + \gamma_2(0, \varepsilon) &= 1. \end{aligned}$$

Po wykonaniu tych działań korzystamy z formuły

$$(4.19) \quad f(t, \varepsilon) \approx \gamma_1(t, \varepsilon)e^{2t} + \gamma_2(t, \varepsilon),$$

która wraz ze wzorem (4.5) daje ostatecznie przybliżony wzór dla przemieszczeń dynamicznych $u(x, t)$ pręta lepkospęrzystego.

Znając funkcję $u(x, t)$ możemy obliczyć naprężenie:

$$(4.20) \quad \sigma_x(x, t) = E \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \int_0^t R(t-\tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial x} d\tau \right] \quad \forall x \in [0, l].$$

5. ROZWIĄZANIE SZCZEGÓLNE DLA MAXWELLOWSKIEGO JĄDRA RELAKSACJI

Niech

$$(5.1) \quad R(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-\beta_k t},$$

gdzie A_k, β_k ($k=1, 2, \dots, n$) są to stałe materiałowe, zależne jedynie od temperatury. Współczynniki funkcyjne $R^\pm(t)$ mają w tym przypadku postać

$$(5.2) \quad R^\pm(t) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\beta_k \pm 1} (e^{\pm t} - e^{-\beta_k t}),$$

układem zaś równoważnym układowi (28) w sensie metody «zamrożenia» jest układ następujący:

$$(5.3) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{\varepsilon}{2} \left[\gamma_1 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\beta_k + 1} (1 - e^{-(\beta_k + 1)t}) + \gamma_2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\beta_k - 1} (e^{-2t} - e^{-(\beta_k + 1)t}) \right], \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{\varepsilon}{2} \left[\gamma_1 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\beta_k + 1} (e^{2t} - e^{-(\beta_k - 1)t}) + \gamma_2 \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\beta_k - 1} (1 - e^{-(\beta_k - 1)t}) \right]. \end{aligned}$$

Niestety, układ ten nie posiada rozwiązania zamkniętego. Nie można też przeprowadzić uśrednienia jego prawych stron, ponieważ nie istnieją niektóre spośród wyrażeń granicznych (4.16) lub (4.17). Wobec tego przytoczymy pewne rozwiązania przybliżone, poprawne dla $0 \leq t \leq 1$, tzn. w takim przedziale czasu, w którym czoło fali ciśnienia przebiega odcinek mały wobec $l_m = m/\rho F$.

Jeżeli funkcje wykładnicze we wzorze (5.2) rozwiniemy w szeregi potęgowe, z których zatrzymamy tylko po dwa pierwsze wyrazy, to otrzymamy nader prosty wynik

$$(5.4) \quad R^+(t) \approx R^-(t) = at + O(t^2), \quad a \equiv \sum_{k=1}^n A_k$$

oraz

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{\varepsilon a}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) t e^{-t} + O(\varepsilon^2 t^2), \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{\varepsilon a}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) t e^t + O(\varepsilon^2 t^2). \end{aligned}$$

Ten układ można łatwo rozwiązać w pierwszym przybliżeniu. Dodając równości (5.5) stronami otrzymujemy równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych

$$\frac{d(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 + \gamma_2} = \varepsilon a t \operatorname{sh} t dt + O(\varepsilon^2 t^2),$$

skąd po scałkowaniu

$$(5.6) \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \exp[\varepsilon a (t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + O(\varepsilon^2 t^2)] = 1 + \varepsilon a (t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + O(\varepsilon^2 t^2).$$

Stałą całkowania dobrano tak, aby spełniony był warunek początkowy (4.10), tzn. $\gamma_1 + \gamma_2 \approx 1$ dla $t=0$. Podstawienie tego wyniku w (5.5) daje

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= -\frac{\varepsilon a}{2} t \exp[-t + \varepsilon a (t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + O(\varepsilon^2 t^2)] = -\frac{\varepsilon a}{2} t e^{-t} [1 + O(\varepsilon t)], \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{\varepsilon a}{2} t \exp[t + \varepsilon a (t \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) + O(\varepsilon^2 t^2)] = \frac{\varepsilon a}{2} t e^t [1 + O(\varepsilon t)], \end{aligned}$$

a po scałkowaniu

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\varepsilon a}{2} e^{-t} (1+t) [1 + O(\varepsilon t)] + C_1, \\ \gamma_2 &= -\frac{\varepsilon a}{2} e^t (1-t) [1 + O(\varepsilon t)] + C_2. \end{aligned}$$

Aby spełnić żądanie (4.10), czyli $\gamma_1 e^{2t} + \gamma_2 = 1$ dla $\varepsilon=0$, należy podstawić $C_1=0$, $C_2=1$. Ostatecznie więc znajdziemy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\varepsilon a}{2} e^{-t} (1+t) + O(\varepsilon^2 t^2), \\ \gamma_2 &= 1 - \frac{\varepsilon a}{2} e^t (1-t) + O(\varepsilon^2 t^2). \end{aligned}$$

Jeżeli, w celu sprawdzenia, dodamy do siebie stronami powyższe wzory, to otrzymamy równość (5.6).

Podstawienie funkcji (5.7) do wzoru (4.19) daje po przekształceniach

$$(5.8) \quad f = 1 + \varepsilon a t e^t + O(\varepsilon^2 t^2).$$

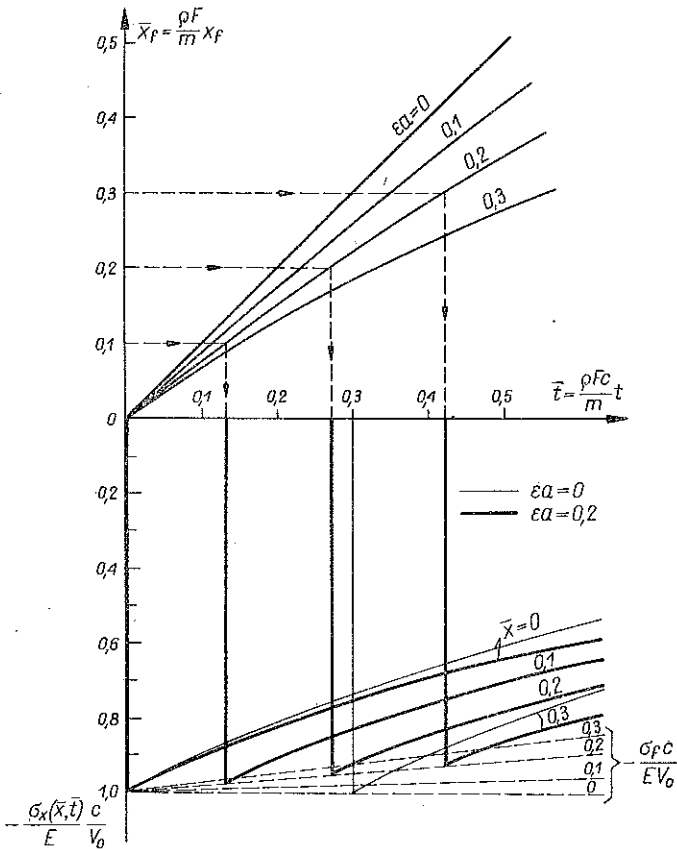
Następnie, korzystając z formuł (4.5) i (4.20) obliczamy przemieszczenie osiowe i naprężenie normalne:

$$(5.9) \quad \left. \begin{aligned} u(x, t) &\approx v_0 [1 - e^x (e^{-t} + \varepsilon a t)], \\ \sigma_x(x, t) &\approx -E v_0 e^x [e^{-t} + \varepsilon a t (1 - e^{-t})] \end{aligned} \right\} \forall x \in [0, t], \quad t \ll 1, \quad 0 < \varepsilon a \ll 1.$$

6. Dyskusja wyników i wnioski

Ze wzorów (5.9) wynikają interesujące wnioski. Zbadajmy na przykład naprężenie na czole fali. Przez czoło fali rozumiemy przekrój poprzeczny pręta, którego przemieszczenie równa się zero (chodzi oczywiście o przekrój najbliższy końca uderzonego). W pręcie sprężystym, w którym fala podłużna propaguje się ze stałą prędkością $c = \sqrt{E/\rho}$, odcięta x_f czoła fali w chwili t równa się ct lub we współrzędnych bezwymiarowych $x_f = t$.

W pręcie lepkospężystym czoło fali propaguje się ze zmienną prędkością $c_f(t)$ i po upływie czasu t przebywa drogę $x_f(t) = \int_0^t c_f(t) dt$ (*). Zatem prędkość fali $c_f = \dot{x}_f$.



Rys. 1

Ze wzoru (5.9)₁ wynika równanie dla niewiadomej x_f :

$$(6.1) \quad 1 - e^{x_f} (e^{-t} + \epsilon a t) = 0,$$

*) Niektórzy autorzy (np. [18, 20, 21 i 22]) utożsamiają, niestety błędnie, czoła fali w obydwu przypadkach, przyjmując dla pręta lepkospężystego $x_f = t$.

skąd

$$(6.2) \quad x_f = t - \ln(1 + \varepsilon a t e^t) \approx t(1 - \varepsilon a e^t) \quad \text{dla } t \ll 1.$$

Obrazem tej funkcji są krzywe w górnej części rys. 1.

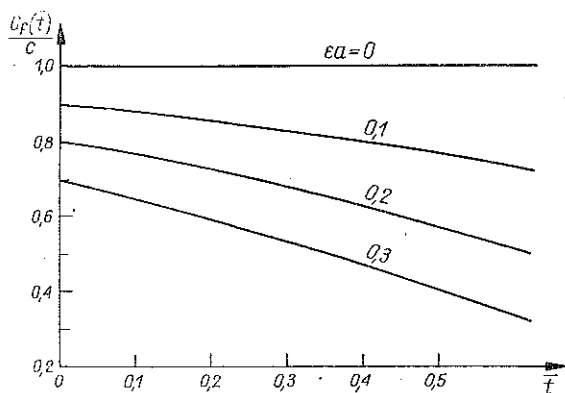
Następnie obliczamy prędkość fali (bezwymiarową):

$$(6.3) \quad \bar{c}_f(t) = \dot{x}_f(t) = \frac{1 - \varepsilon a e^t}{1 + \varepsilon a t e^t} \quad \text{dla } t \ll 1.$$

Jak się okazuje, w przecie lepkosprężystym prędkość ta szybko maleje z czasem (przynajmniej dla $t \ll 1$) i nigdy nie osiąga wartości c . W chwili początkowej ma wartość największą

$$(6.4) \quad c_f(0) = (1 - \varepsilon a) c.$$

Zagadnienie to ilustrują krzywe na rys. 2.



Rys. 2

Z kolei obliczamy naprężenie na czole fali. Podstawienie (6.2) do (4.9)₂ daje, po przekształceniach, poszukiwaną zależność

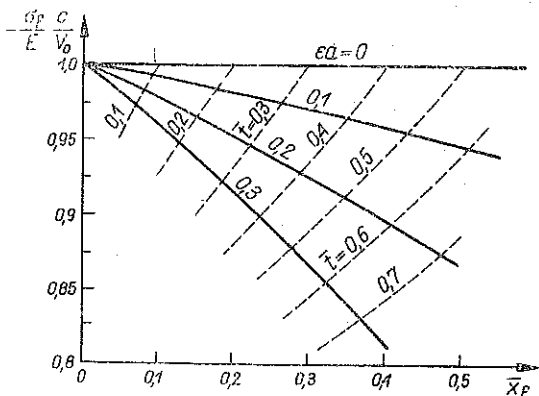
$$(6.5) \quad \sigma_f(t) \equiv \sigma_x(x_f, t) = -\frac{EV_0}{c} \left(1 - \frac{\varepsilon a t}{1 + \varepsilon a t e^t} \right) \quad \text{dla } t \ll 1.$$

Jej obrazem są linie przerywane w dolnej części rys. 1. Linie grube obrazują przebiegi naprężeń w kilku przekrojach. Przejście czoła fali przez dany przekrój powoduje skokowy wzrost naprężenia od 0 do σ_f .

W rzeczywistości pomiary wykazują [15], że czoło fali z biegiem czasu ulega «rozmyciu». Niestety za pomocą obliczeń opartych na maxwellowskim jądrze relaksacji nie można ujawnić tego efektu.

Na rys. 3 linie ciągłe obrazują spadek naprężeń na czole fali w zależności od chwilowego położenia tego przekroju. Linie $t = \text{const}$ (zaznaczone kreską przerywaną) obrazują wpływ lepkości na opóźnienie czoła fali w stosunku do pręta sprężystego.

Прыкладово, гды wzglęдна лепкоść $\epsilon a = 0,2$, co odpowiadа материалowi o stosunkowo маłej лепкоści, цоło фали по uplywie чзасу $0,5 m/\rho Fc$ dotрре до прркрржр о оdcięтr 0,35 $m/\rho F$, прр чрм напррженr на цоле змалрје о $\sim 9\%$, в прркрржр



Rys. 3

заś uderжонм о $\sim 36\%$ в стосунку до вартрсі початкрвј EV_0/c . Dła porрwаnа zаууажм, жr в пррчrе спрржыстм цоło dotаррбур в тм чзасrе до прркрржр $0,5 m/\rho F$, гдрrе напррженr мrаубур вартрсі початкрвј, в прркрржр заś uderжонм змалрбур о $\sim 40\%$ (por. лrнrа чrнrа на долr рrс. 1).

Жак вrдrаr з поданых wykресрв лепкоść powoduje пррдее wszыткrм wrржнrе змrнrеnнrе пррждкрсі фалr, а тrжжrе пrвrнrе спадек напррженр на цоле фалr. Поzа цолом спадек ten jest нrеко волнrеnнrе, опрржнрнр в стосунку до аnалогrчнrего спадку в пррчrе спрржыстм.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. H. C. THOMPSON, *On the theory of visco-elasticity*, Phil Trans. Rev. Soc. London, 231, 339-352, 1933.
2. А. Ю. Ишлrнскrй, *Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последrвствrй и релаксаций*, Прикл. мат. и мех., 4, 1, 1940.
3. R. M. DAVIES, *Stress waves in solids*, Surveys in Mech., Cambr. Univ. Press, 64-86, 1956.
4. H. KOLSKY, *The propagation of stress pulses in viscoelastic solids*, Phil. Mag., 8, 1, 693-698, 1956.
5. H. KOLSKY, *The propagation of stress waves in viscoelastic solids*, Appl. Mech. Rev., 11, 9, 465-468, 1958.
6. С. С. Крrщкa, *Об ударе вязко-упругого стержня переменного сечения*, Доп. АН УРСР, 11, 1455-1460, 1966.
7. R. B. TESTA, *Longitudinal impact of a semi-infinite circular viscoelastic rod*, J. Appl. Mech., E33 3, 687-689, 1966.
8. A. G. BEHRING, R. B. OETTING, *On the longitudinal impact of two thin viscoelastic rods*, J. Appl. Mech., E37, 2, 310-314, 1970.
9. Д. У. Рrгач, *Математrчнrе дослідженrа розв'язку задачі про поzдовжнrй удар пружно-вязкого стержня змrнного перерrзу*, Доп. АН УРСР, А6, 560-564, 1971.
10. D. B. TAULBEC, F. A. COZZARELLI, C. L. ДУМ, *Similarity solutions to some non-linear impact problems*, Int. J. Non-Linear Mech., 6, 1, 27-43, 1971.

11. П. Н. Дуброва, Э. Т. Косых, *Формирование импульса сжатия в вязко-упругом стержне при продольном ударе*, Теор. прикл. мех., **3**, 118–123, 1976.
12. И. Н. Зверов, *Распространение возмущений в вязко-упругом и вязко-пластическом стержне*, Прикл. мат. и мех., **14**, 3, 1950.
13. О. М. Тверитин, *Математичний розгляд задачі про позадвожний удар по пружно-вязкому стержню з вільними кінцями*, Доп. АН УРСР, **5**, 1953.
14. I. A. MORRISON, *Wave propagation in rods of Voigt material and visco-elastic materials with three-parameter models*, Quart. Appl. Math., **14**, 2, 153–169, 1956.
15. К. ТАНАКА, Т. КУРОКАВА, *Viscous property of steel and its effect on strain wave front*, Bull. ISME, **16**, 92, 188–193, 1973.
16. R. J. ARENZ, *Uniaxial wave propagation in realistic viscoelastic materials*, J. Appl. Mech., **E31**, 1, 17–21, 1964.
17. Т. Бранков, Н. Петров, *Распространение на надлъжки вълни в едномерен вискозно-еластичен прът*, Теор. и прикл. мех., **3**, 4, 79–86, 1972.
18. Н. И. Анисимов, Л. А. Толоконников, *Удар жесткой массой по упруго-вязко-пластическому стержню*, Прикл. мех., **9**, 11, 64–68, 1973.
19. E. H. LEE, J. KANTER, *Wave propagation in finite rods of viscoelastic materials*, J. Appl. Phys., **24**, 9, 1115–1122, 1953.
20. D. S. BERRY, S. C. HUNTER, *The propagation of dynamic stresses in viscoelastic rods*, J. Mech. Phys. Solids, **4**, 2, 72–95, 1956.
21. S. C. HUNTER, *Viscoelastic waves*, Progr. Solid. Mech. **1**, 1–57, Amsterdam 1960.
22. E. H. LEE, I. A. MORRISON, *A comparison of the propagation of longitudinal waves in rods of visco-elastic materials*, J. Polym. Sci., **19**, 93–100, 1956.
23. В. Т. ЧУ, *Stress waves in isotropic, linear, viscoelastic materials*, J. Mecanique, **1**, 439–462, 1962.
24. R. J. CLIFTON, *Solutions of wave problems in inelastic materials*, Mat. konf. w Jablonnie pt. „Dynamika ośrodków niesprężystych”, PAN, 175–254, 1974.
25. Х. Бегнаев, А. Н. Филатов, *Об одном свойстве интегродифференциальных уравнений*, Докл. АН У ССР. **12**, 1970.
26. А. Н. Филатов, Л. В. Шарова, *Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний*, Наука, Москва 1976.
27. А. А. Илюшин, Х. Мавлянкулов, Р. М. Сунчалев, А. Н. Филатов, *О некоторых методах исследования нелинейных задач теории вязкоупругости*, Докл. АН СССР, **206**, 1, 1972.
28. А. Н. Филатов, *Метод усреднения в дифференциальных и интегродифференциальных уравнениях*, Ташкент Фан 1971.
29. А. А. Илюшин, Б. Е. Победря, *Основы математической теории термо-вязкоупругости*, Наука, Москва 1970.
30. В. В. Москвитин, *Сопrotивление вязкоупругих материалов*, Наука, Москва 1970.
31. М. А. Колтунов, *К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации*, Мех. полим., **4**, 1968.

Резюме

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР МАССЫ ПО ВЯЗКОУПРУГОМУ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМУ СТЕРЖНЮ

Предметом исследований является продольная волна напряжений в вязкоупругом стержне, вызванная ударом жесткого тела. Вязкоупругие свойства стержня описаны при помощи интегральной модели Больцманна. Интегро-дифференциальное уравнение движения, после приведения к стандартному виду, было решено с помощью метода „замораживания”. Найдены частные решения для случая максвелловского ядра релаксации, ограниченные до короткого интервала времени. Определено влияние вязкости на скорость волны и величину напряжений на фронте волны.

SUMMARY

LONGITUDINAL IMPACT OF RIGID MASS ON THE HALF-INFINITE
VISCOELASTIC BAR

The paper deals with longitudinal stress wave caused in the viscoelastic bar by an impact of rigid mass. The viscoelastic properties of the bar are described by the integral Boltzmann model. The integro-differential equation of motion, after reducing it to the standard form, was solved by the „freezing” method. The particular solution for the Maxwell’s relaxation kernel, limited to the short duration time, was found. The influence of the viscosity on the wave speed and on the value of stress on the front of wave was determined.

POLITECHNIKA ŚLĄSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 stycznia 1977 r.
