

ZGINANIE POWŁOKI SFERYCZNEJ OBCIĄŻONEJ CIĘŻAREM WŁASNYM

ROMAN N A G Ó R S K I (WARSZAWA)

W pracy tej podano pewien nowy sposób rozwiązania problemu statyki cienkiej powłoki sferycznej o stałej grubości, wykonanej z materiału sprężysto jednorodnego, podlegającego prawu Hooke'a, znajdującej się w obrotowo-symetrycznym stanie zgięciowym. Rozważono powłokę o jednym brzegu, obciążoną ciężarem własnym. W przedstawionym rozwiązaniu zastosowano rzeczywiste szeregi potęgowe w odróżnieniu od znanego rozwiązania E. Reissnera wymagającego stosowania zespolonych szeregów hipergeometrycznych. Podane w pracy rozwiązanie zezwala na otrzymywanie wyników przy użyciu maszyn cyfrowych, które nie mają możliwości prowadzenia bezpośrednich operacji na liczbach zespolonych. Przykłady wykazały, że przedstawione w pracy rozwiązanie oraz rozwiązanie za pomocą szeregów zespolonych dają identyczne wyniki dla przemieszczeń i sił wewnętrznych.

1. WSTĘP

Przedmiotem pracy jest pewien nowy sposób rozwiązania problemu statyki cienkiej powłoki sferycznej o stałej grubości, wykonanej z materiału sprężysto jednorodnego, podlegającego prawu Hooke'a, znajdującej się w obrotowo-symetrycznym stanie zgięciowym. Rozważamy powłokę o jednym brzegu, obciążoną ciężarem własnym.

Znane są rozwiązania tego zagadnienia na podstawie teorii E. Reissnera za pomocą zespolonych szeregów hipergeometrycznych [1] i przybliżone na podstawie teorii W. Z. WŁASOWA dla powłok o małej wyniosłości [2] oraz na podstawie teorii zaburzeń brzegowych [1 i 3].

W niniejszej pracy podano rozwiązanie formalnie ściśle w ramach liniowej teorii cienkich powłok obrotowych za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych. Zezwala to na otrzymanie wyników przy użyciu maszyn cyfrowych.

Przykłady wykazały, że przedstawione w pracy rozwiązanie oraz rozwiązanie na podstawie teorii E. Reissnera za pomocą szeregów zespolonych dają identyczne wyniki zarówno dla przemieszczeń jak też dla sił wewnętrznych.

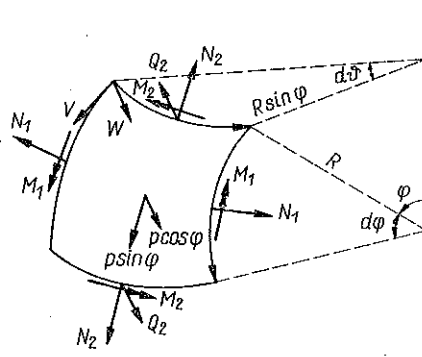
2. WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- p intensywność ciężaru własnego przypadającego na jednostkę środkowej powierzchni powłoki,
- φ szerokość geograficzna na sferze liczona od bieguna,
- φ_0 współrzędna kątowa brzegu powłoki,

- ϑ długość geograficzna na sferze
 R promień sfery,
 R_0 połowa rozpiętości powłoki,
 (\cdot) pochodna funkcji względem
 $(\cdot)'$ pochodna funkcji względem x ,
 E moduł Younga,
 ν współczynnik Poissona,
 h grubość powłoki.

3. RÓWNANIE I ZWIĄZKI TEORII E. REISSNERA POWŁOK SFERYCZNYCH

Wprowadzimy na sferze układ współrzędnych uogólnionych φ i ϑ . W środkowej powierzchni powłoki występują oznaczone na rys. 1 wielkości: momenty M_1 i M_2 , siły podłużne N_1 i N_2 , siła poprzeczna Q_2 oraz przemieszczenia: południkowe v i normalne w .



Rys. 1

Równania równowagi mają postać

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \dot{N}_2 + (N_2 - N_1) \operatorname{ctg} \varphi - Q_2 + R p \sin \varphi = 0, \\
 & \dot{Q}_2 + Q_2 \operatorname{ctg} \varphi + N_1 + N_2 + R p \cos \varphi = 0, \\
 & \dot{M}_2 + (M_2 - M_1) \operatorname{ctg} \varphi - R Q_2 = 0.
 \end{aligned}$$

Składowe stanu odkształcenia wyznaczamy za pomocą znanych wzorów

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & \varepsilon_1 = \frac{1}{R} (v \operatorname{ctg} \varphi - w), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} (\dot{v} - w), \\
 & \kappa_1 = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R^2} (\dot{w} + v) = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi}{R} \chi, \\
 & \kappa_2 = -\frac{1}{R^2} \frac{d}{d\varphi} (\dot{w} + v) = -\frac{1}{R} \dot{\chi},
 \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.3) \quad \chi = \frac{1}{R} (\dot{w} + v)$$

oznacza kąt obrotu stycznej do południka sfery.

Związki fizyczne wyrażamy w postaci

$$(3.4) \quad \begin{aligned} N_1 &= C(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = \frac{C}{R} [v \operatorname{ctg} \varphi + \nu\dot{v} - (1+\nu)w], \\ N_2 &= C(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) = \frac{C}{R} [\dot{v} + \nu v \operatorname{ctg} \varphi - (1+\nu)w], \\ M_1 &= D(\kappa_1 + \nu\kappa_2) = -\frac{D}{R} [\nu\dot{\chi} + \chi \operatorname{ctg} \varphi], \\ M_2 &= D(\kappa_2 + \nu\kappa_1) = -\frac{D}{R} [\dot{\chi} + \nu\chi \operatorname{ctg} \varphi], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.5) \quad C = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Następnie sprowadzimy układ równań (3.1) i (3.4) do dwóch równań różniczkowych zawierających funkcje χ i Q_2 . Wywód tych równań zamieszczamy tu z tego względu, że w znanej literaturze nie spotyka się go w przypadku, gdy równania (3.1)_{1,2} są niejednorodne. Nie są również podawane *explicite* odpowiednie (dalej podane) wzory na przemieszczenia v i w .

Podstawiając (3.4)_{3,4} do równania równowagi (3.1)₃ otrzymujemy

$$(3.6) \quad \ddot{\chi} + \dot{\chi} \operatorname{ctg} \varphi - \chi (\operatorname{ctg}^2 \varphi + \nu) + \frac{R^2}{D} Q_2 = 0.$$

Równania (3.4)_{1,2} odejmujemy stronami i otrzymane równanie mnożymy przez $(1+\nu) \operatorname{ctg} \varphi$. Następnie równania (3.4)_{1,2} różniczkujemy stronami względem φ i eliminujemy z nich \dot{v} . Po dodaniu stronami uzyskanych w ten sposób dwóch równań znajdujemy

$$(3.7) \quad \frac{R}{Eh} [\dot{N}_1 - \nu\dot{N}_2 + (N_1 - N_2)(1+\nu) \operatorname{ctg} \varphi] = -R\chi.$$

Z dwóch pierwszych równań równowagi (3.1) rugujemy N_1 i otrzymany związek całkujemy, znajdując równanie

$$(3.8) \quad N_2 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi = Rp \frac{\cos \varphi + \bar{c}}{\sin \varphi}.$$

Z warunku w biegunie dla $\varphi=0$ wyznaczamy $\bar{c} = -1$. Wtedy na podstawie (3.8) i (3.1)₂ mamy

$$(3.9) \quad \begin{aligned} N_2 &= -Q_2 \operatorname{ctg} \varphi - \frac{Rp}{1 + \cos \varphi}, \\ N_1 &= -\dot{Q} + Rp \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} - \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Wprowadzając (3.9) do (3.7) otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$(3.10) \quad \ddot{Q}_2 + \dot{Q}_2 \operatorname{ctg} \varphi - Q_2 (\operatorname{ctg}^2 \varphi - \nu) = Eh\chi + Rp(2+\nu) \sin \varphi.$$

Układ równań (3.6) i (3.10) przedstawiamy w postaci

$$(3.11) \quad \begin{aligned} L(\chi) - \nu\chi + \frac{R^2}{D} Q_2 &= 0, \\ L(Q_2) + \nu Q_2 - Eh\chi &= Rp(2+\nu) \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.12) \quad L = \frac{d^2}{d\varphi^2}(\dots) + \operatorname{ctg} \varphi \frac{d}{d\varphi}(\dots) - (\dots) \operatorname{ctg}^2 \varphi.$$

Zauważając, że $L(\sin \varphi) = -\sin \varphi$, znajdujemy całki szczególne układu równań (3.11):

$$(3.13) \quad \chi_s = -\frac{R^3 p}{D} \kappa \sin \varphi, \quad Q_s = -Rp(1+\nu) \kappa \sin \varphi,$$

gdzie

$$(3.14) \quad \kappa = \frac{(2+\nu)h^2}{(1-\nu^2)(h^2+12R^2)}.$$

Wyznamy jeszcze przemieszczenia v i w . Odejmując stronami wzory (3.4)_{1,2} i korzystając ze związków (3.9) otrzymujemy równanie różniczkowe na v , po rozwiązaniu którego mamy

$$(3.15) \quad v = \frac{R}{Eh}(1+\nu) \left\{ Q_2 + Rp \left[\ln(1+\cos \varphi) - \frac{1}{1+\cos \varphi} \right] \sin \varphi + \bar{A} \sin \varphi \right\}.$$

Na podstawie (3.4)₂, (3.9)₁ oraz (3.15) otrzymujemy

$$(3.16) \quad \begin{aligned} w = \frac{R}{\nu h} \left\{ \dot{Q}_2 + Q_2 \operatorname{ctg} \varphi + (1+\nu) \bar{A} \cos \varphi + \right. \\ \left. + Rp(1+\nu) \left[\ln(1+\cos \varphi) \cos \varphi + \frac{\cos \varphi}{1+\nu} - 1 \right] \right\}, \end{aligned}$$

gdzie \bar{A} oznacza stałą całkowania.

4. ROZWIĄZANIE ZA POMOCĄ RZECZYWISTYCH SZEREGÓW POTĘGOWYCH

Znane jest rozwiązanie układu równań (3.11) za pomocą zespolonych szeregów hipergeometrycznych ([1] § 6.2.1). W pracy naszej przedstawimy sposób rozwiązania za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych.

Podstawiając w układzie równań jednorodnych (3.11)

$$(4.1) \quad x = \sin^2 \varphi, \quad \chi = \frac{R^2}{D} \bar{\chi} \sin \varphi, \quad Q_2 = \bar{Q}_2 \sin \varphi$$

otrzymujemy

$$(4.2) \quad \begin{aligned} 4x(1-x) \bar{\chi}'' + (8-10x) \bar{\chi}' - (1+\nu) \bar{\chi} + \bar{Q}_2 &= 0, \\ 4x(1-x) \bar{Q}_2' + (8-10x) \bar{Q}_2'' - (1-\nu) \bar{Q}_2 - \frac{R^2}{D} Eh \bar{\chi} &= 0. \end{aligned}$$

Poszukujemy rozwiązań układu (4.2) w postaci

$$(4.3) \quad \bar{\chi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad \bar{Q}_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n.$$

Podstawiając (4.3) do (4.2) i przyrównując współczynniki przy kolejnych potęgach x do zera znajdujemy układ równań rekurencyjnych na współczynniki a_n i b_n :

$$(4.4) \quad \begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n^2 + 1,5n + 1 + \nu}{(n+1)(n+2)} a_n - \frac{1}{4(n+1)(n+2)} b_n, \\ b_{n+1} &= \frac{n^2 + 1,5n + 1 - \nu}{(n+1)(n+2)} b_n + \frac{R^2 E h}{4(n+1)(n+2)D} a_n. \end{aligned}$$

Wykażemy zbieżność szeregów (4.3). Uwzględniając związki (4.4) tworzymy majoranty szeregów (4.3).

$$(4.5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n x^n,$$

w których

$$(4.6) \quad \bar{a}_{n+1} = \bar{a}_n + \gamma_n \bar{b}_n, \quad \bar{b}_{n+1} = \bar{b}_n + \gamma_n \bar{a}_n,$$

gdzie

$$(4.7) \quad \gamma_n = \frac{E h R^2}{4D(n+1)(n+2)} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots),$$

przy czym

$$\bar{a}_0 \geq a_0, \quad \bar{b}_0 \geq b_0.$$

Przyjmując $\bar{a}_0 = \bar{b}_0$ na podstawie (4.6), (4.7) otrzymujemy

$$\bar{a}_n = \bar{b}_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

Zatem po uwzględnieniu (4.6) mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{a}_{n+1}}{\bar{a}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \gamma_n) = 1.$$

Na podstawie kryterium D'Alemberta wynika zbieżność szeregów (4.5), a więc również (4.3) dla $x \in (-1, 1)$.

Przyjmijmy oznaczenia:

$$\text{dla } a_0 = 0, \quad b_0 = 1: \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad T_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

$$\text{dla } a_0 = 1, \quad b_0 = 0: \quad S_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad T_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

gdzie a_n, b_n ($i=1, 2$) znajdujemy ze wzorów (4.4).

Na podstawie (4.1)–(4.3) oraz (3.13) otrzymujemy

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \chi &= \frac{R^2 p}{D} [-\kappa + C_1 S_1(x) + C_2 S_2(x)] \sin \varphi, \\ Q_2 &= Rp [-(1+\nu)\kappa + C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x)] \sin \varphi, \end{aligned}$$

gdzie C_1, C_2 są stałymi całkowania.

Korzystając ze wzorów (3.4)_{3,4}, (3.9), (3.15), (3.16), (4.1) i (4.8) otrzymujemy wzory na przemieszczenia, siły przekrojowe i momenty zginające:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} w &= \frac{R^2 p}{Eh} \left\{ (1+\nu) \left[\ln(1+\cos \varphi) + \frac{1}{1+\nu} - \frac{1}{\cos \varphi} - 2\kappa + A \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2C_1 [T_1(x) + xT_1'(x)] + 2C_2 [T_2(x) + xT_2'(x)] \right\} \cos \varphi, \\ v &= \frac{R^2 p}{Eh} (1+\nu) \left[\ln(1+\cos \varphi) - (1+\nu)\kappa - \frac{1}{1+\cos \varphi} + A + \right. \\ &\quad \left. + C_1 T_1(x) + C_2 T_2(x) \right] \sin \varphi, \\ N_1 &= Rp \left\{ (1+\nu)\kappa - 1 + \frac{1}{(1+\cos \varphi) \cos \varphi} - C_1 [T_1(x) + 2xT_1'(x)] + \right. \\ &\quad \left. - C_2 [T_2(x) + 2xT_2'(x)] \right\} \cos \varphi, \\ N_2 &= Rp \left\{ (1+\nu)\kappa - \frac{1}{(1+\cos \varphi) \cos \varphi} - C_1 T_1(x) - C_2 T_2(x) \right\} \cos \varphi, \\ M_1 &= R^2 p \left\{ (1+\nu)\kappa - C_1 [(1+\nu)S_1(x) + 2\nu xS_1'(x)] + \right. \\ &\quad \left. - C_2 [(1+\nu)S_2(x) + 2\nu xS_2'(x)] \right\} \cos \varphi, \\ M_2 &= R^2 p \left\{ (1+\nu)\kappa - C_1 [(1+\nu)S_1(x) + 2xS_1'(x)] + \right. \\ &\quad \left. - C_2 [(1+\nu)S_2(x) + 2xS_2'(x)] \right\} \cos \varphi, \end{aligned}$$

gdzie $x = \sin^2 \varphi$, a stałe całkowania A, C_1, C_2 wyznaczamy z warunków podparcia powłoki.

Rozważmy dwa typowe przypadki warunków brzegowych.

Brzeg podparty przegubowo

W tym przypadku na brzegu powłoki dla $\varphi = \varphi_0$ ($x = x_0$) jest $w = v = M_2 = 0$. Na podstawie (4.9) otrzymujemy układ równań, z którego wyznaczamy stałe A, C_1, C_2 :

$$(4.10) \quad C_1 = \frac{1+\nu}{L_0} \left\{ \left[(1-\nu)\kappa - \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{(1+\cos \varphi_0) \cos \varphi_0} \right] [(1+\nu)S_2(x_0) + \right. \\ \left. + 2x_0 S_2'(x_0)] - \kappa [(1-\nu)T_2(x_0) + 2x_0 T_2'(x_0)] \right\},$$

$$(4.10) \quad C_2 = \frac{1+\nu}{L_0} \left\{ \kappa [(1-\nu)T_1(x_0) + 2x_0T_1'(x_0)] - \left[(1-\nu)\kappa - \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{(\cos \varphi_0 + 1) \cos \varphi_0} \right] [(1+\nu)S_1(x_0) + 2x_0S_1'(x_0)] \right\},$$

$$A = (1+\nu)\kappa - \ln(1 + \cos \varphi_0) + \frac{1}{1 + \cos \varphi_0} - C_1T_1(x_0) - C_2T_2(x_0),$$

gdzie

$$(4.11) \quad L_0 = (1-\nu^2) [T_1(x_0)S_2(x_0) - T_2(x_0)S_1(x_0)] + \\ + 2(1-\nu)x_0 [T_1(x_0)S_2'(x_0) - T_2(x_0)S_1'(x_0)] + \\ + 2(1+\nu)x_0 [S_2(x_0)T_1'(x_0) - S_1(x_0)T_2'(x_0)] + \\ + 4x_0^2 [S_2'(x_0)T_1'(x_0) - S_1'(x_0)T_2'(x_0)].$$

Brzeg utwierdzony

Na brzegu powłoki dla $\varphi = \varphi_0$ ($x = x_0$) mamy $\nu = w = \chi = 0$. Na podstawie (4.8)₁ i (4.9)_{1,2} otrzymujemy układ równań, po rozwiązaniu którego znajdujemy stałe A , C_1 , C_2 :

$$(4.12) \quad C_1 = \frac{1}{L_1} \left\{ \left[(1-\nu)\kappa - \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{(1 + \cos \varphi_0) \cos \varphi_0} \right] (1+\nu)S_2(x_0) + \right. \\ \left. - \kappa [(1-\nu)T_2(x_0) + 2x_0T_1'(x_0)] \right\},$$

$$C_2 = \frac{1}{L_1} \left\{ -(1+\nu) \left[(1-\nu)\kappa - \frac{1}{1+\nu} + \frac{1}{(1 + \cos \varphi_0) \cos \varphi_0} \right] S_1(x_0) + \right. \\ \left. + \kappa [(1-\nu)T_1(x_0) + 2x_0T_1'(x_0)] \right\},$$

gdzie

$$(4.13) \quad L_1 = (1-\nu) [T_1(x_0)S_2(x_0) - S_1(x_0)T_2(x_0)] + \\ + 2x_0 [T_1'(x_0)S_2(x_0) - S_1(x_0)T_2'(x_0)],$$

a A jest określone za pomocą wzoru (4.10)₃.

5. PRZYKŁAD

Przyjmijmy następujące dane liczbowe

$$p = 300 \text{ kG/m}^2, \quad E = 3 \cdot 10^9 \text{ kG/m}^2,$$

$$R_0 = 15 \text{ m}, \quad h = 0,06 \text{ m}, \quad \nu = 1/6.$$

Rozważmy dwa rodzaje podparcia powłoki: przegubowe (1) i pełne utwierdzenie (2) oraz następujące przypadki wyniosłości powłoki: 0,1; 0,2; 0,35. Przez wyniosłość

powłoki rozumiemy stosunek odległości bieguna powłoki od płaszczyzny wyznaczonej przez brzeg do średnicy planu kołowego.

W tabelicy 1 podano wartości w , N_1 , N_2 , M_1 , M_2 w punktach powierzchni sferycznej, których współrzędną bezwymiarową ξ jest stosunek odległości od brzegu rzutu pionowego tych punktów do promienia R_0 planu kołowego.

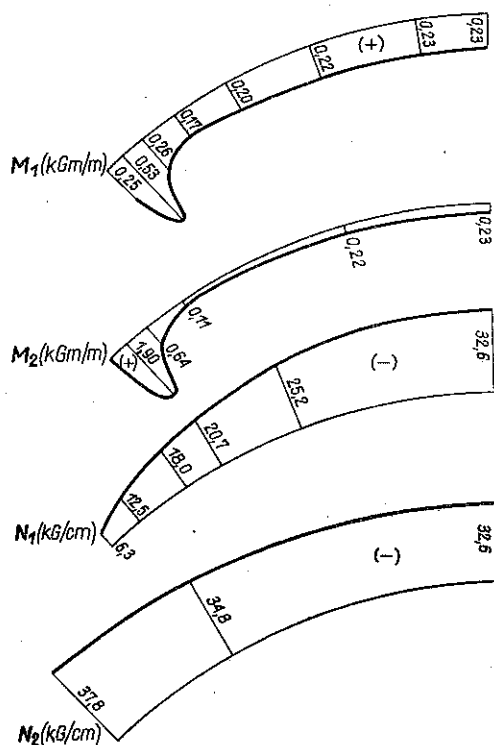
Tabela 2

Brzeg	Wynios- łość	Minimum				Maximum			
		ξ	M_1	ξ	M_2	ξ	M_1	ξ	M_2
1	0,1	0,28	-0,07	0,30	-0,83	0,04	5,55	0,06	21,93
	0,2	0,16	0,17	0,18	0,11	0,04	0,53	0,04	1,90
	0,35	0,02	-2,33	0,02	-13,28	0,08	0,24	0,08	0,75
2	0,1	0,00	-12,20	0,00	-73,18	0,10	3,93	0,12	14,93
	0,2	0,00	-2,06	0,00	-12,36	0,08	0,50	0,08	1,62
	0,35	0,02	-1,44	0,02	-7,58	0,00	6,15	0,00	36,88

j.(kGm/m)

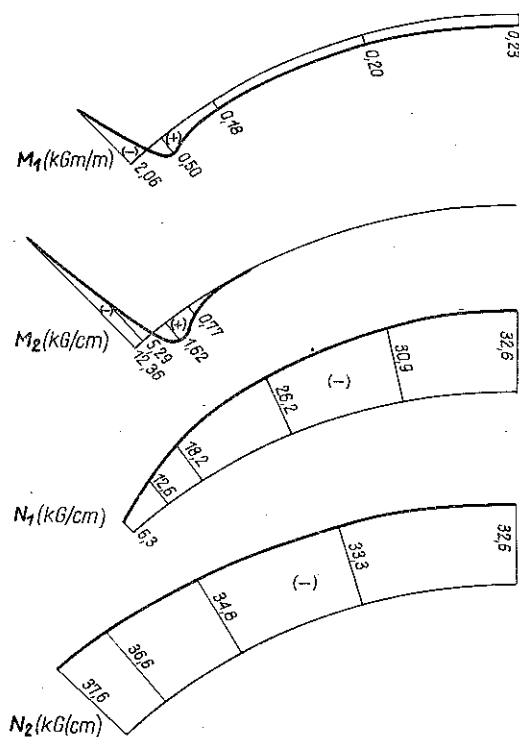
W tabelicy 2 podano ekstremalne wartości momentów i ich współrzędną ξ dla rozważanych przypadków podparcia i wyniosłości powłoki.

Poza tym sporządzono wykresy wielkości statycznych w powłoce dla wyniosłości 0,2. Przypadek ten jest szczególnie interesujący, ponieważ wtedy dają znaczne błędy



Wykres 1. Brzeg podparty przegubowo

rozwiązania zarówno za pomocą metody zaburzeń brzegowych jak też przy wykorzystaniu wzorów teorii Własowa dla powłok o małej wyniosłości.



Wykres 2. Brzeg utwierdzony

Wyniki liczbowe otrzymane na podstawie przedstawionego rozwiązania oraz rozwiązania E. Reissnera przy użyciu zespolonych szeregów hipergeometrycznych nie różnią się w zakresie czterech cyfr znaczących dla przemieszczeń i sześciu cyfr znaczących dla sił i momentów.

LITERATURA CYTOWANA W PRACY

1. W. FLÜGE, *Powłoki, Obliczenia statyczne*, Warszawa 1972.
2. W. Z. WŁASOW, *Obszczaja teoria oboleček*, Moskwa 1944.
3. I. MENYGARD, *Konstrukcje powłokowe*, Warszawa 1971.

Резюме

ИЗГИБ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ НАГРУЖЕННОЙ СОБСТВЕННЫМ ВЕСОМ

В данной работе дается некоторый новый способ решения проблемы статики тонкой сферической оболочки постоянной толщины, изготовленной из упругооднородного материала подчиняющегося закону Гука, и находящейся в вращательно-симметричном изгибном состоянии. Рассмотрена оболочка с одним краем, нагруженная собственным весом. В представ-

ленном решении применены вещественные степенные ряды в отличие от известного решения Э. Рейсснера требующего применения комплексных гипергеометрических рядов. Приведенное в работе решение позволяет получить результаты при использовании вычислительных цифровых машин, которые не имеют возможности проводить непосредственно операций на комплексных числах. Примеры показали, что представленное в работе решение и решение при помощи комплексных рядов дают идентичные результаты для перемещений и внутренних сил.

SUMMARY

BENDING OF THE SPHERICAL SHELL UNDER ITS OWN WEIGHT

In this paper a new way of solution of the static problem of thin spherical shell of constant thickness is presented. The shell is made of elastic homogeneous material which is governed by the Hook's law. The shell is in a stationary-symmetric bending state and is loaded by its own weight.

In the solution presented the real power series are applied in distinction with the known Reissner's solution requiring application of the complex hypergeometric series. The solution presented allows for obtaining results on digital computers which have no possibility of operation on complex numbers. The examples have shown that the solution presented in this paper and the solution obtained by means of the complex series lead to the same results for displacements and internal forces.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca wpłynęła do Redakcji 11 listopada 1976 r.
