

KONSOLIDACJA PÓLPRZESTRZENI LEPKO-SPRĘŻYSTEJ Z MIESZANYMI WARUNKAMI PRZEPUSZCZALNOŚCI BRZEGU JAKO ZAGADNIENIE PŁASKIE

RYSZARD A R E N I C Z, J A N G A S Z Y Ń S K I (KRAKÓW)

W pracy rozważono konsolidację półpłaszczyzny lepko-sprężystej z mieszanymi warunkami przepuszczalności brzegu. Podano efektywne wzory na wyznaczenie osiadań brzegu półpłaszczyzny oraz rozkład ciśnienia porowego na nieprzepuszczalnej części brzegu.

1. WSTĘP

Rozważa się proces konsolidacji porowatego ośrodka o szkielecie lepko-sprężystym, nasyconego cieczą. Proces ten wywołany jest znanym obciążeniem działającym na brzegu półprzestrzeni. Zakładamy, że część brzegu półprzestrzeni jest nieprzepuszczalna, a pozostała część przepuszczalna. Tak sformułowane zadanie należy oczywiście do grupy mieszanych problemów brzegowych, z których do tej pory rozwiązywano jedynie zadania kontaktowe [2, 4, 5, 6, 7 i 11]. Podjęcie tematyki uwzględniającej mieszane warunki przepuszczalności brzegu jest celowe z poznawczego punktu widzenia, jak i przydatne dla zastosowań.

Zadanie rozwiązano w płaskim stanie odkształcenia, przyjmując za podstawę rozważań sprężoną teorię konsolidacji [1, 3 i 11].

2. UKŁAD RÓWNAŃ KONSOLIDUJĄCEGO OŚRODKA LEPKO-SPRĘŻYSTEGO

Wykorzystując założenia teorii [1 i 11] zestawimy podstawowy układ równań: związki fizyczne

$$(2.1) \quad \sigma_{ij} = 2N\varepsilon_{ij} + (Me - Ap) \delta_{ij};$$

związki geometryczne

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i});$$

równania równowagi

$$(2.3) \quad \sigma_{i,j,j} = 0;$$

równanie filtracji [11]

$$(2.4) \quad \frac{k}{\gamma} \nabla^2 p = \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon}, \quad (\cdot) = \frac{\partial}{\partial t},$$

gdzie wprowadzono następujące oznaczenia: σ_{ij} oznacza składowe tensora naprężeń, ε_{ij} składowe tensora odkształceń, u_i współrzędne wektora przemieszczenia, p ciśnienie cieczy w porach, k współczynnik filtracji, γ ciężar właściwy cieczy, n porowatość, α_w moduł ścisłości cieczy, ∇^2 operator Laplace'a, δ_{ij} symbol Kroneckera oraz N, M, A operatory całkowe Voltery charakteryzujące własności reologiczne szkieletu:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} N^{-1} &= \mu^{-1} \left[1 + \int_0^t K(t-\tau) \dots d\tau \right], & N &= \mu \left[1 - \int_0^t R(t-\tau) \dots d\tau \right], \\ A_v^{-1} &= \alpha_v^{-1} \left[1 + \int_0^t K_v(t-\tau) \dots d\tau \right], & A_v &= \alpha_w \left[1 - \int_0^t R_v(t-\tau) \dots d\tau \right], \\ A_p^{-1} &= \alpha_p^{-1} \left[1 + \int_0^t K_p(t-\tau) \dots d\tau \right], & A_p &= \alpha_p \left[1 - \int_0^t R_p(t-\tau) \dots d\tau \right], \\ A &= A_v A_p^{-1}, & M &= \frac{1}{3} (A_v - 2N). \end{aligned}$$

W tych ostatnich wzorach μ, α_v, α_p oznaczają odpowiednio moduły odkształcenia postaciowego, objętościowego i wywołanego ciśnieniem cieczy w porach.

Ze wzorów (2.1) i (2.3) w znany sposób można otrzymać układ równań teorii konsolidacji dla przemieszczeń, który wraz z równaniem filtracji napiszemy w postaci:

$$(2.6) \quad N \nabla^2 u_i + (N+M) \varepsilon_{,i} = A p_{,i}, \quad \frac{k}{\gamma} \nabla^2 p = \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon}, \quad i=1, 2, 3.$$

Równania (2.6) stanowią układ równań różniczkowo-całkowych cząstkowych typu eliptyczno-parabolicznego.

3. SFORMUŁOWANIA PROBLEMU

W płaskim, kartezjańskim układzie współrzędnych x, z znajduje się konsolidująca półprzestrzeń $z \geq 0$ o gładkim brzegu $z=0$. Brzeg ten jest nieprzepuszczalny w przedziale $(-l, l)$, natomiast przepuszczalny na pozostałej swej części. Konsolidację wywołuje znane obciążenie normalne $q(x, t)$ przyłożone do brzegu $z=0$ (rys. 1).

Dla opisanych warunków układ równań (2.6) przyjmie postać:

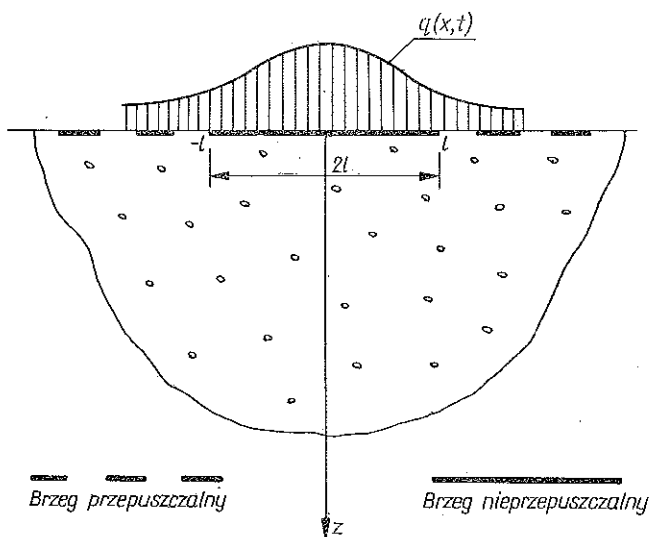
$$(3.1) \quad \begin{aligned} N \nabla^2 u + (N+M) \varepsilon_{,x} &= A p_{,x}, \\ N \nabla^2 w + (N+M) \varepsilon_{,z} &= A p_{,z}, \\ \frac{k}{\gamma} \nabla^2 p &= \frac{3n}{\alpha_w} \dot{p} + \dot{\varepsilon}, \end{aligned}$$

gdzie u oznacza współrzędną wektora przemieszczenia w kierunku osi x , w współrzędną wektora przemieszczenia w kierunku osi z oraz

$$\varepsilon = u_{,x} + w_{,z}, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Opisany problem brzegowy przedstawimy w postaci następującej:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \sigma_z &= -q(x, t), & z=0; \\ \sigma_{xz} &= 0, & z=0; \\ p_{,z} &= 0, & |x| < l, \quad z=0; \\ p &= 0, & |x| > l, \quad z=0. \end{aligned}$$



Rys. 1

Zakładając ciągły wzrost obciążenia $q(x, t)$ od wartości równej 0 do pewnej dowolnej wartości, napiszemy warunki początkowe w formie

$$(3.3) \quad u(x, z, 0) = w(x, z, 0) = p(x, z, 0) = 0.$$

Warunki te spełniają oczywiście wymagane tu równania zgodności [8].

4. SPROWADZENIE PROBLEMU BRZEGOWEGO (3.2) DO DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH

W dalszych rozważaniach założymy, że obciążenie $q(x, t)$ jest funkcją parzystą argumentu x . Wykorzystując transformacje całkowe Fouriera i Laplace'a oraz twierdzenie o splocie znajdziemy rozwiązanie układu (3.1) w transformatach Laplace'a [6]:

$$(4.1) \quad \bar{u} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{A}{2\bar{N} + \bar{M}} \right) z e^{-\alpha w z} - C_2 \frac{\bar{A} \omega}{s \bar{B} (2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + \right. \\ \left. + C_3 e^{-\alpha z} \right] \sin \omega x d\omega + \bar{u}^*(s),$$

$$(4.1) \quad \bar{w} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N} - \bar{M}} \right) z e^{-\omega z} - C_2 \frac{\bar{A}m}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} e^{-mz} + C_4 e^{-\omega z} \right] \cos \omega x d\omega + \bar{w}^*(s),$$

$$\bar{p} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (C_1 e^{-\omega z} + C_2 e^{-mz}) \cos \omega x d\omega,$$

gdzie

$$(4.2) \quad m^2 = \omega^2 + s\bar{B},$$

$$\bar{B} = \frac{\gamma}{k} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{A}{2\bar{N} + \bar{M}} \right),$$

$$(\bar{u}, \bar{w}, \bar{p}; \bar{A}, \bar{N}, \bar{M}) = \int_0^{\infty} (u, w, p; A, N, M) e^{-st} dt.$$

Symbole $C_i = C_i(\omega, s)$, $i=1, 2, 3, 4$ oznaczają współczynniki, które należy określić z warunków brzegowych. Wiąże je równość

$$(4.3) \quad C_1 \left[\frac{3n}{\alpha_w} (3\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] + 2(C_3 - C_4)\bar{N}\omega = 0,$$

wynikająca ze sposobu rozwiązywania układu równań (3.1) [6]. Interesujące nas transformaty naprężeń wyznaczymy z równań

$$(4.4) \quad \bar{\sigma}_z = 2\bar{N}\bar{e}_z + \bar{M}\bar{e} - \bar{A}\bar{p}, \quad \bar{\sigma}_x = 2\bar{N}\bar{e}_z + \bar{M}\bar{e} - \bar{A}\bar{p}, \quad \bar{\sigma}_{xz} = 2\bar{N}\bar{e}_{xz},$$

podstawiając do nich rozwiązanie (4.1). Uwzględniając w warunkach brzegowych (3.2) wzory (4.1) i (4.4) dostajemy

$$(4.5) \quad C_1 \left[\frac{\bar{A}\bar{M}}{2\bar{N}} + \frac{(\bar{N} + \bar{M})(2\bar{N} + \bar{M})}{2\bar{N}} \frac{3n}{\alpha_w} \right] + C_2 \frac{2\bar{A}\bar{N}\omega^2}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} + C_3 \bar{M}\omega - C_4(2\bar{N} + \bar{M})\omega = -\bar{q},$$

$$C_1 \frac{\bar{N} + \bar{M}}{2\bar{N}} \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{A}{\bar{N} + \bar{M}} \right) + C_2 \frac{2\bar{A}m\omega}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} - (C_3 + C_4)\omega = 0,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (C_1 \omega + C_2 m) \cos \omega x d\omega = 0, \quad x < l,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (C_1 + C_2) \cos \omega x d\omega = 0, \quad x > l,$$

gdzie

$$(4.6) \quad \bar{q} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} q e^{-st} \cos \omega x dt dx$$

jest transformatą obciążenia brzegu.

Z równań (4.5)₃–(4.5)₄ eliminujemy współczynniki C_2 , C_3 i C_4 za pomocą równań (4.3), (4.5)₁ i (4.5)₂ otrzymamy

$$(4.7) \quad \int_0^{\infty} \left\{ C_1 \omega + \frac{n\tilde{q} - C_1 m \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\bar{A}\bar{N}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}} \right\} \cos \omega x d\omega = 0, \quad x < l,$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ C_1 + \frac{\tilde{q} - C_1 \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N}_3 + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\bar{A}\bar{N}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}} \right\} \cos \omega x d\omega = 0, \quad x > l.$$

Z otrzymanego układu równań należy wyznaczyć nie znany współczynnik C_1 . Pozostałe współczynniki określone są następującymi wzorami:

$$(4.8) \quad C_2 = \frac{\tilde{q} - C_1 \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\bar{A}\bar{N}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}},$$

$$C_3 = \frac{m\tilde{q}}{2\bar{N}\omega(m-\omega)} - \frac{C_1}{2\bar{N}\omega(m-\omega)} \left\{ \frac{3n}{\alpha_w} [m(2\bar{N} + \bar{M}) - \omega\bar{N}] + m\bar{A} \right\},$$

$$C_4 = \frac{m\tilde{q}}{2\bar{N}\omega(m-\omega)} - \frac{C_1}{2\bar{N}\omega(m-\omega)} \left\{ \frac{3n}{\alpha_w} [m(2\bar{N} + \bar{M}) - m\bar{N}] + \omega\bar{A} \right\}.$$

Podstawiając

$$(4.9) \quad \Phi(\omega, s) = C_1 + \frac{\tilde{q} - \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] C_1}{\frac{2\bar{N}\bar{A}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}},$$

$$G(\omega, s) = \omega + \frac{\left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] (m-\omega)}{\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\bar{A}\bar{N}\omega(m-\omega)}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})}},$$

$$f(x, s) = - \int_0^{\infty} \frac{(m-\omega)\tilde{q}}{\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}} \cos \omega x d\omega,$$

otrzymujemy

$$(4.10) \quad \int_0^{\infty} G(\omega, s) \Phi(\omega, s) \cos \omega x d\omega = f(x, s), \quad x < l,$$

$$\int_0^{\infty} \Phi(\omega, s) \cos \omega x d\omega = 0, \quad x > l.$$

Tak więc mieszany warunek brzegowy (3.2) został sprowadzony do dualnych równań całkowych (4.10).

Gdyby założyć, że w przedziale $(-l, l)$ brzeg jest przepuszczalny, a poza tym przedziałem nieprzepuszczalny, a więc odwrotnie niż w punkcie 3 niniejszej pracy, wówczas równania (4.7) przyjąłby kształt:

$$(4.11) \quad \int_0^{\infty} \left\{ C_1 + \frac{\tilde{q} - C_1 \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}} \right\} \cos \omega x d\omega = f(x, s), \quad x < l,$$

$$\int_0^{\infty} \left\{ C_1 \omega + \frac{m\tilde{q} - C_1 m \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}} \right\} \cos \omega x d\omega = 0, \quad x > l.$$

Dokonując tu podstawień

$$(4.12) \quad \hat{\Phi}(\omega, s) = C_1 \omega + \frac{m\tilde{q} - C_1 m \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right]}{\frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}},$$

$$\hat{G}(\omega, s) = \frac{\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}}{m \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] + \omega \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right]},$$

$$f(x, s) = \int_0^{\infty} \frac{(m+\omega) \tilde{q} \cos \omega x d\omega}{m \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} \right] + \omega \left[\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\omega}{m+\omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right]},$$

otrzymamy

$$(4.13) \quad \int_0^{\infty} \hat{G}(\omega, s) \hat{\Phi}(\omega, s) \cos \omega x d\omega = f(x, s), \quad x < l,$$

$$\int_0^{\infty} \hat{\Phi}(\omega, s) \cos \omega x d\omega = 0, \quad x > l.$$

W tym przypadku jak i w poprzednim mieszany problem brzegowy sprowadzony został do dualnych równań całkowych (4.13).

5. ROZWIĄZANIE DUALNYCH RÓWNAŃ CAŁKOWYCH (4.10) i (4.13)

Na metodę rozwiązania dualnych równań całkowych w istotny sposób rzutuje kształt funkcji wagowej $G(\omega, s)$ w (4.10)₁ lub $\hat{G}(\omega, s)$ w (4.13)₁. Będziemy szukać rozwiązania w postaci następującej:

dla (4.10)

$$\Phi(\omega, s) = \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) J_0(\xi \omega) d\xi;$$

(5.1)

dla (4.13)

$$\hat{\Phi}(\omega, s) = \omega \int_0^l \xi \hat{\varphi}(\xi, s) J_1(\xi \omega) d\xi.$$

Ogólna metoda rozwiązania dualnych równań całkowych z jądrami trygonometrycznymi dla występującego tu typu funkcji wagowej została podana w pracy [6]. Z otrzymanych rezultatów i wobec tożsamościowego spełnienia równań (4.10)₂ oraz (4.13)₂ przez (5.1) otrzymamy

$$\int_0^\infty \left[\omega + \frac{(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \frac{\gamma^2}{k} \right) s(m + \omega)}{(\bar{N} + \bar{M})(m + \omega)^2 + \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{\gamma}{k} s} \right] \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) J_0(\xi \omega) d\xi \times \\ \times \cos \omega x d\omega = f(x, s),$$

$$(5.2) \quad \int_0^\infty \omega \frac{(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) - \frac{2\omega}{m + \omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}}{m(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right)} \times \\ \times \int_0^l \xi \hat{\varphi}(\xi, s) J_1(\xi \omega) d\xi \cos \omega x d\omega = f(x, s).$$

Zajmiemy się najpierw równaniem (5.2)₁. Całkując je w przedziale $(0, x)$ i przekształcając, otrzymamy

$$\int_0^l \xi \varphi(\xi, s) \int_0^\infty J_0(\xi \omega) \sin \omega x d\omega d\xi + \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) \times \\ \times \int_0^\infty \frac{(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \frac{\gamma}{k} s(m + \omega)}{(\bar{N} + \bar{M})(m + \omega)^2 \omega + \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{\gamma}{k} s \omega} J_0(\xi \omega) \sin \omega x d\omega d\xi = \int_0^x f(t, s) dt.$$

Wykorzystując dalej w pierwszym wyrazie po lewej stronie całkę Webera-Schafheitlina

$$(5.3) \quad \int_0^{\infty} J_0(\xi\omega) \sin x\omega \, d\omega = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \xi > x, \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 - \xi^2}}, & \text{jeżeli } \xi < x \end{cases}$$

oraz dokonując podstawień

$$(5.4) \quad H(\omega, s) = \frac{(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \frac{\gamma}{k} s(m + \omega)}{(\bar{N} + \bar{M})(m + \omega)^2 \omega + \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \frac{\gamma}{k} s\omega},$$

$$f_1(x, s) = \int_0^x f(t, s) \, dt,$$

dostajemy

$$(5.5) \quad \int_0^x \frac{\xi \varphi(\xi, s)}{\sqrt{x^2 - \xi^2}} \, d\xi + \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) \int_0^{\infty} H(\omega, s) J_0(\xi\omega) \sin x\omega \, d\omega \, d\xi = f_1(x, s).$$

W pierwszej całce dokonujemy następującego podstawienia:

$$\xi = x \sin \theta,$$

w drugiej

$$J_0(\xi\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(\xi\omega \sin \theta) \, d\theta$$

oraz definiujemy funkcję

$$(5.6) \quad F(x \sin \theta, s) = x \sin \theta \varphi(x \sin \theta, s) + \frac{2}{\pi} \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) \int_0^{\infty} H(\omega, s) \cos(\xi\omega \sin \theta) \sin x\omega \, d\omega \, d\xi.$$

Po tych operacjach równanie (5.5) napiszemy w formie równania Schllömilcha:

$$(5.7) \quad \int_0^{\pi/2} F(x \sin \theta, s) \, d\theta = f_1(x, s)$$

którego rozwiązanie ma postać

$$(5.8) \quad F(x, s) = \frac{2}{\pi} \left[f_1(0, s) + x \int_0^{\pi/2} f_1'(x \sin \theta, s) \, d\theta \right].$$

Wykorzystując (5.8) do (5.6) dostajemy

$$(5.9) \quad \psi(x, s) + \frac{1}{\pi} \int_0^l K(x, \xi, s) \psi(\xi, s) \, d\xi = F(x, s),$$

gdzie

$$\begin{aligned} \psi(x, s) &= x\varphi(x, s), \\ (5.10) \quad K(x, \xi, s) &= \int_0^\infty H(\omega, s) [\sin \omega(x + \xi) + \sin \omega(x - \xi)] d\omega. \end{aligned}$$

Tak więc mieszany problem brzegowy został sprowadzony do równania całkowego Fredholma drugiego rodzaju. Równanie to ma ciągle i ograniczone jądro, co wynika z (5.10)₂ i (5.4)₁. Skomplikowana postać jądra nie pozwala uzyskać rozwiązania w postaci zamkniętej, nie przedstawia to jednak większych trudności merytorycznych przy wykorzystaniu metod przybliżonych, co było pokazane w pracy [7].

Rozważmy teraz równanie (5.2)₂. Po elementarnych przekształceniach przedstawimy je w formie

$$\begin{aligned} (5.11) \quad \int_0^l \xi \hat{\phi}(\xi, s) \int_0^\infty J_1(\xi \omega) \cos \omega x d\omega d\xi - \int_0^l \xi \hat{\phi}(\xi, s) \int_0^\infty \hat{H}(\omega, s) \times \\ \times J_1(\xi \omega) \cos \omega x d\omega d\xi = \frac{2 \frac{k}{\gamma} \bar{B}(\bar{N} + \bar{M}) + \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}}{\frac{k}{\gamma} \bar{B}(\bar{N} + \bar{M})} \hat{f}(x, s), \end{aligned}$$

gdzie

$$(5.12) \quad \hat{H}(\omega, s) = \frac{\frac{\gamma}{k} s \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) \left[(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) - \frac{\omega}{m + \omega} \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right]}{(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right) (m + \omega^2) - \frac{2\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}} \omega^2}.$$

Przekształcając dalej równanie (5.11) oraz wykorzystując wyniki pracy [6], dochodzimy do równania

$$(5.13) \quad \hat{\psi}(x, s) + \frac{1}{\pi} \int_0^l K(x, \xi, s) \hat{\psi}(\xi, s) d\xi = \hat{F}(x, s),$$

gdzie dla zwięzłości wprowadzono oznaczenia

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(x, s) &= x\hat{\phi}(x, s), \\ \hat{K}(x, \xi, s) &= \int_0^\infty \hat{H}(\omega, s) [\sin \omega(\xi + x) + \sin \omega(\xi - x)] d\omega, \\ (5.14) \quad \hat{F}(x, s) &= \frac{2}{\pi} \left[\hat{h}(0, s) + x \int_0^{\pi/2} \hat{h}'(x \sin \theta, s) d\theta \right], \\ h(x, s) &= \int_0^l \hat{\phi}(\xi, s) d\xi - \frac{2 \frac{k}{\gamma} \bar{B}(\bar{N} + \bar{M}) + \frac{\bar{A}\bar{N}}{2\bar{N} + \bar{M}}}{\frac{k}{\gamma} \bar{B}(\bar{N} + \bar{M})} \hat{f}(x, s). \end{aligned}$$

Dyskusja otrzymanego równania (5.13) przebiega podobnie jak w przypadku równania (5.9).

6. WYZNACZENIE CIŚNIENIA CIECZY I OSIADANIA BRZEGU PÓLPRZESTRZENI
KONSOLIDUJĄCEJ

Rozważany w poprzednich punktach pracy przypadek częściowo przepuszczalnego, a częściowo nieprzepuszczalnego brzegu półpłaszczyzny, pociąga za sobą pytanie odnośnie do rozkładu ciśnienia porowatego na nieprzepuszczalnej części brzegu. Odpowiedź na to jest istotna z praktycznego punktu widzenia (może stanowić podstawę dla doboru odpowiednich materiałów izolacyjnych itp.). Otrzymane rezultaty pozwalają określić ciśnienie cieczy dla $z=0$. I tak mamy dla przypadku, gdy nieprzepuszczalna jest część brzegu $x \in (-l, l)$

$$\bar{p}(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) J_0(\xi \omega) d\xi \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{\xi \varphi(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} d\xi, \quad x < l.$$

Stąd

$$(6.1) \quad p(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{2}{\pi} \int_x^l \frac{\xi \varphi(\xi, s)}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} d\xi e^{st} ds, \quad x < l.$$

Mamy oczywiście z warunku brzegowego:

$$p(x, t) = 0 \quad \text{dla} \quad |x| > l.$$

Przystępujemy z kolei do wyznaczenia osiadań. Ze wzoru (4.1)₂ mamy dla $z=0$

$$(6.2) \quad \bar{w}(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[C_4 - C_2 \frac{\bar{A}m}{s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})} \right] \cos \omega x d\omega + \bar{w}^*(s).$$

W powyższym wzorze wyrażamy C_2 i C_4 za pomocą C_1 (wzory 4.8), a następnie wykorzystujemy podstawienia (4.9)₁ i (5.1)₁. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, s) = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{A}[(2\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{2\bar{N} + \bar{M}} \right) (\omega - m)]}{2\bar{A}\bar{N}\omega(\omega - m) + s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right)} \times \\ & \times \int_0^l \xi \varphi(\xi, s) J_0(\xi \omega) d\xi \cos \omega x d\omega - \\ & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(2\bar{N} + \bar{M})^2 \bar{B}^2 \frac{k}{\gamma} s \frac{\bar{q}}{2\bar{N}\omega} \cos \omega x d\omega}{2\bar{A}\bar{N}\omega(\omega - m) + s\bar{B}(2\bar{N} + \bar{M})(\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right)} + \bar{w}^*(s). \end{aligned}$$

Zakładając zerowe przemieszczenia półprzestrzeni w punktach $(-x_0, 0)$ oraz $(x_0, 0)$ dostajemy oczywiście następującą transformatę Laplace'a

$$(6.3) \quad \bar{w}(x, s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\frac{k}{\gamma} \bar{A} (2\bar{N} + \bar{M}) (\omega - m) \bar{B}}{2\bar{A}\bar{N}\omega (\omega - m) + s\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M}) (\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right)} \times \\ \times \int_0^l \bar{\xi} \varphi(\bar{\xi}, s) J_0(\bar{\xi}\omega) d\bar{\xi} (\cos \omega x - \cos \omega x_0) d\omega - \\ - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\bar{B}^2 (2\bar{N} + \bar{M})^2 \frac{k}{\gamma} s \bar{q} (\cos \omega x - \cos \omega x_0)}{2\bar{A}\bar{N}\omega (\omega - m) + s\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M}) (\bar{N} + \bar{M}) \left(\frac{3n}{\alpha_w} + \frac{\bar{A}}{\bar{N} + \bar{M}} \right)} \frac{d\omega}{2\bar{N}\omega}$$

dla osiadania.

W analogiczny sposób można otrzymać rozkład ciśnienia porowego i osiadanie brzegu dla drugiego rozwiązanego przypadku, tzn. gdy jest obszar nieprzepuszczalny brzegu na $|x| > l$.

Łatwo dostrzec, że otrzymane rozwiązanie (6.1), (6.3) zawiera jako szczególne przypadki: a) przypadek całego brzegu przepuszczalnego, b) przypadek całego brzegu nieprzepuszczalnego rozważane w pracach [9 i 10]. Mamy bowiem

$$l=0 \quad \text{dla przypadku a,} \\ l=\infty \quad \text{dla przypadku b.}$$

Gdy zachodzi przypadek a), to równanie (5.9) sprowadza się do równania

$$x\varphi(x, s) = F(x, s)$$

a równanie (5.1)₁ do równania

$$(6.4) \quad \Phi(\omega, s) = 0.$$

Skąd wobec (4.9)₁ dostajemy

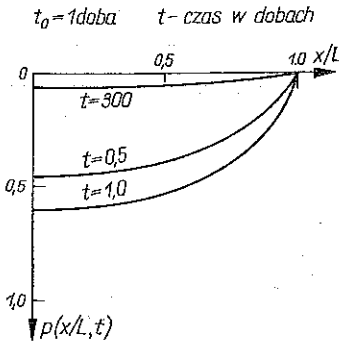
$$(6.5) \quad C_1 = \frac{\bar{q}(\omega, s)}{\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\bar{N}\bar{A}\omega (m - \omega)}{s\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M})}}.$$

Związek ten razem z równaniem (4.8) pozwala wyznaczyć współczynniki występujące w rozwiązaniu (4.1). Łatwo sprawdzić, że rezultat ten jest identyczny z otrzymanym w pracach [9 i 10].

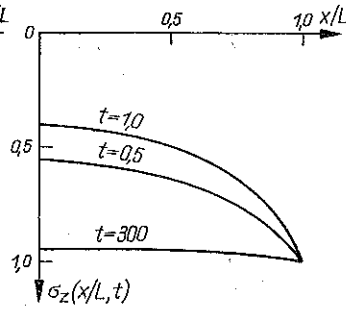
Jeżeli zachodzi przypadek b, to z równań (4.10)₁ i (4.9) otrzymamy

$$(6.6) \quad C_1 = \frac{\bar{q}(\omega, s)}{\frac{3n}{\alpha_w} (\bar{N} + \bar{M}) + \bar{A} - \frac{2\bar{N}\bar{A}\omega^2 (m - \omega)}{ms\bar{B} (2\bar{N} + \bar{M})}},$$

co razem z równaniami (4.8) daje możliwość określenia współczynników C_i w przypadku całego brzegu nieprzepuszczalnego (co rozważano w pracy [9]).



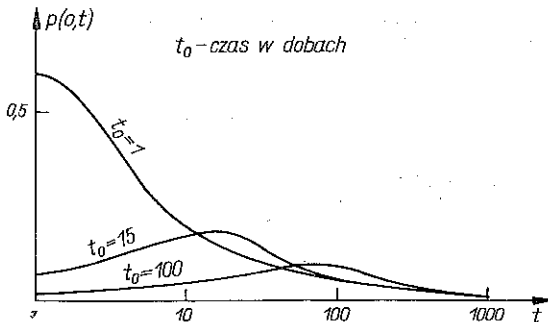
Rys. 2



Rys. 3

Odwroćenie transformacji Laplace'a w otrzymanych równaniach nie przedstawia merytorycznych trudności. Problem ten został szczegółowo przedyskutowany w pracy [8] (tutaj go pomijamy).

Otrzymane rezultaty zilustrowano przykładem liczbowym. Opierając się na wzorze (6.1), sporządzono wykres ciśnienia porowego w obszarze kontaktu z obciążeniem $z=0$, $|x| < l$, gdzie brzeg jest nieprzepuszczalny (rys. 2).



Rys. 4

W obszarze tym wyznaczono także rozkład naprężeń σ_z w szkielecie (rys. 3). Obydwa te rezultaty otrzymano przyjmując funkcję obciążenia w postaci

$$q(x, t) = q_0 T(t), \quad q_0 = 1 \text{ kg/cm}^2$$

$$T(t) = \begin{cases} t t_0^{-1}, & \text{jeżeli } t < t_0; \\ 1, & \text{jeżeli } t > t_0. \end{cases}$$

Ponadto na rys. 4 przedstawiono rozkład ciśnienia porowego w obszarze kontaktu dla różnych prędkości przykładania obciążenia.

Wszystkie wyniki otrzymano przy założeniu, że szkielet ośrodka jest sprężysty, a cały ośrodek charakteryzują następujące parametry:

$$\mu = 125 \text{ kG/cm}^2, \quad \alpha_v = 500 \text{ kG/cm}^2, \quad \alpha_p = 25 \text{ kG/cm}^2,$$

$$k = 2 \text{ cm/dobę}, \quad n = 0, 4, \quad \alpha_w = 6 \cdot 10^1 \text{ kG/cm}^2, \quad l = 50 \text{ cm}.$$

Z otrzymanych rezultatów widać wpływ prędkości obciążenia na maksymalne wartości ciśnień w obszarze kontaktu: im większa prędkość przykładania obciążenia, tym większe ciśnienia powstają w cieczy. W końcowej fazie procesu konsolidacji ($t \rightarrow \infty$) rozwiązanie zmierza asymptotycznie do rozwiązania dla ośrodka jednofazowego. Ponadto ze wzoru (6.1) wynika ważny wniosek o ciągłości funkcji ciśnienia cieczy na brzegu półprzestrzeni, mimo nałożonych na nią mieszanych warunków brzegowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. A. BIOT, *General theory of three-dimensional consolidation*, J. Appl. Phys., 12, 1941.
2. J. B. BOOKER, *A numerical method for the solution of Biot's consolidation theory*, Q. J. Mech. and Appl. Math., 26, 4, 1973.
3. W. DERSKI, *Wstęp do matematycznej teorii konsolidacji*, Zesz. Nauk. Politechn. Łódzkiej, 11, 1964.
4. W. DERSKI, *Zastosowanie dualnych równań całkowych w teorii konsolidacji*, III Symp. Poświęcony Reologii, Wrocław 1966.
5. J. DOMSKI, G. SZEFER, *Konsolidacja półpłaszczyzny sprężystej obciążonej stemplem*, Arch. Hydrot., 1974.
6. J. GASZYŃSKI, *On a certain solution of dual integral equations and its application to contact problem of theory of consolidation*, Arch. Mech., 28, 1, 1976.
7. J. GASZYŃSKI, G. SZEFER, *Axi-symmetric punch problem under condition of consolidation*, Arch. Mech., 27, 3, 1975.
8. J. GASZYŃSKI, G. SZEFER, *Konsolidacja półprzestrzeni lepkosprężystej obciążonej siłą skupioną*, Rozpr. Inż., 23, 3, 1975.
9. B. LECHOWICZ, G. SZEFER, *Consolidation of visco-elastic semispace in the plane state of strain. I Theoretical fundation*, Bull. Acad. Polon. Sci., 21, 12, 1973.
10. B. LECHOWICZ, G. SZEFER, *Consolidation of visco-elastic semispace in the plane state of strain. II Applications*, Bull. Acad. Polon. Sci., 21, 12, 1973.
11. JU. K. ZARETSKY, *Theory of soil consolidation* [in Russian], Moscow 1967.

Резюме

КОНСОЛИДАЦИЯ ВЯЗКО-УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА СО СМЕШАННЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГРАНИЦ. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

В работе рассмотрена консолидация вязко-упругого полупространства со смешанными условиями проницаемости границ. Приведены эффективные формулы для определения оседания границы полупространства, а также распределение пористого давления на непроницаемой части границы. Полученные результаты иллюстрированы числовым примером.

SUMMARY

CONSOLIDATION OF A VISCO-ELASTIC HALF-SPACE WITH MIXED PERMEABILITY CONDITIONS AT THE BOUNDARY. A PLANE PROBLEM

The problem of consolidation of a viscous-elastic half-space with mixed permeability conditions at the boundary are considered. Effective formulas are given for the determination of a subsidence of the boundary of the half-space and distribution of a pore pressure on the non-permeable part of the boundary. An illustrative numerical example is presented.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 lutego 1976 r.
