

## PEWIEN PRZYPADEK Z TEORII KONCENTRACJI NAPRĘŻEŃ W PRZEKROJU Z PŁASKĄ SZCZELINĄ

KAZIMIERZ G D A Ń S K I (KRAKÓW)

Analizuje się stan sprężysto-plastyczny w przekroju z symetryczną szczeliną w płaskiej próbce rozciąganej osiowo. Teorią karbów głębokich i karbów płytkich, opracowaną przez A. N. Grubina, przy użyciu przejścia granicznego, dochodzi się do związku między współczynnikiem koncentracji naprężeń a strefą plastyczną u wierzchołka szczeliny. Następnie na podstawie wyprowadzonego związku dla strefy plastycznej oraz parametru rozwarcia COD (crack opening displacement) metody Dugdale'a-Barenblatta-Wellsa, formułuje się związek na maksymalne odkształcenie na dnie szczeliny. Jako kryterium zapoczątkowania pęknięcia przyjęto osiągnięcie odkształceń granicznych.

Wyprowadzone związki opracowano numerycznie i aproksymowano metodą H. Neubera. Podano próbę weryfikacji doświadczalnej na podstawie wyników badań D. Broecka i Fl. J. Bradshawe'a.

### 1. WSTĘP

#### 1.1.

Zagadnienia spiętrzenia naprężeń na froncie pęknięcia lub technologicznej szczeliny wymagają specjalnego potraktowania. Wiadomo bowiem, iż na dnie takich karbów nie mogą powstawać naprężenia nieskończenie duże: wokół szczeliny wytwarza się sfera plastyczna, jeśli tylko materiał przejawia własności plastyczne. Na ten temat w ostatnich kilkunastu latach pojawiło się sporo opracowań opartych na koncepcji szczeliny Griffitha.

Pierwsze prace opierające się na tym rozwiązaniu pochodzą od G. R. IRWINA [10 i 11], ale nawiązują jeszcze w całości do teorii sprężystości. Dopiero następne prace tegoż autora (np. [12, 13 i 14]) usuwają osobliwości naprężeń na dnie szczeliny rozszerzając ją na strefę plastyczną. Ta plastyczna strefa była przedmiotem teoretycznych rozważań [5], gdzie uzyskano obraz tej strefy w grubej płycie w postaci sugestywnego modelu «psiej kości» (rys. 1). Na rys. 10 pokazano rzeczywisty obraz strefy plastycznej na podstawie eksperymentów.

Ostatnio największe zainteresowanie skierowano na koncepcję D. S. DUGDALE'A, G. J. BARENBLATTA, A. A. WELLSA ([1, 6, 7, 16, 21 i 24]). Model tych autorów (rys. 2) odznacza się dużą prostotą, dzięki wprowadzeniu pomysłowemu parametru  $\delta$  rozwarcia u wierzchołka szczeliny. Krytyczna wartość rozwarcia  $\delta_{kryt}$  zapoczątkowuje rozwój pęknięcia (crack opening displacement, stąd nazwa parametr COD [4 i 21]).

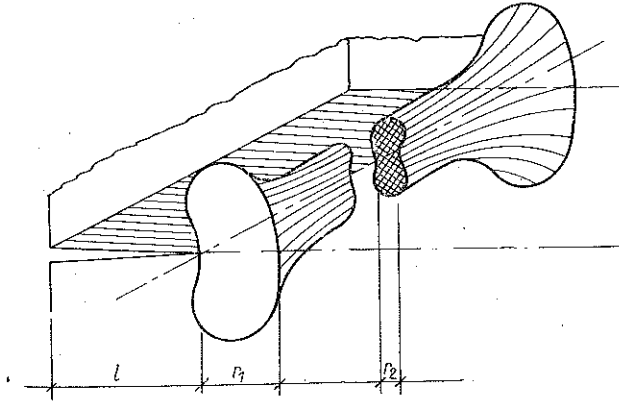
Zgodnie z tym modelem «promień» strefy plastycznej  $r$  można wyznaczyć ze wzoru

$$(1.1) \quad r = \frac{EG}{2\pi\sigma_{pl}^2}$$

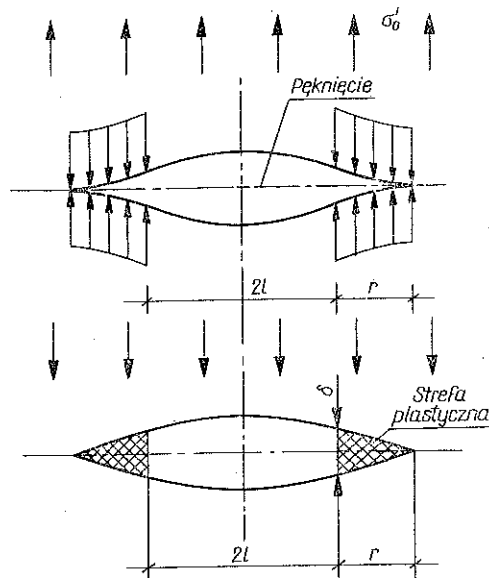
a szerokość rozwarcia wynosi

$$(1.2) \quad \sigma = \frac{G}{\sigma_{pl}}, \quad \delta_{kryt} = \frac{G_{kryt}}{\sigma_{pl}},$$

gdzie  $\sigma_{pl}$  oznacza granicę plastyczności,  $E$  moduł sprężystości,  $G$  siłę potrzebną do rozwarcia  $\delta$  u końca szczeliny (wydzielona energia niszczenia).



Rys. 1. Kształt strefy plastycznej na czole pęknięcia w grubościenniej płycie wg [5] (odrys. z [16])



Rys. 2. Model pęknięcia w płycie nieskończenie szerokiej

Siła  $G$  jest zmienna: krytycznej wartości  $\delta_{kryt}$  odpowiada krytyczna wartość  $G_{kryt}$ , ściśle związana z siłami powierzchniowymi w mikroszczelinie.

Model Dugdale'a-Barenblatt-Wellsa (oznaczając będziemy przez DBW) był i jest nadal weryfikowany doświadczalnie w różnych warunkach na grubych i cienkich płytkach oraz cylindrach, wykonywanych z różnych stopów. Wyniki badań

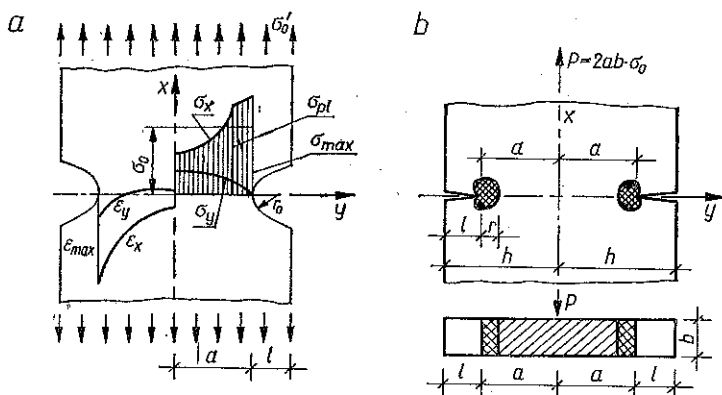
można znaleźć np. w pracach [9, 19, 22 i 23] oraz w obszernym zbiorze prac [21]. Należy podkreślić, iż model DBW znajduje potwierdzenie także w przypadku propagacji pęknięć zmęczeniowych (badania w zespole T. Yokoboriego; cyt. za [16]).

Należy wspomnieć jeszcze o innym kierunku badań nad rozwojem pęknięć, opartym na parametrze zwanym całką Riccà [3 i 20], ale ta koncepcja nie uzyskała jeszcze wystarczającego potwierdzenia doświadczalnego [2 i 17]. Analizę pęknięć prowadzi się także teoriami dyslokacyjnymi [16], a jeden z ciekawszych modeli zaproponowali tu B. A. Bilby, A. H. Cottrell i K. H. Swinden, zupełnie podobny do modelu DBW.

## 1.2.

Nowe metody badawcze mają wspólne podłoże w koncepcji Griffitha, operując krytycznym rozwarciem  $\delta_{kryt}$  lub innymi parametrami; między tymi parametrami bowiem istnieją powiązania teoretyczne [17, 16 i 21].

Wartości parametru  $\delta$  są wyznaczane na drodze doświadczalnej i ten fragment nowych metod stanowi niewątpliwie sprawę bardzo delikatną; wyniki badań zależą bowiem od różnych czynników. Trzeba jednak powiedzieć, iż ostatnio [21] wypracowano bardzo precyzyjne metody pomiaru  $\delta$ . Do wzoru (1.2) można odnieść się z zaufaniem. Natomiast większe zastrzeżenia można mieć do uniwersalności wzoru (1.1), wyprowadzonego dla płyty nieskończenie szerokiej, i ta sprawa jest przedmiotem ciągłych rozważań. Prace rozwijające [16 i 21] doprowadzają do odpowiednich wzorów lub współczynników poprawkowych, uwzględniających kształt przekroju itd.



Rys. 3

Autor niniejszej pracy uważa, że analizę koncentracji naprężeń w przekroju ze szczeliną można przeprowadzić poprawnie przez zastosowanie przejścia granicznego w rozwiązaniach uzyskanych dla korbów łagodnych w zakresie sprężysto-plastycznym. W rozwiązaniach tych, otrzymanych z równań teorii sprężystości i plastyczności, parametrem charakteryzującym korb jest  $a/r_0$  lub  $l/r_0$  (rys. 3a). Dla korbów ostrych, w szczególności dla szczeliny, proponuje się więc dokonać operacji  $a/r_0 \rightarrow \infty$ , co prowadzi do związku między współczynnikiem koncentracji naprężeń  $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{pl}/\sigma_0$  a wielkością strefy plastycznej  $r/a$  (przez  $\sigma_0 = P/2ab$  rozumie się tu średnie naprężenie

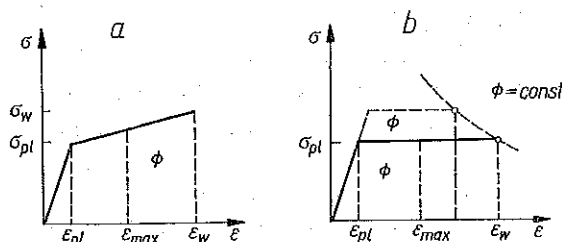
w przekroju ze szczeliną, a przez  $\sigma'_0$  naprężenie przyłożone). Otrzymanie takiego związku pozwala na zrezygnowanie ze wzoru (1.1) lub jego odmian.

Następnie autor (podobnie jak i Neuber w niektórych rozważaniach nad karami ostrymi) wprowadza pojęcie *mikrokarbu* u kącika szczeliny o promieniu  $r_0$ , którego wartość jest bardzo mała, w pewnym sensie umowa. Na dnie takiego mikrokarbu występują największe jednostkowe odkształcenia  $\varepsilon_{\max}$ . Wydaje się naturalnym przyjęcie tu następującego kryterium zapoczątkowania pęknięcia w szczelinie:

$$(1.3) \quad \varepsilon_{\max} = \varepsilon_w,$$

gdzie  $\varepsilon_w$  jest granicznym jednostkowym odkształceniem na wykresie  $\sigma(\varepsilon)$  na rozciąganie polikryształu.

Dla statystycznego polikryształu metalu przyjmuje się uproszczony wykres wg Prandtla, obcięty graniczną wartością  $\varepsilon_w$  (rys. 4b). Autor czyni także pewne próby uogólnienia rozwiązania na materiały ze wzmocnieniem liniowym (rys. 4a).



Rys. 4

Przyjmuje się tu również następującą hipotezę: *promień  $r_0$  mikrokarbu jest proporcjonalny do jednostkowego wydłużenia  $\varepsilon_{\max}$  na dnie karbu:*

$$(1.4) \quad r_0 = A\varepsilon_{\max}.$$

Do przyjęcia takiej hipotezy nakłoniły autora następujące okoliczności. Rozwarcie  $\delta$  u kącika szczeliny w pewnym sensie można uważać za miarę mikrokarbu, a więc można by związać funkcyjnie z  $r_0$ . Stwierdzono zaś doświadczalnie (por. np. pracę J. BIRKBÖKA i A. E. WRAITHA w [21]) występowanie silnego podobieństwa wykresów  $\delta(\sigma'_0)$  i  $\sigma(\varepsilon)$ . Współczynnik  $A$  proponuje się wyznaczyć z warunku: dla  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_w$ ,  $r_0 \approx \delta_{\text{kryt}}/2$ . Innego sposobu na razie nie widzimy.

Uwzględniając wzór (1.2) mamy więc

$$(1.5) \quad r_0 \approx \frac{\delta_{\text{kryt}}}{2} \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_w} = \frac{1}{2} \frac{G_{\text{kryt}}}{\sigma_{\text{pl}}} \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_w}.$$

Autor wykorzystuje jeszcze pojęcie właściwej pracy odkształcenia  $\Phi$  (jednostkowa praca zerwania).

Z wykresu na rys. 4b znajdziemy

$$(1.6) \quad \frac{\varepsilon_w}{\varepsilon_{\text{pl}}} = \frac{E\Phi}{\sigma_{\text{pl}}^2} + \frac{1}{2} \approx \frac{E\Phi}{\sigma_{\text{pl}}^2} \Rightarrow \varepsilon_w \approx \frac{\Phi}{\sigma_{\text{pl}}}.$$

Liczba 1/2 mogła być pominięta, gdyż z reguły  $\varepsilon_w \gg \varepsilon_{\text{pl}}$ .

Uwzględniając (1.6), wzorowi (1.5) nadamy postać

$$(1.7) \quad r_0 = \frac{1}{2} \varepsilon_{\max} \frac{G_{\text{kryt}}}{\Phi}.$$

Jak wykazały liczne badania [15], praca  $\Phi$  jest niezależna od rodzaju obróbki cieplnej stopu jak i rozrzutów jego składu chemicznego, jest więc praktycznie niezależna od wytrzymałości stopu. Stanowi zatem wygodną stałą materiałową.

Wyprowadzony wzór (1.7) może być wykorzystany w równaniu na wielkość  $r/a$ , otrzymaną na podstawie teorii sprężystości i plastyczności, a stąd otrzymuje się określenie na  $\varepsilon_{\max}$ . Graniczną wartość  $r_{\text{ult}}/a$  tej strefy, przy której następuje zapoczątkowanie rozwoju szczeliny, określa kryterium (1.3). Dla znanej wartości  $r_{\text{ult}}/a$  można w końcu wyznaczyć krytyczną wartość współczynnika koncentracji naprężeń  $\alpha_{\text{kryt}}$ , a stąd krytyczną wartość średniego naprężenia  $\sigma_{0\text{ult}}$ . Współczynnik bezpieczeństwa przeciw zapoczątkowaniu rozwoju szczeliny określa wzór

$$(1.8) \quad n = \frac{\sigma_{0\text{ult}}}{\sigma_0}.$$

### 1.3.

Pewne fragmenty zmodyfikowanej teorii Griffitha (współczynnik COD) mogą więc znaleźć zastosowanie w ogólnych rozważaniach stanów sprężysto-plastycznych do określenia warunków lokalnego rozprzestrzeniania się kruchych pęknięć w miejscach niebezpiecznych. Jest tu charakterystyczne, iż zachodzi potrzeba wprowadzenia dodatkowej stałej materiałowej  $G_{\text{kryt}}$  (bądź  $\delta_{\text{kryt}}$ ), warunki bowiem na wewnętrznych powierzchniach mikroszczelin są inne od tych, które panują na powierzchniach swobodnych (energia sił powierzchniowych).

W niniejszej pracy autor postanowił rozwinąć szczegółowo przedstawioną myśl na przykładzie osiowo rozciąganej płaskiej płytki z dwiema symetrycznymi szczelinami (rys. 3b).

Wывody oparto na założeniach i rozwiązaniach podanych przez A. H. GRUBINA w pracy [8]. W pkt. 2 podano rozwiązanie wg teorii tzw. karbów głębokich, a w pkt. 3 wg teorii karbów płytkich. Następnie w pkt. 4 dokonano aproksymacji rozwiązań opierając się na metodzie NEUBERA [18]. W pkt. 5 zamieszczono pewne uzupełnienia.

## 2. ROZWIĄZANIE ZADANIA WG TEORII KARBÓW GŁĘBOKICH

### 2.1.

Wielkości wyjściowe (rys. 3) są następujące:  
parametr karbu

$$(2.1) \quad \text{tg } \vartheta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{1/2},$$

współrzędne

$$\kappa \stackrel{\text{def}}{=} y/a, \quad \sin \vartheta = \kappa \sin \vartheta_0.$$

Warunki na dnie karbu (rys. 4 i 5):

$$(2.2) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{\max}, \quad \sigma_x = f(g_{\max}) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\max}, \quad g_{\max} = 1,5\varepsilon_{\max}, \quad \sigma_y = 0, \quad \cos \vartheta = \cos \vartheta_0.$$

Warunki na styku strefy sprężystej i plastycznej:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{pl}, \quad \kappa = 1 - \frac{r}{a} \stackrel{\text{def}}{=} \kappa_{pl}, \\ \cos \vartheta_{pl} &\stackrel{\text{def}}{=} \cos \vartheta = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{a} \right)^2 \sin^2 \vartheta_0 \right]^{1/2}, \\ \vartheta_{pl} &= \arcsin \left[ \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \sin \vartheta_0 \right]. \end{aligned}$$

Równania małych odkształceń i naprężeń dla materiałów ze wzmocnieniem (rys. 4a) podajemy za pracą [8]:

dla całego przekroju

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{\max}}{4} \left[ \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta} + \left( \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta} \right)^3 \right],$$

dla całego przekroju

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= \frac{\sigma_{\max}}{2} \left[ \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta} - \left( \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta} \right)^3 \right], \\ \sigma_x &= \begin{cases} (0,5\sigma_y + E\varepsilon_x) & \text{dla strefy sprężystej,} \\ f(g) & \text{dla strefy plastycznej.} \end{cases} \end{aligned}$$

## 2.2. Wyprowadzenia.

Na styku obu stref z warunku  $\sigma_x = \sigma_{pl}$  otrzymuje się

$$(2.5) \quad \left( 3 \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} - \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \left( \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_{pl}} \right)^3 + \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_{pl}} = 4.$$

Z warunku równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych

$$(2.6) \quad \int_0^{\kappa_{pl}} (0,5\sigma_y + E\varepsilon_x) dk + \int_{\kappa_{pl}}^1 f(g) dk = \sigma_0$$

otrzymuje się

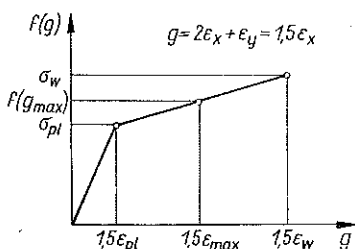
$$(2.7) \quad \begin{aligned} \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} &= \frac{1}{4} \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_{pl}} \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \left( \frac{\cos \vartheta_{pl}}{\sin \vartheta_{pl}} \vartheta_{pl} - \cos^2 \vartheta_{pl} \right) + \\ &+ \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \cos^2 \vartheta_{pl} + \frac{1}{2} \frac{r}{a} \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right), \end{aligned}$$

gdzie dla uproszczenia strefę plastyczną aproksymowano trapezowym wykresem naprężeń (rys. 3a).

Zauważmy, że parametr karbu  $(a/r_0)^{1/2}$  jest liczbą bardzo dużą z wyjątkiem przypadku, gdy  $a \rightarrow 0$ ; ale ta możliwość jest mało istotna. Dla  $a \gg r_0$ ,  $\cos \vartheta_0 \ll 1$  we wzorach (2.3) i (2.7), można przyjąć  $\sin \vartheta_0 \approx 1$ .

Także spełniony jest warunek  $\cos \vartheta_0 / \cos \vartheta_{pl} \ll 1$  z wyjątkiem przypadków, gdy strefa plastyczna jest bardzo mała, co analizujemy oddzielnie w pkt. 2.4. W ogólności zatem w równości (2.5) można opuścić składnik z wyrazem w trzeciej potęgde. Zatem zamiast (2.5) mamy

$$(2.8) \quad \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_{pl}} \approx 4.$$



Rys. 5

Prócz wyżej podanych uproszczeń możemy we wzorze (2.7) uwzględnić równość przybliżoną (2.8). Otrzymuje się w rezultacie

$$(2.9) \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} = \left[ 1 - \left( 1 - \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \arcsin \left( 1 - \frac{r}{a} \right) + \frac{r}{2a} \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right).$$

Dalsze rozważania ograniczamy do materiałów bez wzmocnienia (rys. 4b). Wtedy  $\sigma_{\max} = \sigma_{pl}$  i zamiast (2.8) i (2.9) mamy

$$(2.10) \quad \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + 1 \right) \frac{\cos \vartheta_0}{\cos \vartheta_{pl}} = 4,$$

$$(2.11) \quad \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} \right]_g = \left[ 2 \frac{r}{a} - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \arcsin \left( 1 - \frac{r}{a} \right) + \frac{r}{a},$$

gdzie indeks  $g$  oznacza, iż rozwiązanie uzyskano teorią karbu głębokiego.

### 2.3.

Równanie (2.11) stanowi poszukiwany związek między współczynnikiem koncentracji naprężeń  $\alpha_g \stackrel{\text{def}}{=} [\sigma_{pl}/\sigma_0]_g$  a wielkością strefy plastycznej  $r/a$ . Na rys. 6 linią grubszą przedstawiono wykres tej funkcji.

Graniczne odkształcenie  $\varepsilon_{\max}$  można wyliczyć z równania (2.10). Wartość  $\cos \vartheta_0$  otrzymujemy z (2.1): jest ona równa w przybliżeniu  $1/\text{tg } \vartheta_0$ , a  $\cos \vartheta_{pl}$  z (2.3) — równe w przybliżeniu  $2r/a - (r/a)^2$ . Po szeregu przekształceń, uwzględniając (1.7), (1.6) i opuszczając jedynekę w stosunku do  $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{pl}$ , otrzymujemy

$$(2.12) \quad \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_w} \right)^3 = \left( \frac{\sigma_{pl}}{\sigma^*} \right)^5 S_g,$$

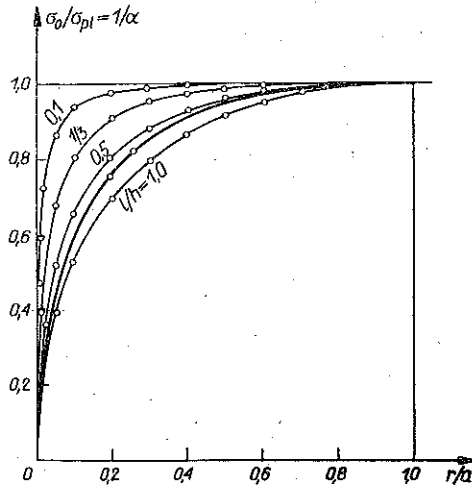
gdzie

$$(2.13) \quad \sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{E^2 \Phi^2 G_{\text{kryt}}}{32h} \right)^{1/5}, \quad S_g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a}{h} \left[ 2 \frac{r}{a} - \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right].$$

Wielkość  $\sigma^*$  ma wymiar naprężenia i jest pochodną stałych materiałowych. Wielkość  $G_{\text{kryt}}/h$  ma także wymiar naprężenia.

Przyjmując w równaniu (2.12)  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon_w$ , otrzymuje się równanie na krytyczną wielkość strefy plastycznej  $r_{ult}/a$ :

$$(2.14) \quad S_g \left( \frac{r_{ult}}{a} \right) = \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_{pl}} \right)^5 \Rightarrow \left[ \frac{r_{ult}}{a} \right]_g$$



Rys. 6. Współczynnik koncentracji  $\alpha$

linia grubsza wg teorii karbów głębokich, linie cieńsze wg teorii karbów płytkich

Indeks  $g$  oznacza, iż funkcja  $S_g$  została wyprowadzona teorią karbów głębokich.

#### 2.4. Uzupełnienie analizy dla $r \rightarrow 0$

Należy wtedy skorzystać z «dokładnego» równania (2.5). Przy  $r \rightarrow 0$ ,  $\cos \vartheta_{pl} \rightarrow \cos \vartheta_0$ ,  $\sigma_{\max} \rightarrow \sigma_{pl}$ , zatem  $\varepsilon_{\max} \rightarrow \varepsilon_{pl}$ . Wykorzystując te granice w (2.7), otrzymuje się  $\sigma_0/\sigma_{pl} \rightarrow \pi/4 \times \text{ctg } \vartheta_0 + 1/2 \cos^2 \vartheta_0$ . Jest to liczba bliska zeru, co wskazuje na to, że można stosować przybliżony wzór (2.9) także i dla bardzo małych wartości  $r/a$ .

### 3. ROZWIĄZANIE ZADANIA WG TEORII KARBÓW PŁYTKICH

#### 3.1.

Wielkości wyjściowe (rys. 3) są w tym przypadku następujące  
parametr karbu

$$(3.1) \quad m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{l} - \sqrt{r_0}}{\sqrt{l} + \sqrt{r_0}} \approx 1, \quad 1 - m \approx 2 \sqrt{\frac{r_0}{l}} \quad \text{dla } l \gg r_0;$$

współrzędna  $\rho$  z definicji

$$(3.2) \quad \rho = \frac{1}{2} \left\{ (1+m) \left[ 1 + \frac{a}{l} (1-\kappa) \right] + \sqrt{(1+m) \left[ 1 + \frac{a}{l} (1-\kappa) \right]^2 - 4m} \right\}.$$



Po wstawieniu do tego wzoru  $m=1$  znajdziemy

$$(3.3) \quad \rho \approx 1 + \frac{a}{l}(1-\kappa) + \sqrt{\left[1 + \frac{a}{l}(1-\kappa)\right]^2 - 1}.$$

Warunki na dnie karbu

$$(3.4) \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{\max}, \quad \sigma_x = f(g_{\max}) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{\max}, \quad g_{\max} = 1,5 \varepsilon_{\max}, \\ \sigma_y = 0, \quad \rho = 1;$$

warunki na styku strefy sprężystej z plastyczną

$$(3.5) \quad \sigma_x = \sigma_{pl}, \quad \kappa_{pl} = 1 - \frac{r}{a}, \quad \rho = 1 + \frac{r}{l} \sqrt{2 \frac{r}{l} + \left(\frac{r}{l}\right)^2} \stackrel{\text{def}}{=} \rho_{pl}.$$

Równania dla małych odkształceń i naprężeń

$$(3.6) \quad \varepsilon_x = \frac{1-m}{3+m} \varepsilon_{\max} \left\{ 1 + (m+1) \frac{(3m-1)\rho^4 + (3m^2-16m+9)\rho^2 + m(5m-3)}{4(\rho^2-m)^3} \right\}, \\ \sigma_y = \frac{(1-m)(1+m)\sigma_{\max}}{2(3+m)(\rho^2-m)^3} \{ (3-m)\rho^4 - (m^2+3)\rho^2 + m(m+1) \}, \\ \sigma_x = \begin{cases} 0,5\sigma_y + E\varepsilon_x & \text{dla strefy sprężystej,} \\ f(g) & \text{dla strefy plastycznej,} \end{cases}$$

gdzie  $\varepsilon_x$ ,  $\sigma_y$ , zostały ustalone dla obu stref.

W równaniach (3.6) wstawiamy  $m=1$  z wyjątkiem miejsc, gdzie występuje  $1-m$ . Otrzymamy dla całego przekroju

$$(3.7) \quad \varepsilon_x \approx \frac{(1-m)\varepsilon_{\max}\rho^2}{4(\rho^2-1)}, \\ \sigma_y \approx \frac{(1-m)\sigma_{\max}}{2(\rho^2-1)}.$$

### 3.2.

Na styku obu stref z warunku  $\sigma_x = \sigma_{pl}$  otrzymuje się

$$(3.8) \quad (1-m) \left[ \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \frac{1}{\rho_{pl}^2 - 1} \right] = 4.$$

Z równania (2.6) zaś po rozwinięciu i przeprowadzeniu pewnych drobnych uproszczeń w dopuszczalnych granicach:

$$(3.9) \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} = \frac{1-m}{8} \left[ \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} - \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \left( 1 - \frac{r}{a} \right) - \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{pl}} + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \sqrt{2 \frac{l}{a} \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2} - \sqrt{1 + \frac{2l}{a}} \right) \right] + \frac{r}{2a} \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right).$$

Z reguły jest spełniona nierówność  $\varepsilon_{\max}/\varepsilon_{pl} \geq \sigma_{\max}/\sigma_{pl}$  z wyjątkiem tych przypadków, gdy  $r \rightarrow 0$ ; tę możliwość analizujemy oddzielnie w punkcie 3.4.

Można zatem uprościć (3.8) i (3.9), pomijając  $\sigma_{\max}/\sigma_{pl}$  i otrzymuje się

$$(3.10) \quad \frac{(1-m)\varepsilon_{\max}\rho_{pl}^2}{\varepsilon_{pl}(\rho_{pl}^2-1)} \approx 4,$$

a wstawiając to wyrażenie do (3.9) znajdujemy

$$(3.11) \quad \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} = \frac{\rho_{pl}^2-1}{2\rho_{pl}^2} \left[ 1 - \frac{r}{a} - \sqrt{\frac{2l}{a} \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2} + \sqrt{1 + \frac{2l}{a}} \right] + \frac{r}{2a} \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{pl}} \right).$$

Dalsze rozważania ograniczamy dla materiałów bez wzmocnienia. Wtedy  $\sigma_{\max} = \sigma_{pl}$  i z (3.11) wynika

$$(3.12) \quad \left[ \frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} \right]_p = \frac{\rho_{pl}^2-1}{2\rho_{pl}^2} \left[ 1 - \frac{r}{a} - \sqrt{\frac{2l}{a} \frac{r}{a} + \left(\frac{r}{a}\right)^2} + \sqrt{1 + \frac{2l}{a}} \right] + \frac{r}{a},$$

gdzie indeks  $\langle p \rangle$  oznacza, że rozwiązanie uzyskano teorią karbów płytkich. Na rys. 6 liniami cienkimi przedstawiono wykresy równania (3.12) dla różnych wartości wskaźnika zagłębienia szczeliny  $l/h$ .

### 3.3.

Równanie (3.12), podobnie jak równanie (2.11), wiąże współczynnik koncentracji naprężeń  $\alpha_p \stackrel{\text{def}}{=} [\sigma_{pl}/\sigma_0]_p$  ze wskaźnikiem strefy plastycznej  $r/a$ .

W podobny sposób, jak dla karbów głębokich (por. pkt. 2.3), ze związków (3.4), (3.1), (1.7), (1.6) otrzymuje się

$$(3.13) \quad \left( \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_w} \right)^3 = \left( \frac{\sigma_{pl}}{\sigma^*} \right)^5 S_p,$$

gdzie

$$(3.14) \quad \sigma^* \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{E^2 \Phi^2 G_{\text{kryt}}}{32h} \right)^{1/5}, \quad S_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{l}{h} \left( \frac{\rho_{pl}^2-1}{2\rho_{pl}^2} \right)^2.$$

Równanie na graniczną strefę plastyczną daje

$$(3.15) \quad S_p \left( \frac{r_{\text{ult}}}{a} \right) = \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_{pl}} \right)^5 \Rightarrow \left[ \frac{r_{\text{ult}}}{a} \right]_p.$$

### 3.4.

Uzupełnienie analizy dla przypadku  $l \rightarrow r_0$  (mikrokarb — mikroszczelina). Wtedy  $m=0$ , a z równania (3.2)  $\Rightarrow \rho = 1 + r/l$ . Równania (3.6) przybierają postaci następujące:

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_{\max}}{3} \left( 1 + \frac{9-\rho^2}{4\rho^4} \right), \quad \sigma_y = \frac{\sigma_{\max}(\rho^2-1)}{2\rho^4},$$

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{\max}(\rho^2-1)}{4\rho^4} + \frac{E\varepsilon_{\max}}{3} \left( 1 + \frac{9-\rho^2}{4\rho^4} \right).$$

Z warunku  $\sigma_x = \sigma_{pl}$  na styku obu stref otrzymuje się

$$\sigma_{pl} = \frac{\sigma_{\max}(\rho_{pl}^2-1)}{4\rho_{pl}^4} + \frac{E\varepsilon_{\max}}{3} \left( 1 + \frac{9-\rho_{pl}^2}{4\rho_{pl}^4} \right).$$

całkowanie zaś równania (2.6) daje

$$\frac{\sigma_0}{\sigma_{pl}} = \frac{\sigma_{max}}{4\sigma_{pl}} \left[ \frac{l}{a \left(1 + \frac{r}{a}\right)} - \frac{l}{3a \left(1 + \frac{r}{l}\right)^3} \right] + \frac{\varepsilon_{max}}{3\varepsilon_{pl}} \times$$

$$\times \left[ 1 - \frac{r}{a} + \frac{3l}{4a \left(1 + \frac{r}{l}\right)^3} - \frac{l}{4a \left(1 + \frac{r}{l}\right)} \right] + \frac{r}{2a} \left( 1 + \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{pl}} \right).$$

Przypadek  $r/l \rightarrow 0$ :

$$\rho_{pl} \rightarrow 1, \quad \varepsilon_{max} \rightarrow \varepsilon_{pl}, \quad \sigma_0 \rightarrow \frac{\sigma_{pl}}{3} \Rightarrow \alpha_p = 3.$$

Przypadek  $r/l \rightarrow 1$ :

$$\rho_{pl} \rightarrow 2, \quad \varepsilon_{max} \rightarrow \frac{61}{23} \varepsilon_{pl} = 2,6522 \varepsilon_{pl}, \quad \sigma_0 \rightarrow \frac{61}{69} \sigma_{pl} =$$

$$= 0,8841 \sigma_{pl} \Rightarrow \alpha_p = 1,1311 \quad (\text{bliskie jedności}).$$

Przypadek  $r \rightarrow a$ , tj.  $r/l \rightarrow \infty$ :

$$\rho_{pl} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon_{max} \rightarrow 3\varepsilon_{pl}, \quad \sigma_0 \rightarrow \sigma_{pl} \Rightarrow \alpha_p = 1.$$

W świetle tej analizy staje się uzasadnione ogólne przyjęcie  $\alpha_p = 1$  dla całego przedziału  $r/a$  przy  $l/h \rightarrow 0$  (wg uproszczonego równania (3.12)).

Także formalne przekształcenie równości

$$\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_w} = 3 \frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_w} = 3 \frac{\sigma_{pl}^2}{E\Phi} \quad (\text{dla przypadku } r \rightarrow a)$$

do postaci

$$\left( \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_w} \right)^3 = \left( \frac{\sigma_{pl}}{\sigma^*} \right)^5 \frac{27 \sigma_{pl} G_{kryt}}{32 E \Phi h},$$

uzasadnia przyjęcie  $S_p = 0$  w analizowanym zakresie.

#### 4. APROKSYMACJA ROZWIĄZAŃ METODĄ H. NEUBERA

##### 4.1.

Wzory (2.11) i (3.12) odnoszą się do dwóch różnych sformułowań i poprawność ich każdego z osobna ma miejsce jedynie w dwóch skrajnych przypadkach: gdy  $a \rightarrow 0$  lub  $l \rightarrow 0$ . Dla przypadków pośrednich H. NEUBER [18] podał metodę wyznaczania aproksymowanej wartości  $\alpha$  w następujący sposób (rys. 7):

$$(4.1) \quad \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_{pl}}{\sigma_0} = 1 + \frac{(\alpha_g - 1)(\alpha_p - 1)}{\sqrt{(\alpha_g - 1)^2 + (\alpha_p - 1)^2}}.$$

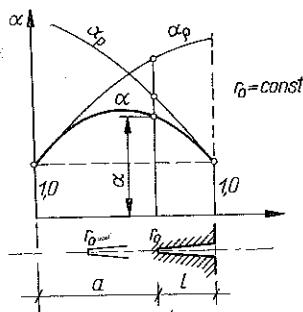
Jak widać, w skrajnych przypadkach  $\alpha = \alpha_g = 1$  i  $\alpha = \alpha_p = 1$ .

W tabelicy 1 podano wyniki numerycznych obliczeń.

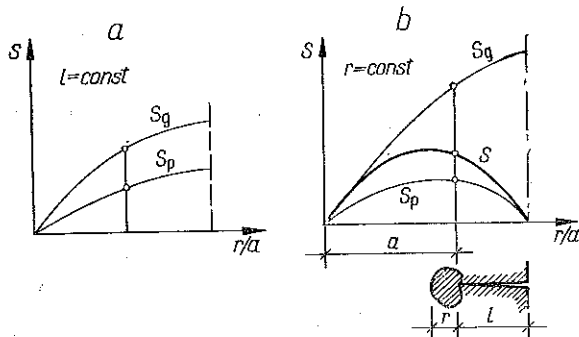
## 4.2.

Definicje (2.13) i (3.14) na  $S_g$  i  $S_p$  należy także zmodyfikować przez aproksymację. Analiza tych wyrażeń przy ustalonych  $l/h$  prowadzi do wykresów tego rodzaju jak na rys. 8a. Natomiast dla ustalonego  $r$  schematyczne przebiegi  $S_g$  i  $S_p$  pokazano na rys. 8b.

W tym przypadku będzie ogólnie poprawne przyjąć, iż przy ustalonej wielkości strefy plastycznej  $r$ , gdy  $a \rightarrow 0$ , należy wziąć pod uwagę rozwiązanie wg teorii karbów głębokich; gdy  $l \rightarrow 0$ , wg teorii karbów płytkich. Wartości dokładne funkcji  $S$  dla  $a$  i  $l \neq 0$  przyjmują wartości pośrednie.



Rys. 7



Rys. 8

Jest rzeczą oczywistą, iż aproksymowanie funkcji  $S_g$  i  $S_p$  (tj. skonstruowanie jednej funkcji  $S$ ) na podstawie wyłącznie takich przesłanek nie może być jednoznaczne. Dobieramy więc dowolną, możliwie prostą funkcję, która spełniałaby następujące warunki: 1) przybiera wartości pośrednie między  $S_g$  i  $S_p$ ; 2) dla  $l=0$ ,  $S=S_p$ , a dla  $a=0$ ,  $S=S_g$ ; 3) warunek styczności na końcach: dla  $l=0$ ,  $dS/dl=dS_p/dl$ , a dla  $a=0$ ,  $dS/dl=dS_g/dl$ .

Taką funkcją jest, np. funkcja

$$(4.2) \quad S = S_p + (S_g - S_p) \left( \frac{j}{h} \right)^2.$$

W tabelicy 1 podano wyniki numerycznych obliczeń wg formuły (4.2). Zdaniem autora nie ma potrzeby poszukiwania lepszych aproksymacji, gdyż wartości wg (4.2) niewiele odbiegają od wartości dokładnych.

Zamiast równań (2.12) i (3.13) oraz odpowiednio równań (2.14) i (3.8) mamy teraz równania

$$(4.3) \quad \left( \frac{\epsilon_{\max}}{\epsilon_w} \right)^3 = \left( \frac{\sigma_{pl}}{\sigma^*} \right)^5 S \left( \frac{r}{a} \right), \quad S \left( \frac{r_{ult}}{a} \right) = \left( \frac{\sigma^*}{\sigma_{pl}} \right)^5.$$

## 5. UZUPELNIENIA

*Uzupełnienie 1. Próba doświadczalnej weryfikacji wyprowadzonych sformułowań*

Korzystamy z wyników badań D. BROECKA i F. J. BRADSHOWE'A ze zbioru [21]. Wymienieni autorzy badali cienkie płaskie próbki z symetryczną szczeliną, wykonane z dwu różnych stopów DTD646 (Al-Cu) (wprowadzono oznaczenie: stop (a)) i DTD687 (Al-Zu-Mg) (oznaczenie: stop (b)).

Tablica 1. Aproxymowane wartości współczynnika koncentracji naprężeń  $\alpha = \sigma_{\theta l} / \sigma_0$  oraz funkcji  $S \cdot 10^3$  w zależności od wskaźnika strefy plastycznej  $r/a$

$l/h$ $r/a$	$\rightarrow 0$	0,01	0,10	0,20	0,33	0,50	0,75	$\rightarrow 1,0$
$\rightarrow 0$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0,001	1,6978	3,0085	3,9773	5,2824	6,4938	7,6342	9,0897	11,0313
	0	0,860	1,387	1,927	1,193	0,936	0,489	0
0,005	1,1693	1,6880	2,1053	2,6798	3,2165	3,7204	4,3326	5,1874
	0	1,819	4,203	5,522	5,229	4,325	2,378	0
0,01	1,0760	1,3954	1,6769	2,0771	2,4588	2,8221	3,2689	3,9011
	0	2,152	6,210	8,200	9,552	8,170	4,660	0
0,02	1,0293	1,2065	1,3857	1,6514	1,9078	2,1500	2,4404	2,8306
	0	2,557	8,395	12,261	15,698	15,112	9,053	0
0,05	1,0064	1,0709	1,1558	1,2983	1,4449	1,5862	1,7550	1,9721
	0	2,473	10,874	18,341	27,452	32,847	21,370	0
0,10	1,0017	1,0252	1,0645	1,1413	1,2279	1,3150	1,4193	1,5476
	0	2,508	12,144	22,617	38,626	51,623	56,182	40,007
0,20	1,0004	1,0068	1,0204	1,0526	1,0946	1,1402	1,1959	1,2599
	0	2,532	13,048	26,331	51,093	76,892	92,523	72,492
0,30	1,0001	1,0026	1,0086	1,0244	1,0473	1,0739	1,1069	1,1428
	0	2,549	13,540	28,401	58,932	94,724	120,747	100,097
0,40	1,0	1,0012	1,0040	1,0122	1,0250	1,0407	1,0603	1,0800
	0	2,562	13,904	29,915	64,717	108,477	143,566	123,600
0,50	1,0	1,0006	1,0019	1,0089	1,0132	1,0224	1,0332	1,0433
	0	2,574	14,193	31,086	69,216	119,375	162,140	143,393
0,60	1,0	1,0003	1,0009	1,0030	1,0067	1,0114	1,0170	1,0214
	0	2,583	14,423	32,005	72,733	127,981	177,073	159,708
0,70	1,0	1,0	1,0004	1,0014	1,0030	1,0052	1,0074	1,0089
	0	2,590	14,599	32,706	75,413	134,592	188,716	172,697
0,80	1,0	1,0	1,0	1,0002	1,0011	1,0018	1,0024	1,0026
	0	2,592	14,725	33,205	77,330	139,378	197,291	182,466
1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0	2,599	14,827	33,626	79,026	143,851	205,771	191,821

Wymiary próbek: dla stopu (a) grubość  $b=0,84$  mm, dla stopu (b)  $b=0,82$  mm oraz dla obu stopów  $2h=91,6$  mm,  $2l=25,4$  mm.

Cechy mechaniczne materiałów: stop (a):  $E=7,5 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{0,2}=4400$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_w=5100$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_w=10,5\%$ ,  $G_{kryt}=1,0$  kGm/cm<sup>2</sup>; stop (b):  $E=7,2 \cdot 10^5$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{0,2}=5900$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_w=6500$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\varepsilon_w=10,5\%$ ,  $G_{kryt}=0,4$  kGm/cm<sup>2</sup>.

Oceniono, że w chwili rozpoczęcia propagacji szczeliny w próbie statycznej — naprężenie (obciążenie) przyłożone na końcach płytek wynosiło: dla stopu (a):  $\sigma'_{out}=2100$  do  $2300$  kG/cm<sup>2</sup>, średnio  $2200$  kG/cm<sup>2</sup>; dla stopu (b):  $\sigma'_{out}=1600$  do  $1800$  kG/cm<sup>2</sup>, średnio  $1700$  kG/cm<sup>2</sup>.

Natomiast naprężenia (obciążenia) niszczące: dla stopu (a):  $\sigma_{on}=2850$  kG/cm<sup>2</sup> (ok. 30% wyższe); dla stopu (b):  $\sigma'_{on}=2450$  kG/cm<sup>2</sup> (ok. 45% wyższe).

Zatem w przekrojach ze szczeliną panowały średnie naprężenia: w stopie (a):  $\sigma_{out} \approx 3045$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{on} \approx 3945$  kG/cm<sup>2</sup>; w stopie (b):  $\sigma_{out} \approx 2350$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\sigma_{on} \approx 3390$  kG/cm<sup>2</sup>.

Pracę  $\Phi$  obliczamy jak dla materiałów ze wzmocnieniem (rys. 4a). Dla stopu (a):  $\Phi=480$  kG/cm<sup>2</sup>; dla stopu (b):  $\Phi=630$  kG/cm<sup>2</sup>.

W obliczeniu krytycznego  $r_{ult}/a$  można w przybliżeniu uwzględnić wzmocnienie przyjmując w równaniu (4.3) zamiast  $\sigma_{0,2}$  wartość zastępczą  $\bar{\sigma}_{p1}=(\sigma_{0,2}+\sigma_w)/2$ . Otrzymano dla stopu (a):  $\bar{\sigma}_{p1}=4750$  kG/cm<sup>2</sup>; dla stopu (b):  $\bar{\sigma}_{p1}=6200$  kG/cm<sup>2</sup>.

Natomiast współczynnik koncentracji naprężenia  $\alpha_{ult}$  należy odnieść do  $\sigma_{0,2}$ , gdyż dla małych wartości  $r_{ult}/a$  wpływ ostatnich składników w równaniach (2.9) i (3.4) jest już nieznaczny:

stop (a):  $\sigma^{*5}=88,23 \cdot 10^{15}$  [kG/cm<sup>2</sup>]<sup>15</sup>,  $S=0,036570$ ,  $r_{ult}/a=0,0519$ ,  $\alpha_{ult}=1,3793 \Rightarrow \sigma_{out}=3190$  kG/cm<sup>2</sup> wobec wartości doświadczalnej  $3040$  kG/cm<sup>2</sup>;

stop (b):  $\sigma^{*5}=56,16 \cdot 10^{15}$  [kG/cm<sup>2</sup>]<sup>15</sup>,  $S=0,006130$ ,  $r_{ult}/a=0,00735$ ,  $\alpha_{ult}=2,7035 \Rightarrow \sigma_{out}=2180$  kG/cm<sup>2</sup> wobec wartości doświadczalnej  $2350$  kG/cm<sup>2</sup>.

Jak widać, pomimo występowania pewnych trudności w ocenie momentu rozpoczęcia pęknięcia w szczelinie, wyniki wstępnej weryfikacji można uznać za pomyślne. Na uwagę zasługuje tu wyraźna ingerencja stałej materiałowej  $G_{kryt}$ . Stop (b), pomimo tego, że posiadał ogólnie lepsze własności mechaniczne, to jednak wykazał gorszą odporność przeciw pękaniu. Potwierdził to także rachunek.

Sprawę różnic między  $\sigma_{on}$  a  $\sigma_{out}$  staramy się naświetlić w Uzupełnieniu 3.

#### *Uzupełnienie 2 na temat stałych materiałowych $\Phi$ i $G_{kryt}$*

Praca zerwania  $\Phi$  (np. ulepszonych stali) jest jak już powiedziano w punkcie 1.2., pośrednio niezależna od wytrzymałości. Tę niezależność objaśnia się na rys. 4b. Dla danego gatunku stopu, przy dwu losowo różnych granicach plastyczności  $\sigma_{p1}$  praca  $\Phi=const$ . Wynika stąd, iż  $\varepsilon_w$  jest funkcją  $\sigma_{p1}$ . Natomiast praca  $\Phi$  jest ściśle zależna od innych czynników, ogólnej jednorodności materiału i starzenia. Dlatego  $\Phi$  bywa przyjmowana za orientacyjną miarę skłonności materiału do kruchych pęknięć.

Wielkość  $\Phi$  można wyznaczyć, jak wspomniano, z osiowej próby na rozciąganie. Naszym zdaniem obliczenia należy tu przeprowadzić z danych otrzymanych na krótkich bazach (np. 25 mm) i w miejscach poza silnymi przewężeniami plastycznymi (szyjką). Wiadomo bowiem, że te silne przewężenia zachodzą w wyniku innych struktur dyslokacyjnych i tak duże wydłużenia nie mają miejsca w strefie uplastycznionej u wierzchołka szczeliny. W takim ujęciu graniczne wydłużenia  $\varepsilon_w$  wypadną mniejsze od wartości  $A_5$  czy  $A_{10}$ , otrzymanych z prób konwencjonalnych.

Do obliczenia  $\Phi$  można użyć dokładniejszych wzorów, np. W. Broniewskiego (cyt. za [15]):

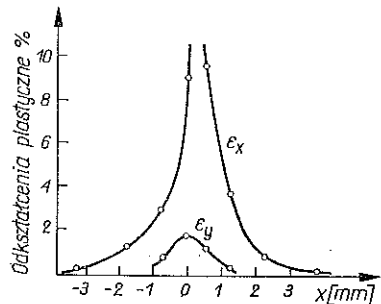
$$\Phi = (0,75\sigma_w + 0,25\sigma_{p1})\varepsilon_w.$$

Odnosnie do stałej  $G_{kryt}$  uważamy, co już zasygnalizowano w punkcie 1.2, iż metoda parametru COD, prowadząca w prostej linii do tej stałej, jest związana z dość subtelnymi metodami badań i pomiarów eksperymentalnych. Dlatego są tu potrzebne jeszcze liczne badania. Stała ta zależy bowiem od starzenia się materiału (naprężeniowego lub naturalnego), temperatury, prędkości i sposobu obciążenia itd. Jednakże w ostatnim dziesięcioleciu przybyło już sporo danych na ten temat. Potrzebne informacje można znaleźć w pracach E. T. WESSELEGO, W. G. CLARKA, W. H. PRYLEGA, G. T. HAHNA, M. SARRATE'A, A. R. ROSENFELDA i innych, zamieszczonych w zbiorze [21]; również sporo danych znajduje się w pracy [16]. Można skorzystać z danych doświadczalnych, dotyczących tzw. współczynnika intensywności naprężeń  $K_{kryt}$ , gdyż istnieje tu ścisły związek:

$$K_{kryt}^2 = EG_{kryt}.$$

### Uzupełnienie 3

3.1. Kryterium zapoczątkowania pęknięć, wyrażone przez (1.3), znajduje naszym zdaniem uzasadnienie w badaniach doświadczalnych. Na rys. 9 podano wykresy odkształceń plastycznych  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  na dnie szczeliny przy obciążeniach nieco mniejszych niż niszczące. Wykres ten zaczerpnięto z cytowanej już w Uzupełnieniu 1 pracy D. Broeck'a i F. J. Bradshow'a. Jak widać,  $\varepsilon_x$  osiągnęło 10%, tj. wartość zbliżoną do  $\varepsilon_w$  z jednoosiowej próby na rozciąganie. Ta wartość z grubsza biorąc utrzymuje się bez zmiany cały czas począwszy od momentu zapoczątkowania propagacji szczeliny aż do momentu zniszczenia.



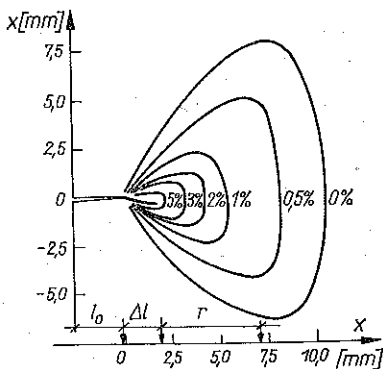
Rys. 9. Plastyczne odkształcenia w odległości 0,1 mm od końca szczeliny dla stopu DTD (646 Al-Cu) wg [21] ( $l=15,7$  mm,  $\sigma'_0=28$  kG/mm<sup>2</sup>).

3.2. Różnice doświadczalne między obciążeniem niszczącym  $\sigma_{on}$  a obciążeniem zapoczątkowującym pęknięcie  $\sigma_{onit}$  są z deterministycznego punktu widzenia trudne do wytłumaczenia. Należy to do zagadnienia «statecznie» rozwijających się szczelin.

Praca odkształcenia plastycznego i zniszczenia próbki w postaci cienkiej płytki różni się istotnie od podobnych procesów w próbkach o przekroju okrągłym. Silny

wpływ wywiera stopień zgniotu i kierunek rozciągania w stosunku do kierunku walcowania; materiał taki nie można uważać za izotropowy.

Istotną rolę może tutaj odgrywać wpływ mikronaprzeżeń własnych na granicę plastyczności oraz redystrybucja makronaprzeżeń własnych w procesie pęknięcia.



Rys. 10. Kształt plastycznej strefy próbki ze stopu DTD 646 (Al-Cu) wg [21] ( $l_0 + \Delta l = 14,6$  mm,  $\sigma_0 = 27,4$  kG/mm<sup>2</sup>)

Za istotnością roli mikronaprzeżeń własnych może przemawiać fakt, że w przypadku mikrokarbu-mikroszczeliny ( $l/h \rightarrow 0$ ) mogą się zainicjować pęknięcia przy odkształceniach  $\epsilon_{\max}$  równych zaledwie  $3\epsilon_{p1}$ .

Niewykluczony jest także wpływ odciążenia próbki. Wiadomo bowiem, iż do ponownego zainicjowania pęknięć potrzeba wtedy większego obciążenia od poprzedniego.

Zagadnienie stateczne rozwijających się szczelin w procesie narastającego obciążenia aż do momentu gwałtownego zniszczenia może być rozpatrywane na podstawie bilansu energetycznego. Mianowicie, dysypowana energia przy plastycznych odkształceniach składa się z energii sprężystej wyzwolonej przy rozwijaniu się pęknięcia i pracy zewnętrznej potrzebnej na zwiększenie obciążenia. Ten bilans energetyczny był szczegółowo rozważany przez K. S. Havnera, J. B. Glasco, J. M. Krafft, D. Broecker i innych.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę, iż obciążenie zewnętrzne niszczące 2850 kG/cm<sup>2</sup> w stopie (a) (por. Uzupełnienie 1), towarzyszyło szczelinie  $l_n = 17,5$  mm. Wobec tego średnie naprężenie w przekroju przez szczelinę wynosiło wtedy 4610 kG/cm<sup>2</sup>, a więc przekroczyło  $\sigma_{0,2}$ .

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. J. BARENBLATT, *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*, Advanced Applied Mechanics, 7, 55, 1962.
2. J. A. BEGLEY, J. D. LANDES, *The J. Integral as a failure criterion*, 5th National Symposium of Fracture Mechanics, Univ. of Illinois Urbana, 1971.
3. R. J. BUCCI, P. C. PARÍS, J. D. LANDES, J. R. RICE, *J. Integral estimation procedures*, Scientific paper 71, 1E FMPWR P1 December 1971, Westinghouse Research Laboratory.
4. F. M. BURDEKIN, D. E. W. STONES, *The C.O.D. approach to fracture toughness in yielding materials*, J. Strain Analysis, 2, 145-153, 1966.
5. F. A. MC CLINTOCK, G. R. JRWIN, *Plasticity aspects of fracture mechanics*, ASTM STP, 381, 84-113, 1965.
6. D. S. DUGDALE, *Yielding of steel sheets containing slits*, J. Mech. Phys. Solids, 8, 100-104, 1960.
7. Fracture Toughness JSJ Publication, London 1968.
8. A. N. GRUBIN, *Nieliniyneje zadači koncentracii naprjaženij w dietaljach mašin.*, Izdat. „Masinstrojenije”, Leningrad 1972.



9. G. T. HAHN, A. R. ROSENFELD, *Local yielding and extension of a crack under plane stress*, Acta Metallurgica, 3, 293—306, 1965.
10. G. R. IRWIN, *Fracture mechanics, Structural mechanics*, Pergamon Press, New York 1960.
11. G. R. IRWIN, *Crack propagation force for a part through crack in a plate*, ASME J. Appl. Phys. 651, December 1962.
12. G. R. IRWIN, *Structural aspects of brittle fracture*, Applied materials research, 65—81, April 1964.
13. G. R. IRWIN, *Seventh Sagamore advanced materials research conference 1960*; W. R. BROWN, J. E. SRAWLEY, *Plane strain crack toughness testing of high strength metallic materials*, ASTM STP 410, 1967.
14. G. R. IRWIN, *Fracture*, Encyklopedia of Physics, Springer Berlin, 6, 551—590, 1968.
15. S. KATARZYŃSKI, S. KOCĄŃDA, M. ZAKRZEWSKI, *Badania własności mechanicznych metali*, WNT, Warszawa 1969.
16. S. KOCĄŃDA, *Zmęczeniowe niszczenie metali*, WNT, Warszawa 1972.
17. S. M. MASSON, *Wstęp do mechaniki zniszczenia*, tłum. z Roczników Ecole Nationale Supérieure de Mecanique, Nantes 1973.
18. H. NEUBER, *Kerbspannungslehre*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958.
19. G. PLUVINAGE, *Aspects theoriques et experimentaux du critere d'ouverture de fissure*, Association Technique de la Siderurgie Française, MD. NG./528 MJ 7133, 1971.
20. J. R. RICE, *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*, Fracture on advanced treatise, H. LIEBOWITZ, Chapter 3, 2, Academic Press 1968.
21. J. H. ROBOTNOW (red), *Novyye metody ocienki soprotivleniya metallov chрупkomu razrušeniju*, Izd. „Mir”, Moskwa 1972.
22. A. R. ROSENFELD, *Colloque sur la rupture des materiaux*, Grenoble 1972.
23. A. S. TETELMAN, *The effect of plastic strain and temperature on microcrack propagation in iron 3% silicon*, Acta Metallurgica, 9, 933—1004, 1964.
24. A. A. WELLS, *Applications of fracture mechanics to and beyond general yielding*, British Welding Journal JO, 10, 563—570, 1963.

#### Резюме

### НЕКОТОРЫЙ СЛУЧАЙ ИЗ ТЕОРИИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В СЕЧЕНИИ С ПЛОСКОЙ ЩЕЛЬЮ

Автор анализирует упруго-пластическое состояние в сечении с симметричной щелью в плоском образце, подвергнутом осевому растяжению. При помощи теории глубоких и мелких нарезков, разработанной А. Н. Грубиним, при использовании предельного перехода, приходится к соотношению между коэффициентом концентрации напряжений и пластической зоной у вершины щели. Затем, опираясь на выведенное соотношение для пластической зоны и параметр раскрытия COD (crack opening displacement) метода Дагдейля-Баренблатта-Уэллса, формулируется соотношение для максимальной деформации на дне щели. Как критерий инициирования трещины принято достижение предельных деформаций. Выведенные соотношения обработаны численно и аппроксимированы методом Г. Нейбера. Приведена попытка экспериментальной проверки на основе результатов исследований Д. Брека и Ф. Дж. Брэдшоу.

## SUMMARY

A CONTRIBUTION TO THE THEORY OF STRESS CONCENTRATION  
IN A CROSS-SECTION WITH A FLAT CRACK

An elastic-plastic analysis is presented for an axially tensioned flat specimen with a symmetric crack. Using the theory of deep and shallow notches due to A. N. Grubin and performing a limit transition a relationship is obtained between the stress concentration coefficient and plastic zone at the tip of the crack. This relationship together with the Dugdale-Barenblatt-Wells displacement method yields an expression for the maximum strain at the bottom of the crack. The maximum strain at the bottom of the crack. The maximum strain fracture criterion is adopted. Numerical results obtained by means of the H. Neuberg approximation method are compared with experiments performed by D. Broeck and F. J. Bradshaw.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 14 czerwca 1975 r.*

---