

O WYPROWADZENIU TEORII CIENKICH SPRĘŻYSTYCH TARCZ NA PODSTAWIE TRÓJWYMIAROWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

RYSZARD WOJNAR (WARSZAWA)

Podajemy wyprowadzenie równań cienkich tarcz sprężystych na podstawie trójwymiarowej liniowej teorii sprężystości. Metoda wyprowadzenia polega na rozwinięciu funkcji występujących w trójwymiarowych równaniach teorii sprężystości w szeregi względem zmiennej x_3 , która jest współrzędną normalną do płaszczyzny tarczy, a następnie na zatrzymaniu składników w najniższej potęgze x_3 .

We wstępie podajemy klasyfikację pól sprężystych, statycznych i dynamicznych ze względu na symetrię wobec zmiennej x_3 .

W p. 1 podajemy założenia o warunkach brzegowych i początkowych oraz o siłach masowych przyłożonych do tarczy. Wskazujemy na niekonsekwencje przyjmowanych powszechnie teorii płaskiego stanu naprężenia. Czynimy założenia o rozwijaniu składowych naprężenia w szeregi.

W p. 2 podajemy, wynikające z równań typu Beltramięgo-Michella związki między współczynnikami tych szeregów.

W p. 3 wyprowadzamy równania teorii sprężystości cienkiej tarczy dla zagadnienia statycznego, równania (3.14)–(3.15), a w p. 4 dla zagadnienia dynamicznego, równania (4.5), (4.10). Ponadto podajemy poprawkę do składowych pola naprężenia tarczy dla pól statycznych równania (3.16) i dynamicznych równania (4.17), (4.20).

W p. 5 rozważamy uogólniony płaski stan naprężenia, statyczny i dynamiczny. Wykazujemy, że warunki w których występuje uogólniony płaski stan naprężenia nie są w ogólności bardziej ogólne, niż t , przy których występuje płaski stan naprężenia.

W p. 6 podajemy pewne rozważania o możliwości znalezienia wyższych poprawek do pola naprężenia występującego w tarczy.

W Dodatku 1 pokazujemy, że w przypadku statycznym warunki brzegowe wraz z jednym z równań Beltramięgo-Michella implikują w dobrym przybliżeniu płaski stan naprężenia w tarczy.

W Dodatku 2 uogólniamy formułę Clebscha na przypadek niejednorodnych sił masowych, równania (B11). Pokazujemy, że z dokładnością do wyrazów rzędu h^4 , gdzie $2h$ oznacza grubość tarczy, zgadza się ona z formułą (3.16), otrzymaną na drodze rozwinięć.

WSTĘP

Klasyfikacja pola naprężenia ze względu na symetrię. Rozważmy liniowe i izotropowe ciało sprężyste zajmujące objętość V otoczoną powierzchnią S . Niech w prostokątnym układzie współrzędnych prostoliniowych $x=(x_1, x_2, x_3)$ płaszczyzna $x_3=0$ będzie płaszczyzną symetrii tego ciała. Niech gęstość ciała wynosi ρ , moduł Younga E , współczynnik Poissona ν . Współczynniki te przyjmujemy za niezależne od położenia x i od czasu t .

W ciele takim niech panuje stan naprężenia \underline{s} , zależny w ogólności od x i t , wywołany przez dane na powierzchni S siły zewnętrzne \underline{q} , siły masowe X i ewentualnie przez początkowy rozkład naprężeń \underline{s}^0 i ich prędkości \underline{s}^0 .

Kierując się symetrią obszaru V , zdefiniujemy jeszcze dla dowolnej funkcji $\varphi = \varphi(x_3, y)$, gdzie y oznacza zbiór innych zmiennych niezależnych, część symetryczną φ^s i antysymetryczną φ^a względem płaszczyzny $x_3 = 0$:

$$(0.1) \quad \begin{aligned} \varphi^s &= \varphi^s(x_3, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x_3, y) + \varphi(-x_3, y)], \\ \varphi^a &= \varphi^a(x_3, y) = \frac{1}{2} [\varphi(x_3, y) - \varphi(-x_3, y)], \end{aligned}$$

przy czym

$$(0.2) \quad \varphi = \varphi(x_3, y) = \varphi^s(x_3, y) + \varphi^a(x_3, y)$$

oraz

$$(0.3) \quad \varphi^s(x_3, y) = \varphi^s(-x_3, y), \quad \varphi^a(x_3, y) = -\varphi^a(-x_3, y).$$

a) *Statyka*

W zagadnieniu statycznym pole naprężeń $s_{ij} = s_{ij}(x)$, $s_{ij} = s_{ji}$, przy naprężeniowych warunkach brzegowych

$$(0.4) \quad q_i = q_i(x) = s_{ij}(x) n_j(x), \quad x \in S,$$

gdzie $q_i(x)$ jest danym rozkładem sił zewnętrznych, a $n_i(x)$ wektorem normalnym do powierzchni S w punkcie x , wyznaczone jest przez układ różniczkowych równań równowagi (RRR) i równań Beltramiego-Michella (RBM) [1, 6, 8],

$$(0.5) \quad s_{ij,j} + X_i = 0, \quad s_{ij,kk} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk,ij} + 2X_{(i,j)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} = 0.$$

Tutaj X_i oznacza wektor sił masowych.

Dowolny stan naprężenia s_{ij} możemy przedstawić w postaci superpozycji

$$(0.6) \quad s_{ij}(x) = s_{ij}^{(a)}(x) + s_{ij}^{(p)}(x),$$

gdzie

$$(0.7) \quad s_{ij}^{(a)} = \begin{bmatrix} s_{11}^s & s_{12}^s & s_{13}^s \\ s_{21}^s & s_{22}^s & s_{23}^s \\ s_{31}^s & s_{32}^s & s_{33}^s \end{bmatrix}, \quad s_{ij}^{(p)} = \begin{bmatrix} s_{11}^a & s_{12}^a & s_{13}^a \\ s_{21}^a & s_{22}^a & s_{23}^a \\ s_{31}^a & s_{32}^a & s_{33}^a \end{bmatrix}.$$

Na mocy definicji (0.1) tensory $s_{ij}^{(a)}$, $s_{ij}^{(p)}$ określone są jednoznacznie. Stan naprężenia $s_{ij}^{(a)}$ będziemy nazywać tarczopodobnym, a stan $s_{ij}^{(p)}$ — płytopodobnym.

Po wstawieniu (0.6) do (0.5) i (0.4) dostajemy dwa niezależne od siebie układy równań: jeden zawierający tylko składowe $s_{ij}^{(a)}$, a drugi tylko składowe $s_{ij}^{(p)}$,

$$(0.8) \quad \begin{aligned} s_{ij,j}^{(a)} + X_i^{(a)} &= 0, \quad s_{ij,kk}^{(a)} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk,ij}^{(a)} + 2X_{(i,j)}^{(a)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k}^{(a)} \delta_{ij} = 0, \\ q_i^{(a)} &= s_{ij}^{(a)}(x) n_j(x), \quad x \in S \end{aligned}$$

oraz

$$(0.9) \quad s_{ij,j}^{(p)} + X_i^{(p)} = 0, \quad s_{ij,kk}^{(p)} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk,ij}^{(p)} + 2X_{(i,j)}^{(p)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k}^{(p)} \delta_{ij} = 0,$$

$$q_i^{(p)} = s_{ij}^{(p)}(x) n_j(x), \quad x \in S,$$

przy czym

$$(0.10) \quad q_i^{(d)} = \begin{bmatrix} q_1^s \\ q_2^s \\ q_3^s \end{bmatrix}, \quad q_i^a = \begin{bmatrix} q_1^a \\ q_2^a \\ q_3^a \end{bmatrix}, \quad X_i^{(d)} = \begin{bmatrix} X_1^s \\ X_2^s \\ X_3^s \end{bmatrix}, \quad X_i^{(p)} = \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2^a \\ X_3^s \end{bmatrix}.$$

Rzeczywiście, wstawienie rozkładu (0.6) do równań (0.4) i (0.5) pozwala napisać każde z nich w symbolicznej postaci

$$(a) \quad A(x_\gamma, x_3) + S(x_\gamma, x_3) = 0,$$

gdzie $A(x_\gamma, x_3) = -A(x_\gamma, -x_3)$ jest częścią antysymetryczną (względem zmiennej x_3), a $S(x_\gamma, x_3) = S(x_\gamma, -x_3)$ jest częścią symetryczną (względem zmiennej x_3) odpowiednich lewych stron równań (0.4)–(0.5). Przy tym $A(x_\gamma, x_3)$ zawiera tylko składowe $s_{ij}^{(p)}$, a $S(x_\gamma, x_3)$ tylko składowe $s_{ij}^{(d)}$. Zgodnie z definicją A i S z równania (a) wynika równanie

$$-A(x_\gamma, x_3) + S(x_\gamma, x_3) = 0,$$

co w połączeniu z (a) prowadzi do równań

$$A(x_\gamma, x_3) = 0, \quad S(x_\gamma, x_3) = 0.$$

Równaniami tymi są właśnie równania (0.8) i (0.9).

Oczywiście, że i odwrotnie: spełnienie równań (0.8) i (0.9) pozwala spełnić równania (0.4) i (0.5).

Pod względem matematycznym każdy z układów (0.8), (0.9) ma postać układu (0.5), (0.4) i dlatego określa jednoznacznie pola (odpowiednio) $s_{ij}^{(d)}$ oraz $s_{ij}^{(p)}$.

Zatem warunki symetrii przestrzennej pozwalają rozdzielić pola $s_{ij}^{(d)}$ i $s_{ij}^{(p)}$. Żaden inny rozdział składowych tensora s_{ij} ,

$$s_{ij} = s_{ij}^A + s_{ij}^B,$$

gdzie np.

$$s_{ij}^A = \begin{bmatrix} s_{11}^s & s_{12}^a & s_{13}^a \\ s_{12}^a & s_{22}^s & s_{23}^a \\ s_{13}^a & s_{23}^a & s_{33}^s \end{bmatrix}, \quad s_{ij}^B = \begin{bmatrix} s_{11}^a & s_{12}^s & s_{13}^s \\ s_{12}^s & s_{22}^a & s_{23}^s \\ s_{12}^s & s_{23}^s & s_{33}^a \end{bmatrix},$$

nie może być przeprowadzony w sposób konsekwentny, tzn. nie można podać układu równań, które zawierałyby tylko składowe s_{ij}^A (lub s_{ij}^B) i jednocześnie określałyby je w sposób jednoznaczny. Jest to prosty wniosek z jednoznaczności podziału danej funkcji na część symetryczną i antysymetryczną.

b) *Dynamika*

W zagadnieniu dynamicznym pole naprężeń $s_{ij} = s_{ij}(x, t)$ wyznaczone jest przez układ naprężeniowych równań ruchu (NRR) [2, 5 i 7],

$$(0.11) \quad s_{(ik, kj)} + X_{(i, j)} = \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{kk} \delta_{ij}$$

przy warunkach początkowych

$$(0.12) \quad s_{ij}(x, 0) = \bar{s}_{ij}(x), \quad \dot{s}_{ij}(x, 0) = \dot{\bar{s}}_{ij}(x), \quad x \in V$$

i warunkach brzegowych

$$(0.13) \quad q_i(x, t) = s_{ij}(x, t) n_j(x), \quad (x, t) \in S \times (0, \infty).$$

Znów możemy dokonać rozkładu tensora s_{ij} na część tarcz- i płytopodobną (porównaj (0.7)), przy czym teraz składowe $s_{ij}^{(d)}$ i $s_{ij}^{(p)}$ są również funkcjami czasu:

$$(0.14) \quad s_{ij}(x, t) = s_{ij}^{(d)}(x, t) + s_{ij}^{(p)}(x, t).$$

Po wstawieniu (0.14) do układu (0.11)–(0.13) dostajemy znów dwa układy równań:

$$(0.15) \quad \begin{aligned} s_{(ik, kj)}^{(d)} + X_{(i, j)}^{(d)} &= \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij}^{(d)} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{kk}^{(d)} \delta_{ij}, \\ s_{ij}^{(d)}(x, 0) &= \bar{s}_{ij}^{(d)}(x), \quad \dot{s}_{ij}^{(d)}(x, 0) = \dot{\bar{s}}_{ij}^{(d)}(x), \quad x \in V, \\ q_i^{(d)}(x, t) &= s_{ij}^{(d)}(x, t) n_j(x), \quad (x, t) \in S \times (0, \infty) \end{aligned}$$

oraz

$$(0.16) \quad \begin{aligned} s_{(ik, kj)}^{(p)} + X_{(i, j)}^{(p)} &= \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij}^{(p)} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{kk}^{(p)} \delta_{ij}, \\ s_{ij}^{(p)}(x, 0) &= \bar{s}_{ij}^{(p)}(x), \quad \dot{s}_{ij}^{(p)}(x, 0) = \dot{\bar{s}}_{ij}^{(p)}(x), \quad x \in V, \\ q_i^{(p)}(x, t) &= s_{ij}^{(p)}(x, t) n_j(x), \quad (x, t) \in S \times (0, \infty), \end{aligned}$$

przy czym $\bar{s}_{ij}^{(d)}$, $\dot{\bar{s}}_{ij}^{(d)}$, $\bar{s}_{ij}^{(p)}$, $\dot{\bar{s}}_{ij}^{(p)}$ są to dane funkcje x , o symetrii przestrzennej odpowiednio takiej, jak $s_{ij}^{(d)}$ oraz $s_{ij}^{(p)}$. Zachowujemy przy tym definicje (0.10), w których jednakże składowe mogą być funkcjami czasu. Każdy z układów (0.15), (0.16) ma pod względem matematycznym postać układu (0.11)–(0.13) i dlatego odpowiednio określa jednoznacznie pole $s_{ij}^{(d)}$ lub $s_{ij}^{(p)}$.

Widzimy, że ewolucja czasowa obu pól $s_{ij}^{(d)}(x, t)$ i $s_{ij}^{(p)}(x, t)$ przebiega niezależnie, co motywuje podział tensora naprężeń na część tarcz- i płytopodobną.

Ponadto pole $s_{ij}(x, t)$ spełnia w sposób konieczny układ równań typu Beltrami-Michella [5]:

$$(0.17) \quad s_{ij, kk} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk, ij} + 2X_{(i, j)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k, k} \delta_{ij} = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{kk} \delta_{ij}.$$

Wykorzystując rozkład (0.14) dostajemy z układu (0.17), znowu na zasadzie symetrii i antysymetrii, dwa układy równań, spełniane w sposób konieczny przez $s_{ij}^{(d)}$ i $s_{ij}^{(p)}$ o tej samej postaci, (por. 0.17)), co układ spełniany przez s_{ij} :

$$(0.18) \quad s_{ij,kk}^{(d)} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk,ij}^{(p)} + 2X_{(i,j)}^{(d)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k}^{(d)} \delta_{ij} = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij}^{(d)} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{kk}^{(d)} \delta_{ij}$$

oraz

$$(0.19) \quad s_{ij,kk}^{(p)} + \frac{1}{1+\nu} s_{kk,ij}^{(d)} + 2X_{(i,j)}^{(p)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k}^{(p)} \delta_{ij} = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{ij}^{(p)} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{kk}^{(p)} \delta_{ij}.$$

W dalszym ciągu naszych rozważań, których celem będzie wyrowadzenie równań cienkich tarcz i płyt z trójwymiarowych równań teorii sprężystości, ograniczymy się do rozpatrywania ciała V o kształcie walca, niekoniecznie regularnego, o wysokości $2h$ (rys. 1).

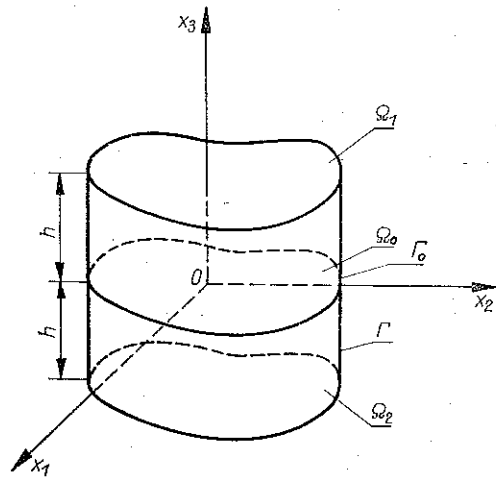
Równania podstaw walca, Ω_1 i Ω_2 niech będą odpowiednio

$$(0.20) \quad x_3 = +h, \quad x_3 = -h.$$

Tworzące walca są prostopadłe do płaszczyzny $x_3 = \text{const}$. Pobocznicę walca oznaczmy przez Γ . Tak więc

$$(0.21) \quad S = \Gamma + \Omega_1 + \Omega_2.$$

Przekrój walca płaszczyzną $x_3 = 0$ oznaczmy przez Ω_0 , kontur zaś tego przekroju przez Γ_0 .



Rys. 1. Obszar walca V

1. ZAŁOŻENIA

Z kolei zajmiemy się wyrowadzeniem równań dla cienkich tarcz sprężystych z trójwymiarowych naprężeniowych równań teorii sprężystości.

Rozważmy walec sprężysty zdefiniowany w końcowej części wstępu. Niech pole naprężeń s_{ij} (w ogólności zależne od czasu t i położenia x) będzie wywołane w takim ciele przez siły zewnętrzne

$$(1.1) \quad s_{i3}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_\alpha \times (0, \infty), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$(1.2) \quad q_i(x, t) = s_{i\beta}(x, t) n_\beta(x), \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, \infty);$$

siły masowe

$$(1.3) \quad X_\alpha = X_\alpha(x, t), \quad X_3(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty)$$

i warunki początkowe

$$(1.4) \quad s_{ij}(x, 0) = \bar{s}_{ij}(x), \quad \dot{s}_{ij}(x, 0) = \dot{\bar{s}}_{ij}(x), \quad x \in V,$$

gdzie $\bar{s}_{ij}, \dot{\bar{s}}_{ij}$ są to dane funkcje x takie, że

$$(1.5) \quad \begin{aligned} s_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3) &= \bar{s}_{\alpha\beta}(x_\gamma, -x_3), & \dot{s}_{33}(x_\gamma, x_3) &= \dot{\bar{s}}_{33}(x_\gamma, -x_3), \\ \bar{s}_{\alpha 3}(x_\gamma, x_3) &= -\bar{s}_{\alpha 3}(x_\gamma, -x_3), \end{aligned}$$

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \dot{\bar{s}}_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3) &= \dot{\bar{s}}_{\alpha\beta}(x_\gamma, -x_3), & \dot{\bar{s}}_{33}(x_\gamma, x_3) &= \dot{\bar{s}}_{33}(x_\gamma, -x_3), \\ \dot{\bar{s}}_{\alpha 3}(x_\gamma, x_3) &= -\dot{\bar{s}}_{\alpha 3}(x_\gamma, -x_3). \end{aligned}$$

Ponadto niech

$$(1.7) \quad q_\alpha(x_\gamma, x_3, t) = q_\alpha(x_\gamma, -x_3, t), \quad q_3(x_\gamma, x_3, t) = -q_3(x_\gamma, -x_3, t).$$

Ponieważ obszar V jest symetryczny względem płaszczyzny $x_3=0$ (por. (0.20)) więc z założeń (1.1)–(1.7) wynika, zgodnie z rozumowaniem podanym we wstępie, że pole naprężeń s_{ij} ma własności pola $s_{ij}^{(d)}$:

$$(1.8) \quad s_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3, t) = s_{\alpha\beta}(x_\gamma, -x_3, t), \quad s_{\alpha 3}(x_\gamma, x_3, t) = -s_{\alpha 3}(x_\gamma, -x_3, t),$$

$$(1.9) \quad s_{33}(x_\gamma, x_3, t) = s_{33}(x_\gamma, -x_3, t),$$

a więc że w walcu panuje tylko tarczopodobny stan naprężenia

$$s_{ij}(x, t) = s_{ij}^{(d)}(x, t).$$

W dalszym ciągu jednak, dla uproszczenia zapisu, będziemy opuszczali górny wskaźnik (d) ,

Jeśli problem rozważany jest statyczny, to warunek początkowy (1.4) jest zbędny, w warunkach zaś (1.1)–(1.3) pomijamy argument t , warunek brzegowy (1.1) przyjmuje postać

$$(1.10) \quad s_{i3}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\alpha.$$

Wtedy z równania (0.8)_{1, t=3} wynika, że

$$(1.11) \quad s_{33,3}(x) = 0, \quad x \in \Omega_\alpha.$$

Przy niewielkiej wysokości walca warunki (1.10) i (1.11) sugerują założenie

$$(1.12) \quad s_{33}(x) = 0, \quad x \in V.$$

W dotąd spotykanym ujęciu (por. np. [1]) przyjmuje się następnie, właściwie dowolnie, korzystając tylko z (1.10)_{i=α}, że

$$(1.13) \quad s_{\alpha 3}(x) = 0, \quad x \in V,$$

co w połączeniu z (1.12) daje

$$(1.14) \quad s_{i3}(x) = 0, \quad x \in V.$$

Stan taki nazywamy płaskim stanem naprężenia (PSN).

Można wprawdzie dowieść (por. Dodatek 1), że założenie (1.12), przy siłach masowych spełniających warunek

$$X_{\gamma, \gamma\alpha}(x) = 0, \quad x \in V,$$

implikuje harmoniczną funkcję $s_{\alpha 3}(x)$, a więc i ich znikanie, z powodu praktycznie zerowych warunków brzegowych na $s_{\alpha 3}$ (wyjąwszy ewentualnie małą wobec Ω_α powierzchnię Γ), jednak w tym dowodzie korzystamy z równań zawierających pochodne rzędu drugiego, podczas gdy o wartości s_{33} wnioskowaliśmy na podstawie równania rzędu pierwszego (por. 1.11)).

Można dalej pokazać, że przy założeniu PSN główne przybliżenie $s_{\alpha\beta}(x)$ według potęg h ma postać

$$(1.15) \quad s_{\alpha\beta}(x) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) + O(h^2)$$

(por. Dodatek 2), lecz wtedy powstaje znów pytanie, o ile sensowne jest analizowanie poprawki $O(h^2)$ we wzorze (1.15) bez dyskusji poprawek dla s_{i3} .

Jeszcze większe wątpliwości wywołuje założenie PSN w warunkach dynamicznych, gdzie jak można pokazać przyjęcie PSN w postaci

$$(1.16) \quad s_{i3}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty)$$

przy siłach masowych (1.3), zerowych warunkach początkowych i obciążeniu powierzchniowym $q_\alpha(x, t)$ niezależnym od x_3 prowadzi do bezśladowego tensora naprężeń

$$(1.17) \quad s_{\alpha\alpha}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty),$$

[3], co jest sprzeczne z obserwowanym na ogół doświadczalnie polem naprężeń dynamicznych w cienkich tarczach [4].

Aby odpowiedzieć na pytanie, kiedy poprawne jest założenie PSN w cienkich tarczach, wyjdziemy z ogólnych trójwymiarowych równań teorii sprężystości. Rozwińmy składowe pola $s_{ij} = s_{ij}(x, t)$, $(x, t) \in V \times (0, \infty)$ w szereg potęg x_3

$$(1.18) \quad s_{ij}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_{ij}^{(n)}(x_\gamma, t) x_3^n.$$

Ograniczenia wynikające z warunków brzegowych (1.1) i symetrii (1.9) narzucają poszczególnym składowym pola (1.18) postać

$$(1.19) \quad \begin{aligned} s_{\alpha\beta}(x, t) &= s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t) + \sum s_{\alpha\beta}^{(n)}(x_\gamma, t) x_3^{2n}, \\ s_{\alpha 3}(x, t) &= \sum s_{\alpha 3}^{(n)}(x_\gamma, t) (x_3^{2n+1} - h^{2n} x_3), \\ s_{33}(x, t) &= \sum s_{33}^{(n)}(x_\gamma, t) (x_3^{2n} - h^{2n}); \end{aligned}$$

zmieniliśmy przy tym oznaczenia:

$$(1.20) \quad s_{\alpha\beta}^0 = s_{\alpha\beta}^o, \quad s_{\alpha\beta}^{(n)} = s_{\alpha\beta}^{(2n)}, \quad s_{\alpha 3}^{(n)} = s_{\alpha 3}^{(2n-1)}, \quad s_{33}^{(n)} = s_{33}^{(2n)}, \quad \sum = \sum_{n=1}^{\infty}.$$

Rozwinięcia (1.19) stanowią punkt wyjścia przy poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie postawione powyżej.

2. ŁAŃCUCH RÓWNAŃ BELTRAMIEGO-MICHELLA

Zanim przejdziemy do oddzielnego rozważenia zadania statycznego i dynamicznego zajmijmy się implikacjami, jakie z równań typu RB-M wynikają na skutek rozwinięć (1.19). Dla skrócenia weźmiemy pod uwagę tylko dynamiczne RB-M; równania statyczne otrzymamy, przyjmując, przyspieszenia naprężeń równe zero.

Wstawiając (1.19) do RB-M (0.18) i przyrównując do zera współczynniki przy tych samych potęgach x_3 otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych na funkcje $s_{ij}^{(n)}(x_\gamma, t)$. Współczynnik przy $x_3^0=1$ przyrównany do zera daje

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, \alpha\beta}^0 + 2s_{\alpha\beta}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu} \sum s_{33, \alpha\beta}^{(n)}(-h^{2n}) + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} = \\ = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^0 - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \left[\ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 + \sum s_{33}^{(n)}(-h^{2n}) \right] \delta_{\alpha\beta}, \\ (2.1) \quad \sum s_{\alpha 3, \gamma\gamma}^{(n)}(-h^{2n}) + 3 \cdot 2s_{\alpha 3}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu} 2[s_{\gamma\gamma, \alpha}^{(1)} + s_{33, \alpha}^{(1)}] = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \sum \ddot{s}_{\alpha 3}^{(n)}(-h^{2n}), \\ \sum s_{33, \gamma\gamma}^{(n)}(-h^{2n}) + 2s_{33}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu} 2[s_{\gamma\gamma}^{(1)} + s_{33}^{(1)}] + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} = \\ = \frac{\rho}{E} \frac{2-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \sum \ddot{s}_{33}^{(n)}(-h^{2n}) - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0, \end{aligned}$$

przy $x_3^{2n}, n \geq 1$;

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^{(n)} + 2(n+1)(2n+1)s_{\alpha\beta}^{(n+1)} + \frac{1}{1+\nu} [s_{\gamma\gamma}^{(n)} + s_{33}^{(n)}]_{, \alpha\beta} = \\ = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} [\ddot{s}_{\gamma\gamma}^{(n)} + \ddot{s}_{33}^{(n)}] \delta_{\alpha\beta}, \\ (2.2) \quad s_{\alpha 3, \gamma\gamma}^{(n)} + (2n+3)2(n+1)s_{\alpha 3}^{(n+1)} + \frac{1}{1+\nu} 2(n+1) [s_{\gamma\gamma, \alpha}^{(n+1)} + s_{33, \alpha}^{(n+1)}] = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha 3}^{(n)}, \\ s_{33, \gamma\gamma}^{(n)} + 2(n+1)(2n+1)s_{33}^{(n+1)} + 2(n+1)(2n+1) \frac{1}{1+\nu} [s_{\gamma\gamma}^{(n)} + s_{33}^{(n)}] = \\ = \rho \frac{1}{E} \frac{1}{1-\nu} (2-\nu-2\nu^2) [\ddot{s}_{33}^{(n)} - \nu \ddot{s}_{\gamma\gamma}^{(n)}]. \end{aligned}$$

Jeśli wysokość walca jest tak mała, że możemy odrzucić wszystkie wyrazy rzędu h^2 i wyższego, to (2.1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned} s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, \alpha\beta}^0 + 2s_{\alpha\beta}^{(1)} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} = \\ (2.3) \quad = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^0 - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(2.3) \quad 3s_{\alpha 3}^{(1)} + \frac{1}{1+\nu} [s_{\gamma\gamma, \alpha}^{(1)} + s_{33, \alpha}^{(1)}] = 0,$$

$$[\text{cd.}] \quad \frac{2}{1+\nu} [(2+\nu)s_{33}^{(1)} + s_{\gamma\gamma}^{(1)}] + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} = -\frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0.$$

Jest to układ sześciu równań, w którym występuje dziewięć nieznanymi funkcji: $s_{\alpha\beta}^0$ oraz $s_{ij}^{(1)}$. Zauważmy przy tym, że funkcja $s_{\alpha 3}^{(1)}$ nie wchodzi do równań (2.3)_{1, 3}.

Dalszą analizę stanu naprężenia w cienkich tarczach przeprowadzimy osobno dla zadań statycznych i dynamicznych.

3. ZADANIE STATYCZNE

Wstawmy rozwinięcie (1.19) do RRR (0.8)₁, pamiętając o założeniach co do sił masowych (1.3). Przyrównując do zera współczynniki przy tych samych potęgach x_3^{2n} , dostajemy kolejno:

dla $n=0$

$$(3.1)^* \quad s_{\alpha\beta, \beta}^0 + \sum s_{\alpha 3}^{(n)} (-h^{2n}) + X_{\alpha} = 0, \quad \sum s_{3\beta, \beta}^{(n)} (-h^{2n}) + 2s_{33}^{(1)} = 0;$$

dla $n>0$

$$(3.1') \quad s_{\alpha\beta, \beta}^{(n)} + (2n+1)s_{\alpha 3}^{(n)} = 0, \quad s_{3\beta, \beta}^{(n)} + 2(n+1)s_{33}^{(n+1)} = 0.$$

Do tego dochodzą warunki brzegowe (1.2), które po pominięciu t , a następnie po obustronnym rozwinięciu w szeregi potęgowe i przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach x_3 , przyjmują postać

$$(3.2) \quad q_{\alpha}^0(x_{\gamma}) = s_{\alpha\beta}^0(x_{\gamma}) n_{\beta}(x_{\gamma}), \quad q_3^0(x_{\gamma}) = 0, \quad x_{\gamma} \in \Gamma_0,$$

$$q_i^{(n)}(x_{\gamma}) = s_{i\beta}^{(n)} n_{\beta}(x_{\gamma}), \quad n > 0, \quad x_{\gamma} \in \Gamma_0.$$

przy czym

$$q_{\alpha}(x) = q_{\alpha}^0(x_{\gamma}) + \sum q_{\alpha}^{(n)}(x_{\gamma}) x_3^{2n}, \quad q_3(x) = q_3^0(x_{\gamma}) + \sum q_3^{(n)}(x_{\gamma}) (x_3^{2n+1} - h^{2n} x_3).$$

Warunki brzegowe (1.1) są już w powyższych formułach uwzględnione.

Odrzucając wyrazy rzędu h^2 i wyższego, zamiast (3.1)** mamy

$$(3.3) \quad s_{\alpha\beta, \beta}^0 + X_{\alpha} = 0, \quad s_{33}^{(1)} = 0.$$

*) Równanie (3.1)₂ pochodzi z równania (0.8)_{1, i=3}, do którego wstawiliśmy rozwinięcia (1.19). Samo równanie (0.8)_{1, i=3} po wstawieniu rozwinięcia (1.19) jest równaniem jednorodnym względem x_3 i dlatego stopień potęg x_3 może być w nim obniżony o jedność przez podzielenie przez x_3 . Współczynnik, z którego przyrównania do zera powstało równanie (3.1)₂, jest współczynnikiem przy $x_3^0=1$ już po tym podzieleniu.

**) Tzn. zakładamy, że $h \ll 1$. W tym celu dogodnie jest przyjąć za jednostkę długości jakiś typowy rozmiar l_0 przekroju walca i rozważać tylko takie walce, których połowa wysokości h jest dużo mniejsza od tego rozmiaru. W obszarach takich jak naroża czy karby wartość l_0 przestaje być miarodajna i przeprowadzana analiza przestaje być poprawna.

Wstawiając (3.3)₂ do równań (2.3) napisanych dla pól niezależnych od czasu ($\ddot{s}_{\alpha\beta}^0=0$), dostajemy układ następujący:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, \alpha\beta}^0 + 2s_{\alpha\beta}^{(1)} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} &= 0, \\ 3s_{\alpha 3}^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma\alpha} &= 0, \quad \frac{2}{1+\nu} s_{\gamma\gamma}^{(1)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Celem otrzymania (3.4)₂ skorzystaliśmy z (3.4)₃.

Wstawienie (3.4)₃ do zwężonego ($\alpha=\beta$) równania (3.4)₁ daje

$$(3.5) \quad s_{\alpha\alpha, \gamma\gamma}^0 + (1+\nu) X_{\gamma, \gamma} = 0.$$

Weźmy teraz pod uwagę dwa równania

$$(3.6) \quad s_{12, \gamma\gamma}^0 + s_{\gamma\gamma, 12}^0 + 2X_{(1, 2)} = 0, \quad s_{12, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 12}^0 + 2s_{12}^{(1)} + 2X_{(1, 2)} = 0.$$

Pierwsze wynika (po odpowiednim zróżniczkowaniu) z (3.3)₁, a drugie jest to równanie (3.4)_{1, \alpha=1, \beta=2}. Po odjęciu ich stronami mamy

$$(3.7) \quad s_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 12}^0.$$

Z równań (3.3)₁ wynika także

$$(3.8) \quad s_{11, 11}^0 = s_{22, 22}^0 - X_{1, 1} + X_{2, 2}, \quad s_{22, 22}^0 = s_{11, 11}^0 + X_{1, 1} - X_{2, 2},$$

z równania zaś (3.5) znajdziemy

$$(3.9) \quad s_{\gamma\gamma, 11}^0 = -s_{\gamma\gamma, 22}^0 - (1+\nu) X_{\gamma, \gamma}, \quad s_{\gamma\gamma, 22}^0 = -s_{\gamma\gamma, 11}^0 - (1+\nu) X_{\gamma, \gamma}.$$

Po wstawieniu (3.8)₁, (3.9)₁ do (3.4)_{1, \alpha=1, \beta=1} mamy

$$(3.10) \quad s_{11}^{(1)} = -\frac{1}{2} \nu \left(\frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 22}^0 + \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \right).$$

Podobnie po wstawieniu (3.8)₂ i (3.9)₂ do równania (3.4)_{1, \alpha=2, \beta=2} znajdziemy

$$(3.11) \quad s_{22}^{(1)} = -\frac{1}{2} \nu \left(\frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 11}^0 + \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \right).$$

A zatem, jeśli znamy rozwiązanie $s_{\alpha\beta}^0$, to możemy korzystając ze wzorów (3.7), (3.10) i (3.11) podać, zgodnie z rozwinięciem (1.19)₁, przybliżenie rozwiązania z dokładnością do $O(h^2)$:

$$(3.12) \quad s_{\alpha\beta}(x) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) + s_{\alpha\beta}^1(x_\gamma) x_3^2 = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) + O(h^2)$$

mimo że w naszych równaniach odrzuciliśmy wyrazy rzędu $O(h^2)$. Paradoks tkwi w tym, że przybliżenia dokonaliśmy w równaniach, a nie w poszukiwanych funkcjach. Równanie (3.12) wykazuje, że postać sił przyłożonych do pobocznic walca powinna, w przyjętym przybliżeniu być następująca:

$$(3.13) \quad q_\alpha = s_{\alpha\beta}^{(x)} n_\beta(x_\gamma) = [s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) + s_{\alpha\beta}^1(x_\gamma) x_3^2] n_\beta \equiv q_\alpha^0(x_\gamma) + q_\alpha^1(x_\gamma) x_3^2, \quad x \in \Gamma.$$

Zbierając powyższe wyniki widzimy zatem, że w cienkich tarczach w warunkach statycznych pole naprężeń możemy wyznaczyć z następującego układu równań (por. (3.3)₁ i (3.5)):

$$(3.14) \quad s_{\alpha\beta, \beta}^0 + X_\alpha = 0, \quad s_{\alpha\alpha, \gamma\gamma}^0 + (1+\nu)X_{\gamma, \gamma} = 0$$

przy warunku brzegowym obowiązującym na konturze Γ_0 przekroju Ω_0 walca płaszczyzną symetrii $x_3 = 0$,

$$(3.15) \quad q_\alpha^0(x) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) n_\beta(x_\gamma), \quad x_\gamma \in \Gamma_0.$$

Mając już rozwiązanie $s_{\alpha\beta}^0$, opisujące stan naprężenia tylko w przekroju Ω_0 , możemy podać rozwiązanie poprawne dla całego obszaru V walca w przybliżeniu z dokładnością do $O(h^2)$, korzystając z (3.12), przy czym na podstawie (3.7), (3.10) i (3.11) oraz (3.4)₂ mamy

$$(3.16)^* \quad s_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \nu \left[(\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_{\alpha\alpha} \delta_{\alpha\beta}) \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma}^0 - \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right], \quad 3s_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma\alpha}.$$

Ponadto zgodnie z (3.3)₂ w przyjętym przybliżeniu w całym obszarze walca

$$(3.17) \quad s_{33}(x) = 0, \quad x \in V.$$

Równania (3.14), (3.15) i (3.17) są takie same jak w klasycznym ujęciu PSN. Widzimy natomiast, zgodnie z (3.16)₂ że jeśli $X_{\gamma, \gamma\alpha} \neq 0$, to nie możemy przyjąć znikania składowych $s_{\alpha 3}$. Dlatego też nie możemy na ogół przyjąć warunku brzegowego

$$(3.18) \quad q_3(x) = s_{3\beta}(x) n_\beta(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

chyba, że $X_{\gamma, \gamma\alpha} = 0$, por. Dod. 1

4. ZADANIE DYNAMICZNE

Po wstawieniu rozwinięcia (1.19) do NRR (0.15)₁ i przyrównaniu do zera wyrażeń będących współczynnikami przy tych samych potęgach x_3 , otrzymujemy nieskończony układ równań różniczkowych na funkcje $s_{ij}^{(n)}(x_\gamma, t)$:

$$(4.1) \quad s_{(\alpha\gamma, \gamma\beta)}^0 + \frac{1}{2} \sum [s_{\alpha 3, \beta}^{(n)} + s_{\beta 3, \alpha}^{(n)}] (-h^{2n}) + X_{(\alpha, \beta)} = \\ = \rho \frac{1+\nu}{E} s_{\alpha\beta}^{*0} - \rho \frac{\nu}{E} \left[s_{\gamma\gamma}^{*0} + \sum s_{33}^{*(n)} (-h^{2n}) \right] \delta_{\alpha\beta}, \\ s_{\alpha\beta, \beta}^{(1)} + 3s_{\alpha 3}^{(1)} + \frac{1}{2} \sum s_{\gamma, \gamma\alpha}^{(n)} (-h^{2n}) + s_{33, \alpha}^{(1)} = \rho \frac{1+\nu}{E} \sum s_{\alpha 3}^{*(n)} (-h^{2n}),$$

*) Na możliwość zapisu wzorów (3.7), (3.10) i (3.11) w postaci (3.16)₁ zwrócił moją uwagę Prof. J. Ignaczak.

$$(4.1) \quad \sum s_{3\gamma, \gamma}^{(n)} (-h^{2n}) + 2s_{33}^{(1)} = \rho \frac{1}{E} \sum \ddot{s}_{33}^{(n)} (-h^{2n}) - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0;$$

$$s_{(\alpha\gamma, \gamma\beta)}^{(n)} + \frac{1}{2} (2n+1) [s_{\alpha 3, \beta}^{(n)} + s_{\beta 3, \alpha}^{(n)}] = \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^{(n)} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{kk}^{(n)} \delta_{\alpha\beta},$$

$$(4.2) \quad (n+1) s_{\alpha\beta, \beta}^{(n+1)} + (2n+3) (n+1) s_{\alpha 3}^{(n+1)} + \frac{1}{2} s_{3\gamma, \gamma\alpha}^{(n)} + (n+1) s_{33, \alpha}^{(n+1)} = \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha 3}^{(n)},$$

$$(2n+1) s_{3\gamma, \gamma}^{(n)} + 2(n+1) (2n+1) s_{33}^{(n+1)} = \rho \frac{1}{E} \ddot{s}_{33}^{(n)} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^{(n)}, \quad n > 0.$$

Do tego dochodzą warunki początkowe (1.4), które po obustronnym rozwinięciu w szeregi potęgowe i przyrównaniu współczynników przy tych samych potęgach x_3 , przyjmują postać

$$(4.3) \quad s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, 0) = \ddot{s}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma), \quad \dot{s}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, 0) = \dot{\ddot{s}}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma), \quad x_\gamma \in \Omega_0;$$

$$s_{ij}^{(n)}(x_\gamma, 0) = \ddot{s}_{ij}^{(n)}(x_\gamma), \quad \dot{s}_{ij}^{(n)}(x_\gamma, 0) = \dot{\ddot{s}}_{ij}^{(n)}(x_\gamma), \quad n > 0, \quad x_\gamma \in \Omega_0,$$

gdzie $\ddot{s}_{\alpha\beta}^0, \dot{\ddot{s}}_{\alpha\beta}^0, \ddot{s}_{ij}^{(n)}, \dot{\ddot{s}}_{ij}^{(n)}$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji $\ddot{s}_{ij}, \dot{\ddot{s}}_{ij}$ w szeregi potęg x_3 analogiczne do (1.19). Warunki brzegowe (1.2) po rozwinięciu przyjmują postać

$$(4.4) \quad q_\alpha^0(x_\gamma, t) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t) n_\beta(x_\gamma), \quad q_3^0(x_\gamma, t) = 0, \quad (x_\gamma, t) \in \Gamma_0 \times (0, \infty),$$

$$q_i^{(n)}(x_\gamma, t) = s_{i\beta}^{(n)}(x_\gamma, t) n_\beta(x_\gamma), \quad n > 0, \quad (x_\gamma, t) \in \Gamma_0 \times (0, \infty),$$

gdzie $q_i^0, q_i^{(n)}$ są współczynnikami rozwinięcia funkcji $q_i(x)$ w szereg potęg x_3 :

$$q_\alpha(x, t) = q_\alpha^0(x_\gamma, t) + \sum q_\alpha^{(n)}(x_\gamma, t) x^{2n},$$

$$q_3(x, t) = q_3^0(x_\gamma, t) + \sum q_3^{(n)}(x_\gamma, t) (x_3^{2n+1} - h^{2n} x_3).$$

Warunki brzegowe (1.1) są już w powyższych formułach uwzględnione.

Przypuśćmy, że tarcza jest tak cienka, że możemy odrzucić w (4.1) wszystkie wyrazy rzędu h^2 (i rzędu wyższego). Wtedy dostajemy

$$(4.5) \quad s_{(\alpha\gamma, \gamma\beta)}^0 + X_{(\alpha, \beta)} = \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^0 - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}, \quad s_{\alpha\beta, \beta}^{(1)} + 3s_{\alpha 3}^{(1)} + s_{33, \alpha}^{(1)} = 0, \quad 2s_{33}^{(1)} = -\rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0.$$

Cechą charakterystyczną układu (4.5) jest to, że równania na $s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t)$ zostały oddzielone od równań na pozostałe funkcje $s_{ij}^{(1)}(x_\gamma, t)$. Można wykazać, że równania (4.5)₁ w jednoznaczny sposób określają pole $s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t)$ przy warunkach początkowo-brzegowych (4.3)₁, (4.4)₁:

$$s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, 0) = \ddot{s}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma), \quad \dot{s}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, 0) = \dot{\ddot{s}}_{\alpha\beta}^0(x_\gamma), \quad x_\gamma \in \Omega_0;$$

$$q_\alpha^0(x_\gamma, t) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t) n_\beta(x_\gamma), \quad (x_\gamma, t) \in \Gamma \times (0, \infty), \quad (\text{por. [5]}).$$

Formalnie równania typu (4.5)₁ można otrzymać przez wstawienie założenia o PSN:

$$(4.6) \quad s_{i3}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty)$$

do NRR (0.15)_{1, t=\alpha, j=\beta} i w tym sensie można mówić o równaniach (4.5)₁ jako o równaniach PSN, mimo że w tarczy występuje składowa $s_{33}(x, t)$ dana w przybliżeniu przez wynikające z (4.5)₃ i (1.19)₃ równanie

$$(4.7) \quad s_{33}(x, t) = \frac{1}{2} \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 (h^2 - x_3^2)$$

oraz składowe $s_{\alpha 3}(x, t)$, których pierwszy współczynnik rozwinięcia zgodnie z (4.5)₂ ma postać

$$(4.8) \quad s_{\alpha 3}^{(1)} = -\frac{1}{3} [s_{\alpha\beta}^{(1)} + s_{33}^{(1)}],$$

a więc nie istnieje PSN. Jednakże składowe $s_{i3}(x, t)$ nie wpływają w przyjętym przybliżeniu na propagację pola $s_{\alpha\beta}(x, y, t)$.

Zajmijmy się teraz RB-M. Wstawiając (4.5)₃ do (2.3) dostajemy układ

$$(4.9) \quad \begin{aligned} s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, \alpha\beta}^0 + 2s_{\alpha\beta}^{(1)} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} &= \\ &= 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^0 - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 \delta_{\alpha\beta}, \\ 3s_{\alpha 3}^{(1)} - \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma\alpha} &= \frac{1}{2} \rho \frac{\nu}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma, \alpha}^0, \\ s_{\gamma\gamma}^{(1)} &= \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \left[-(1+\nu) X_{\gamma, \gamma} + \rho \frac{1}{E} (1-2\nu-\nu^2) \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 \right]. \end{aligned}$$

Celem otrzymania (4.9)₂ skorzystaliśmy z (4.9)₃. Po zwięźeniu (4.9)₁ i skorzystaniu z (4.9)₃ dostajemy następujące niejednorodne równanie falowe na $s_{\alpha\alpha}^0$:

$$(4.10) \quad s_{\gamma\gamma, \alpha\alpha}^0 + (1+\nu) X_{\gamma, \gamma} = \rho \frac{1}{E} (1-\nu^2) \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0$$

takie, jak w klasycznej teorii PSN. Skorzystaliśmy przy tym z oczywistej tożsamości $2-3\nu+\nu^3=(2+\nu)(1-\nu)^2$.

Weźmy pod uwagę układ dwu równań (4.5)_{1, \alpha=1, \beta=2} i (4.9)_{1, \alpha=1, \beta=2}:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} 2s_{(1\gamma\gamma, 2)}^0 + 2X_{(1, 2)} &= 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{12}^0, \\ s_{12, \gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 12}^0 + 2s_{12}^{(1)} + 2X_{(1, 2)} &= 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{12}^0. \end{aligned}$$

Odejmując je od siebie stronami dostajemy (por. (3.7)):

$$(4.12) \quad s_{12}^{(1)} = \frac{1}{2} \frac{\nu}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 12}^0.$$

Z kolei po odjęciu od siebie równań (4.5)_{1, \alpha=\beta=1} i (4.5)_{1, \alpha=\beta=2} dostajemy

$$(4.13) \quad s_{11, 11}^0 - s_{22, 22}^0 + X_{1, 1} - X_{2, 2} = \rho \frac{1+\nu}{E} (\ddot{s}_{11}^0 - \ddot{s}_{22}^0).$$

Zatem

$$(4.14) \quad s_{11, 11}^0 = s_{22, 22}^0 - X_{1, 1} + X_{2, 2} + \rho \frac{1+\nu}{E} (\ddot{s}_{11}^0 - \ddot{s}_{22}^0)$$

oraz na mocy (4.10)

$$(4.15) \quad s_{\gamma\gamma, 11}^0 = -s_{\gamma\gamma, 22}^0 - (1+\nu) X_{\gamma, \gamma} + \rho \frac{1}{E} (1-\nu^2) \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0.$$

Wstawiając (4.14) i (4.15) do (4.9)_{1, \alpha=1, \beta=1} dostajemy

$$(4.16) \quad s_{11}^{(1)} = -\frac{1}{2} \nu \left(\frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, 22}^0 - \frac{\rho}{E} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 + \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \right).$$

W podobny sposób dostajemy $s_{22}^{(1)}$. Ostatecznie składowe tensora $s_{\alpha\beta}^{(1)}$ możemy wyrazić jednym wzorem, analogicznym do wzoru (3.16)₁ z zagadnienia statycznego:

$$(4.17) \quad s_{\alpha\beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \nu \left[\frac{1}{1+\nu} (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_{\alpha\alpha} \delta_{\alpha\beta}) s_{\gamma\gamma}^0 - \left(\frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} - \frac{\rho}{E} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^0 \right) \delta_{\alpha\beta} \right].$$

Zatem, podobnie jak w statycznym stanie naprężenia por. ((3.12)), możemy podać dwa pierwsze wyrazy szeregu (1.19)₁:

$$(4.18) \quad s_{\alpha\beta}(x, t) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t) + s_{\alpha\beta}^{(1)}(x_\gamma, t) x_3^2,$$

gdzie pole $s_{\alpha\beta}^{(1)}$, jako dane wzorem (4.17), wyznaczone jest przez pole $s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma, t)$. Znajomość $s_{\alpha\beta}^{(1)}$ pozwala ponadto, zgodnie z równaniem (4.8) wyznaczyć $s_{\alpha 3}^{(1)}$ niezależnie od równania (4.9)₂. Mianowicie z wyrażenia (4.17) wynika, że

$$(4.19) \quad s_{\alpha\beta, \beta}^{(1)} = \frac{1}{2} \nu \left(\rho \frac{1}{E} \frac{1-2\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma, \alpha}^0 - \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma\alpha} \right),$$

a stąd i ze wzoru (4.5)₃ formuła (4.8) przyjmuje postać

$$(4.20) \quad s_{\alpha 3}^{(1)} = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{\nu}{1-\nu} \left(X_{\gamma, \gamma\alpha} + \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma, \alpha}^0 \right),$$

w oczywisty sposób równoważną wzorowi (4.9)₂. Zatem

$$(4.21) \quad s_{\alpha 3} = s_{\alpha 3}^{(1)}(x_3^2 - h^2) x_3.$$

5. UŚREDNIONY STAN NAPRĘŻENIA (USN)

Wprowadźmy operację uśrednienia względem wysokości walca:

$$(5.1) \quad \langle \dots \rangle \equiv \overline{\langle \dots \rangle} \equiv \frac{1}{2h} \int_{-h}^h dx_3 (\dots).$$

Wprowadziliśmy dwa symbole uśrednienia, których będziemy używali wymiennie zależnie od potrzeb jasności tekstu. Dzięki własnościom symetrii (1.9) poła s_{ij} zachodzą następujące wzory:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \langle s_{\alpha 3} (x, t) \rangle &= 0, & \langle s_{\alpha 3, 33} (x, t) \rangle &= 0, \\ \langle s_{11, 3} (x, t) \rangle &= 0, & \langle s_{22, 3} (x, t) \rangle &= 0, & \langle s_{33, 3} (x, t) \rangle &= 0, \\ \langle s_{\alpha\beta, 33} (x, t) \rangle &= \frac{1}{h} s_{\alpha\beta, 3} (x_\gamma, h, t), & (x, t) &\in V \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Ponadto z warunków brzegowych (1.1) wynika

$$(5.3) \quad \langle s_{i3, 3} (x, t) \rangle = 0, \quad (x, t) \in V \times (0, \infty).$$

Stosując operację (5.1) do RRR (0.8)₁, RB-M (0.18) i NRR (0.15)₁ dostajemy odpowiednio

$$(5.4) \quad \bar{s}_{\alpha\beta, \beta} + X_\alpha = 0$$

$$(5.5) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{\alpha\beta, \gamma\gamma} + \langle s_{\alpha\beta, 33} \rangle + \frac{1}{1+\nu} (\bar{s}_{\gamma\gamma} + \bar{s}_{33})_{, \alpha\beta} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} = \\ = 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} (\ddot{s}_{\gamma\gamma} + \ddot{s}_{33}) \delta_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{33, \gamma\gamma} - \langle s_{33, 33} \rangle + \frac{1}{1+\nu} \langle s_{kk, 33} \rangle + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} = \\ = \frac{\rho}{E} \frac{2-\nu-2\nu^2}{1-\nu} \ddot{s}_{33} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} \ddot{s}_{\gamma\gamma}; \end{aligned}$$

$$(5.6) \quad \bar{s}_{(\alpha\gamma, \gamma\beta)} + X_{(\alpha, \beta)} = \rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{kk} \delta_{\alpha\beta}, \quad \langle s_{33, 33} \rangle = \rho \frac{1}{E} \ddot{s}_{33} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}.$$

Stosując tę samą operację do szeregów (1.19) dostajemy

$$(5.7) \quad \begin{aligned} \bar{s}_{\alpha\beta} (x_\gamma, t) &= s_{\alpha\beta}^0 + \sum s_{\alpha\beta}^{(n)} (x_\gamma, t) \frac{1}{2n+1} h^{2n}, \\ \bar{s}_{33} (x_\gamma, t) &= \sum s_{33}^{(n)} (x_\gamma, t) \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) h^{2n} \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \bar{q}_\alpha(x_\gamma, t) &= q_\alpha^0(x_\gamma, t) + \sum q_\alpha^{(n)}(x_\gamma, t) \frac{1}{2n+1} h^{2n}, \\ (5.8) \quad \langle s_{\alpha\beta, 33}(x, t) \rangle &= \frac{1}{h} s_{\alpha\beta, 3}(x_\gamma, h, t) = \sum s_{\alpha\beta}^{(n)} \cdot 2n h^{2n-2}, \\ \langle s_{33, 33}(x, t) \rangle &= \frac{1}{h} s_{33, 3}(x_\gamma, h, t) = \sum s_{33}^{(n)} \cdot 2n h^{2n-2}. \end{aligned}$$

5.1. Statyczny UPSN

W warunkach statycznych RRR (5.4) dla pól uśrednionych mają postać identyczną z PSN. Z tego powodu pole uśrednione $\bar{s}_{\alpha\beta}$ nazywa się nieraz uogólnionym PSN. Czy ta nazwa jest uzasadniona sprawdzimy badając spełnianie RB-M przez $\bar{s}_{\alpha\beta}$; zauważmy jeszcze, że z równań (0.8)₁ oraz z założeń (1.1) i (1.3) wynika

$$(5.9) \quad s_{33, 3}(x_\gamma, \pm h) = 0,$$

skąd

$$(5.10) \quad \langle s_{33, 33}(x, t) \rangle = 0.$$

Stąd RB-M (5.5) przyjmują postać

$$\begin{aligned} (5.11) \quad \bar{s}_{\alpha\beta, \gamma\gamma} + \langle s_{\alpha\beta, 33} \rangle + \frac{1}{1+\nu} \bar{s}_{ii, \alpha\beta} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} &= 0, \\ \bar{s}_{33, \gamma\gamma} + \frac{1}{1+\nu} \langle s_{\gamma\gamma, 33} \rangle + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} &= 0. \end{aligned}$$

Po zwężeniu (5.11)₁ znajdujemy

$$(5.12) \quad \frac{2+\nu}{1+\nu} \bar{s}_{\alpha\alpha, \beta\beta} + \langle s_{\alpha\alpha, 33} \rangle + \frac{1}{1+\nu} \bar{s}_{33, \alpha\alpha} + 2 \frac{1}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} = 0.$$

Ponieważ z (5.11)₂

$$(5.13) \quad \langle s_{\alpha\alpha, 33} \rangle = -\nu \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} - (1+\nu) \bar{s}_{33, \gamma\gamma},$$

więc (5.12) przechodzi w równanie

$$(5.14) \quad \bar{s}_{\alpha\alpha, \gamma\gamma} + (1+\nu) X_{\gamma, \gamma} = \frac{\nu}{1-\nu} \bar{s}_{33, \gamma\gamma},$$

a więc uśrednione pole $\bar{s}_{\alpha\beta}$ nie spełnia równań takich, jak $s_{\alpha\beta}$ w PSN. Dopiero wstawiając do (5.14) rozwinięcie (5.7) oraz odrzucając wszystkie wyrazy rzędu h^2 i wyższego dostaniemy

$$(5.15) \quad s_{\alpha\alpha, \gamma\gamma}^0 + (1+\nu) X_{\gamma, \gamma} = 0,$$

co wskazuje na to, że tzw. uogólniony PSN nie jest wcale ogólniejszy od PSN.

5.2. Dynamiczny UPSN

Zgodnie z (1.19) mamy

$$(5.16) \quad \langle s_{33,33}(x,t) \rangle = \frac{1}{h} s_{33,33}(x_\gamma, h, t) = \sum s_{33}^{(n)} 2n h^{2n-2}.$$

Wstawiając (5.16) i (5.7) do (5.6) otrzymamy układ, który tylko po odrzuceniu wyrazów rzędu h^2 przyjmuje postać NRR dla PSN*). Lecz znów to oznacza, że uogólniony PSN nie jest, wbrew nazwie, ogólniejszy od PSN.

6. PEWNE OGÓLNE WŁASNOŚCI WYPROWADZONYCH ŁAŃCUCHÓW RÓWNAŃ

Wyprowadzone łańcuchy równań mają tę własność, że znajomość współczynników rozwinięcia $s_{ij}^{(n+1)}$, $n \geq 0$, pozwala znaleźć współczynniki $s_{ij}^{(n)}$. I tak mianowicie, w zagadnieniu statycznym zgodnie z równaniem (2.2)₁ wziętym dla pól niezależnych od czasu

$$(6.1) \quad s_{\alpha\beta}^{(n+1)} = - \left[s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^{(n)} + \frac{1}{1+\nu} (s_{\gamma\gamma}^{(n)} + s_{33}^{(n)})_{,\alpha\beta} \right] / [2(n+1)(2n+1)],$$

zgodnie z (3.1)

$$(6.2) \quad s_{33}^{(n+1)} = - \frac{1}{2(n+1)} s_{3\beta, \beta}^{(n)}$$

oraz zgodnie z (2.2)₂ wziętym znów dla pól niezależnych od czasu

$$(6.3) \quad s_{\alpha 3}^{(n+1)} = - \left[s_{\alpha 3, \gamma\gamma}^{(n)} - \frac{2(n+1)}{1+\nu} (s_{\gamma\gamma}^{(n+1)} + s_{33}^{(n+1)})_{,\alpha} \right] / [(2n+3)2(n+1)].$$

Z kolei w zagadnieniu dynamicznym zgodnie (2.2)₁

$$(6.4) \quad s_{\alpha\beta}^{(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \left[-s_{\alpha\beta, \gamma\gamma}^{(n)} - \frac{1}{1+\nu} (s_{\gamma\gamma}^{(n)} + s_{33}^{(n)})_{,\alpha\beta} + 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha\beta}^{(n)} - \frac{\rho}{E} \frac{\nu}{1-\nu} (\ddot{s}_{\gamma\gamma}^{(n)} + \ddot{s}_{33}^{(n)}) \delta_{\alpha\beta} \right],$$

zgodnie z (4.2)₃

$$(6.5) \quad s_{33}^{(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \left[-(2n+1) s_{\gamma\gamma}^{(n)} + \frac{\rho}{E} \ddot{s}_{33}^{(n)} - \rho \frac{\nu}{E} \ddot{s}_{\gamma\gamma}^{(n)} \right]$$

oraz zgodnie z (2.2)₂

$$(6.6) \quad s_{\alpha 3}^{(n+1)} = \frac{1}{(2n+3)2(n+1)} \left[-s_{\alpha 3, \gamma\gamma}^{(n)} - \frac{2(n+1)}{1+\nu} (s_{\gamma\gamma}^{(n+1)} + s_{33}^{(n+1)})_{,\alpha} + 2\rho \frac{1+\nu}{E} \ddot{s}_{\alpha 3}^{(n)} \right].$$

Z powyższego wynika, że mając pierwsze wyrazy rozwinięcia $s_{\alpha\beta}^0$, $s_{\alpha 3}^{(1)}$, $s_{33}^{(1)}$ i stosując schematy równań (6.1)–(6.3) w zagadnieniu statycznym lub (6.4)–(6.6) w za-

*) równania dynamicznego PSN typu (4.5)₁ wyprowadziliśmy z trójwymiarowych NRR (15)₁ też w pracy [9], aczkolwiek w mniej bezpośredni i ogólny sposób.

gadnieniu dynamicznym, możemy znaleźć zależność przestrzenną pola naprężeń s_{ij} zgodnie z rozwinięciem (1.19). Całe zadanie sprowadza się więc do znalezienia pierwszych wyrazów rozwinięcia. Główna trudność polega tu na tym, że równania (2.1), (3.1), (4.1) mające prowadzić do znalezienia $s_{\alpha\beta}^0, s_{\alpha 3}^{(1)}, s_{33}^{(1)}$ zawierają prócz tych nieznanymi funkcji jeszcze (oczywiście też nieznanymi) sumy współczynników rozwinięcia wyższych rzędów.

Tak więc znalezienie $s_{\alpha\beta}^0, s_{\alpha 3}^{(1)}, s_{33}^{(1)}$ wymaga nie tylko rozwiązania problemu, brzegowego (lub brzegowo-początkowego) dla układu równań różniczkowych, ale ponadto opracowania metody pozwalającej na uwzględnienie tych sum wyrazów wyższych rzędów. Można zaproponować następującą procedurę iteracyjną: z równań (3.3) i (3.4) w zagadnieniu statycznym lub (4.5) w zagadnieniu dynamicznym znajdujemy pierwsze przybliżenie pierwszych wyrazów rozwinięcia. Na podstawie tego przybliżenia znajdujemy pierwsze przybliżenie wyrazów rozwinięcia wyższych rzędów, które po wstawieniu do równań (2.1), (3.1'), (4.1) i rozwiązaniu tych równań, pozwalają znaleźć drugie przybliżenie wyrazów $s_{\alpha\beta}^0, s_{\alpha 3}^{(1)}, s_{33}^{(1)}$ itd. Sądzymy, że postępując w ten sposób, możemy znaleźć współczynniki rozwinięcia z dowolną dokładnością, przynajmniej dla niewielkich grubości tarczy $2h$. Sprawa zbieżności takiej procedury wymaga jednak oddzielnego rozpatrzenia.

ZAKOŃCZENIE

Powyżej przeprowadziliśmy klasyfikację pola naprężeń i przyczyn wywołujących to pole ze względu na symetrię. Posługując się metodą rozwinięcia w szereg potęgowy, podaliśmy całą «hierarchię» równań naprężeniowych zarówno dla statycznego jak i dynamicznego problemu tarczowego. Pokazaliśmy następnie, że po przejściu do bardzo cienkich tarcz składowe tensora naprężenia równoległe do płaszczyzny tarczy spełniają klasyczne równania płaskiego stanu naprężenia niezależnie od pozostałych składowych.

PODZIĘKOWANIE

Dziękuję serdecznie Panu Profesorowi J. IGNACZAKOWI za pożyteczne dyskusje i życzliwą krytykę rękopisu.

DODATEK 1

Wstawiając (1.12) do RB-M (0.5)_{2, i=j=3} i korzystając z (1.3) otrzymujemy

$$(A1) \quad s_{\gamma\gamma, 33} + \nu \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} = 0,$$

skąd po dwukrotnym scałkowaniu względem x_3

$$(A2) \quad s_{\gamma\gamma}(x) = -\nu \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{\gamma, \gamma} \frac{1}{2} x_3^2 + s_{\gamma\gamma}^1(x_3) x_3 + s_{\gamma\gamma}^0(x_3),$$

gdzie $s_{\gamma\gamma}^1, s_{\gamma\gamma}^0$ są to pewne, nieznanne jeszcze funkcje x_ε . Z własności symetrii wynika, że $s_{\gamma\gamma}^1(x_\varepsilon) = 0$, zatem

$$(A3) \quad s_{\gamma\gamma}(x) = -\nu \frac{1+\nu}{1-\nu} X_{\gamma,\gamma} \frac{1}{2} x_3^2 + s_{\gamma\gamma}^0(x_\varepsilon), \quad x \in V.$$

Wstawiając (A3) do RB-M (0.5)_{2, i=\alpha, j=3} otrzymujemy równania, w których składowe $s_{\alpha 3}$ są oddzielone od pozostałych składowych pola

$$s_{\alpha 3, kk} = \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma,\gamma\alpha} x_3.$$

Z równania tego nie można ściśle wyznaczyć $s_{\alpha 3}$, gdyż na brzegu znamy tylko siły

$$(A4) \quad q_3(x) = s_{\alpha 3}(x) n_\alpha(x) = 0, \quad x \in \Gamma,$$

a nie wartości $s_{\alpha 3}(x)$, $x \in \Gamma$. Jeśli jednak weźmiemy pod uwagę to, że wysokość walca $2h$ jest mała, a stąd wpływ wartości $s_{\alpha 3}(x)$, $x \in \Gamma$ nie może sięgać zbyt daleko od powierzchni Γ , to w dalszej odległości od brzegu istotny staje się tylko warunek $s_{\alpha 3}(x) = 0$, $x \in \Omega_\alpha$ tym bardziej, że funkcje $s_{\alpha 3}$ są funkcjami gładkimi, mającymi drugie pochodne. Jeśli więc pominiemy wpływ wartości $s_{\alpha 3}(x)$, $x \in \Gamma$ i jeśli

$$X_{\gamma,\gamma\alpha\beta\beta}(x_\varepsilon) = 0, \quad x_\varepsilon \in \Omega,$$

to jak łatwo sprawdzić

$$s_{\alpha 3} = \frac{1}{6} \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma,\gamma\alpha} (x_3^2 - h^2) x_3.$$

Przy założeniu mocniejszym

$$X_{\gamma,\gamma\alpha} = 0,$$

ale spełnionym przez najczęściej spotykane siły masowe: jednorodne $X_\alpha = C_{1\alpha}$, dwuwymiarowego ciężenia $X_\alpha = C_{2\alpha} x_{\alpha i}(x_\gamma, x_\gamma)$, odśrodkowe $X_\alpha = C_{3\alpha} x_\alpha$, gdzie $C_{i\alpha}$ są stałe, niezależnie od x , mamy

$$s_{\alpha 3}(x) = 0, \quad x \in V.$$

Widzimy więc, że w walcu o małej wysokości obciążonym tylko na pobocznicę panuje w dobrym przybliżeniu PSN:

$$s_{i3}(x) = 0, \quad x \in V.$$

DODATEK 2

RRR i RB-M, (0.5), przy założeniu PSN i kształtu sił masowych (1.3), przyjmują postać

$$(B1) \quad s_{\alpha\beta, \beta} + X_\alpha = 0,$$

$$(B2) \quad s_{\alpha\beta, kk} + \frac{1}{1+\nu} s_{\gamma\gamma, \alpha\beta} + 2X_{(\alpha, \beta)} + \frac{\nu}{1-\nu} X_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} = 0.$$

Po zwięźeniu ($\alpha = \beta$) i skorzystaniu z (A1), równanie (B2) ma postać

$$(B3) \quad s_{\alpha\alpha, \gamma\gamma} + (1 + \nu) X_{\gamma, \gamma} = 0.$$

Z równań (B1) wynika, że

$$(B4) \quad s_{11, 11} = s_{22, 22} - X_{1, 1} - X_{2, 2},$$

z równania zaś (B3)

$$(B5) \quad s_{\gamma\gamma, 11} = -s_{\gamma\gamma, 22} - (1 + \nu) X_{\gamma, \gamma}.$$

Wstawiając (B4) i (B5) do (B2) $_{\alpha=1, \beta=1}$ otrzymujemy

$$(B6) \quad s_{11, 33} = -\frac{\nu}{1 + \nu} s_{\gamma\gamma, 22} - \frac{\nu}{1 - \nu} X_{\gamma, \gamma}.$$

W podobny sposób znajdziemy

$$(B7) \quad s_{22, 33} = -\frac{\nu}{1 + \nu} s_{\gamma\gamma, 11} - \frac{\nu}{1 - \nu} X_{\gamma, \gamma}.$$

Z (B1) wynika też równość

$$(B8) \quad s_{12, \gamma\gamma} + s_{\gamma\gamma, 12} + 2X_{(1, 2)} = 0,$$

która po odjęciu od (B2) $_{\alpha=1, \beta=2}$ daje

$$(B9) \quad s_{12, 33} = \frac{\nu}{1 + \nu} s_{\gamma\gamma, 12}.$$

Wzory (B6), (B7), (B9) możemy napisać łącznie:

$$(B10) \quad s_{\alpha\beta, 33} = \frac{\nu}{1 + \nu} (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_{\alpha\beta}) s_{\gamma\gamma} - \frac{\nu}{1 - \nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta}.$$

Zważywszy na (A3), znajdujemy po dwukrotnym scałkowaniu i skorzystaniu z symetrii pola $s_{\alpha\beta}$ względem płaszczyzny $x_3 = 0$ następującą zależność $s_{\alpha\beta}$ od x_3 :

$$(B11) \quad s_{\alpha\beta}(x) = s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) + \left\{ \frac{\nu}{1 + \nu} (\partial_\alpha \partial_\beta - \partial_{\alpha\beta}) \left[s_{\gamma\gamma}^0(x_\gamma) - \nu \frac{1 + \nu}{1 - \nu} X_{\gamma, \gamma}(x_\gamma) \frac{1}{12} x_3^2 \right] - \frac{\nu}{1 - \nu} X_{\gamma, \gamma} \delta_{\alpha\beta} \right\} \frac{1}{2} x_3^2,$$

gdzie

$$s_{\alpha\beta}^0(x_\gamma) = s_{\alpha\beta}(x_\gamma, x_3 = 0).$$

Wzór (B11) jest uogólnieniem znanego wyniku Clebscha, [10] lub [6, § 84] na wypadek niejednorodnych sił masowych; po odrzuceniu wyrazów rzędu h^4 zgodny jest on ze wzorem (3.16), do którego prowadzi nasza teoria. Wstawiając (B11) do (B1) otrzymujemy równanie na $s_{\alpha\beta}^0$:

$$s_{\alpha\beta, \beta}^0 + X_\alpha - \frac{\nu}{1 - \nu} X_{\beta, \beta\alpha} \frac{1}{2} x_3^2 = 0.$$

Jest to równanie typu RRR (B1), ale z inną siłą masową.

LITERATURA CZTOWANA W TEKŚCIE

1. W. NOWACKI, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
2. J. IGNACZAK, Arch. Mech. Stos., **15**, 225, 1963.
3. R. WOJNAR, Bull. Acad. Polon. Sci. Série Sci. Techn., **22**, 533, 1974.
4. A. KUSKE, G. ROBERTSON, *Photoelastic stress analysis*, Wiley, London 1974; R. DOROSZKIEWICZ, *Elastoptyka*, PWN, Warszawa, 1975; J. LIETZ, Praca doktorska, IPPT PAN, 1971.
5. J. IGNACZAK, Arch. Mech. Stos., **15**, 691, 1963.
6. S. TIMOSHENKO, J. GOODIER, *Theory of elasticity*, McGraw-Hill, New York 1951, tłum. polskie „Teoria sprężystości”, Arkady, Warszawa 1962.
7. R. WOJNAR, Arch. Mech. Stos., **26**, 747, 1974.
8. R. WOJNAR, Arch. Mech. Stos., **28**, 237, 1976.
9. R. WOJNAR, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **23**, 453, 1975.
10. A. CLEBSH, *Theorie der Elasticität fester Körper*, B. G. Teubner, Leipzig 1862.

Резюме

O WYWOĐE TEORII TONKICH UPRUGICH DISKOV IZ TREXMERNOJ TEORII UPRUGOSTI

Приводим вывод уравнений тонких упругих дисков из трехмерной линейной теории упругости. Метод вывода заключается в разложении функций, выступающих в трехмерных уравнениях теории упругости, в ряды по переменной x_3 , которая является координатой нормальной к плоскости диска, а затем в удержании членов с наименьшей степенью x_3 . Во введении приводим классификацию упругих, статических и динамических полей из-за симметрии по отношению к переменной x_3 . В § 1 приводим предположение о граничных и начальных условиях, а также о массовых силах, приложенных к диску. Указываем на непоследовательности принимаемых обыкновенно теорий плоского напряженного состояния. Делаем предположения о разложении составляющих напряжения в ряды.

В § 2 приводим, вытекающие из уравнений типа Бельтрами-Мичелла, соотношения между коэффициентами этих рядов. В § 3 выводим уравнения теории упругости тонкого диска для статической задачи, уравнения (3.14)—(3.15), а в § 4 для динамической задачи, уравнения (4.5), (4.10). Кроме этого приводим поправку к составляющим поля напряжений диска для статических полей, уравнения (3.16), и для динамических, уравнения (4.17), (4.20). В § 5 обсуждаем обобщенное плоское напряженное состояние, статическое и динамическое. Показывает, что условия, в которых выступает обобщенное плоское напряженное состояние, не являются в общем более общими чем условия, при которых выступает плоское напряженное состояние.

В § 6 делаем некоторые рассуждения о возможности нахождения высших поправок для поля напряжений, выступающего в диске. В приложении 1 показываем, что в статическом случае граничные условия совместно с одним из уравнений Бельтрами-Мичелла вызывают, в хорошем приближении, плоское напряженное состояние в диске. В приложении 2 обобщаем формулу Клебша на случай неоднородных массовых сил, уравнения (B11). Показываем, что с точностью до членов порядка h^4 , где $2h$ обозначает толщину диска, совпадает она с формулой (3.16) полученной путем разложений.

SUMMARY

DERIVATION OF THE THEORY OF THIN ELASTIC DISKS FROM THREE-DIMENSIONAL THEORY OF ELASTICITY

We derive equations for this elastic disks from three-dimensional-linear theory of elasticity. Method of derivation consists in developing of appropriate functions (appearing in the equations of 3-dim. elasticity) in series of variable x_3 — being the coordinate in direction normal to plane of

disk, with origin in middle plane of disk, and keeping only the expressions in lowest order of x_3 .

In introduction we classify the stress elastic fields, both statical and dynamical, in respect of symmetry in x_3 -direction.

In Sect. 1 we make assumption about the boundary and initial conditions as well about body forces applied to the disk. We point out inconsistencies of accepted theories of plane stress and make the assumption about development stress components in the series.

In Sect. 2 we give the equations, resulting from Beltrami-Michell Eqs., governing the coefficients of this series.

In Sect. 3 we derive the equations of elasticity of thin disk for statical case, Eqs. (3.14)–(3.15), and in Sect. 4 for dynamical case, Eqs. (4.5)–(4.10). At opportunity, we obtain the correction for component of stress field in disk, Eqs. (3.16) — for statical case, and Eqs. (4.17), (4.20) — for dynamical case.

In Sect. 5 we consider generalized plane state of stress, statical — Sect. 5.1 and dynamical — Sect. 5.2. We show that conditions in which generalized plane state of stress occurs are at all no more general as those, which are necessary for plane state of stress.

In Sect. 6 we make some considerations about the possibility of finding of higher corrections for stress field existing in disk.

In Appendix 1 we show that boundary conditions together with one of the Beltrami-Michell for statical case equations, implicate in good approximation, the plane state of stress in disk.

In Appendix 2 we generalize Clebsch's formule for the case of nonhomogeneous body forces, Eqs. (B 11). We show that, with exactness to expressions of order h^4 , ($2h$ — thickness of disk), it agrees with the formula (3.16) obtained by the method of expansion.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 24 września 1976 r.
