

STAN KRYTYCZNY SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEJ POWŁOKI W KSZTAŁCIE STOŻKA ŚCIEŻEGO (*)

JERZY ZIELNICA (POZNAŃ)

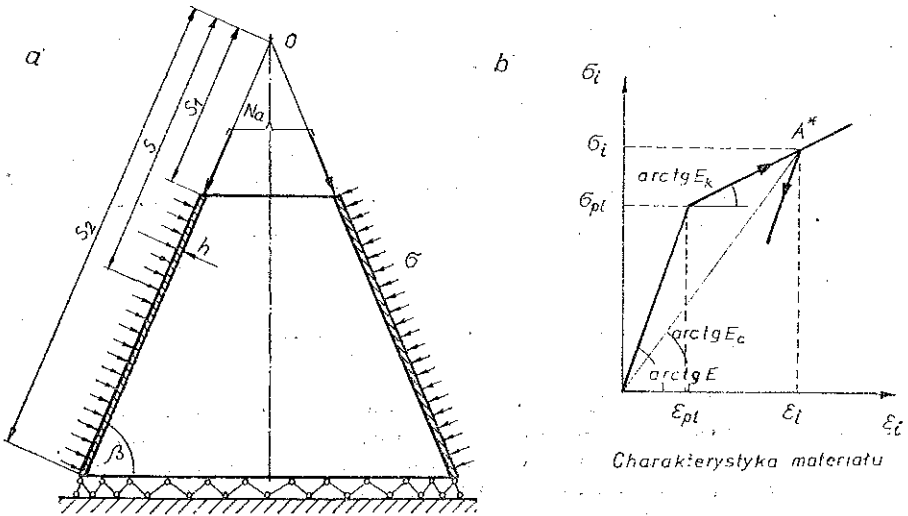
W pracy przedstawiono metodę wyznaczania obciążeń krytycznych cienkiej powłoki w kształcie stożka ściętego obciążonej równomiernym ciśnieniem, działającym na powierzchnię boczną i siłą podłużną skierowaną wzdłuż tworzącej. Zakłada się, że materiał powłoki i wymiary geometryczne są tak dobrane, że utrata stateczności może nastąpić po przekroczeniu granicy sprężystości w błonowym przedkrytycznym stanie naprężeń.

Wykorzystuje się liniowe geometryczne równania stateczności powłoki z uwzględnieniem ściśliwości materiału i przyjęciem charakterystyki umocnienia $\sigma_t = \sigma_t(\epsilon_t)$ typu liniowego. Oparto się na związkach fizycznych zarówno teorii deformacyjnej jak i teorii plastycznego płynięcia. Dla rozwiązania wyjściowego układu równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu zastosowano metodę ortogonalizacyjną. Wprowadzenie badania warunku na moduł sieciowy umożliwia analizę powłok sprężystych, sprężysto-plastycznych i całkowicie plastycznych. Analiza numeryczna zagadnienia umożliwia porównanie dwóch podstawowych teorii plastyczności zarówno dla materiału nieściśliwego jak i ściśliwego.

1. WPROWADZENIE

W pracach [10 i 11] przedstawiono rozwiązanie zagadnienia wyboczenia poza granicę sprężystości powłoki stożkowej obciążonej wszechstronnym równomiernym ciśnieniem hydrostatycznym przy założeniu charakterystyki umocnienia materiału typu potęgowego. Otrzymane w tych pracach równania wyjściowe posiadały rozbudowaną strukturę, w związku z tym nie podano ich w postaci zamkniętej; stosowanie ich do obliczania obciążeń krytycznych było ograniczone do przypadków, gdy cała powłoka przed utratą stateczności przeszła w stan plastyczny. W pracy niniejszej postawiono sobie za cel przeanalizowanie zagadnienia przy bardziej ogólnych założeniach dotyczących obciążenia powłoki; przyjęto liniową charakterystykę umocnienia materiału [12] (rys. 1b), a przez całkowanie przez części uniknie to konieczności różniczkowania współczynników macierzy sztywności (które ze względu na niejednorodny stan naprężeń w stanie przedkrytycznym zależą od współrzędnych geometrycznych), przez co równania wyjściowe przyjęły zwartą postać. Zagadnienie zostanie rozwiązane według koncepcji wzrastającego obciążenia dla obydwu podstawowych teorii plastyczności (Nádai'a-Hencky'ego i Prandtl'a-Reussa), przy czym przez wprowadzenie badania warunku na moduł sieciowy uzyskane wzory pozwolą

(*) Podstawowe tezy pracy zostały przedstawione na drugiej Krajowej Konferencji «Konstrukcje Powłokowe — Teoria i Zastosowanie», Goluń, 6-10.XI.1978.



Rys. 1

na obliczanie obciążeń krytycznych dla powłoki całkowicie lub częściowo uplastycznionej, a nawet dla powłoki znajdującej się przed wyboczeniem w stanie sprężystym.

Przy obliczaniu obciążeń krytycznych powłok poza granicą sprężystości — do analizy można wykorzystać dwie koncepcje (podobnie jak przy analizie stateczności prętów ściskanych). W pierwszej z nich, tzw. koncepcji ustalonego obciążenia zakładamy, że po wyboczeniu obciążenie nie ulega zmianie, a w chwili utraty stateczności natychmiast powstają strefy lokalnych obciążeń (procesów biernych). Koncepcja druga dopuszcza wzrastanie obciążenia i rozwijania się stref procesów biernych dopiero w wyniku powstania pozakrytycznych ugięć. W prętach podobne podejścia były przedstawione przez Engessera i Kármána oraz Shanleya. Uwzględnienie w obliczeniach lokalnych odciążeń jest możliwe (bardziej wiernie odzwierciedla postać wyboczenia powłoki) lecz znacznie komplikuje rozwiązanie problemu — głównie ze względu na trudności ustalenia granicy rozdziału obszarów czynno-biernych i to zarówno wzdłuż grubości powłoki, jak też w odniesieniu do jej powierzchni podstawowej. Związki fizyczne w strefie sprężysto-plastycznej są sprzężone; uzyskuje się również nieliniowe równania różniczkowe problemu, nawet pomimo założenia geometrycznej liniowości. Trudność tę niejednokrotnie można ominąć; jeżeli przed utratą stateczności odkształcenia plastyczne w powłoce nie są duże w porównaniu ze sprężystymi, to można również zastosować założenie upraszczające ILIUSZYNA [9] o zerowaniu się wariacji sił wzdłużnych.

Zasadniczą cechą stosowanej w niniejszej pracy koncepcji wzrastającego obciążenia jest z praktycznego punktu widzenia jej prostota. Pozwala ona na znaczne uproszczenie równań i ich rozwiązań, a ponadto, jak stwierdzono przy badaniu stateczności powłok walcowych [1], tego typu podejście wraz z zastosowaniem teorii deformacyjnej daje dobrą zgodność z danymi eksperymentalnymi. Porównanie wyników obliczeń obciążeń krytycznych, z uwzględnieniem i bez uwzględnienia

odciążenia, jak stwierdzono dla powłok walcowych, daje różnice nieznaczne, sięgające 10%.

Wzrost zainteresowania problemami sprężysto plastycznej stateczności powłok, jaki się daje zaobserwować w ostatnich latach, wynika z faktu, że znajomość sprężystego zachowania się powłoki nie stanowi obecnie dostatecznej informacji dla inżyniera podejmującego decyzje projektowe. Ze względu na efektywność pracy konstrukcji oraz na ekonomię projektu bardzo ważna jest znajomość przejścia pomiędzy końcem czysto sprężystej fazy pracy powłoki a stanem wyczerpania się jej nośności. Informacje takie uzyskuje się właśnie na drodze analizy sprężysto-plastycznej. Trudności, na jakie napotyka się przy analizie stateczności powłok sprężysto-plastycznych, są związane głównie z rozwiązaniem uzyskanych układów równań różniczkowych, toteż w obecnej chwili daje się zauważyć coraz szerzej zastosowanie metod bezpośredniego całkowania numerycznego. Tutaj należy wymienić pracę Z. WASZCZYSZYNA [9], w której autor opracował konsekwentną teorię i metodę obliczania powłok obrotowo symetrycznych z uwzględnieniem zmian geometrii konstrukcji. Do zagadnień analizy stateczności powłok plastycznych szeroko wkracza również metoda elementów skończonych [3 i 4]. Z prac ostatnich należy wymienić pracę RAMSEYA [8], gdzie autor rozważał powłokę stożkową ściskaną osiowo; zastosował metodę małego parametru, przeprowadził również weryfikację doświadczalną uzyskanych wyników. Przegląd ważniejszych prac związanych tematycznie z niniejszym opracowaniem można znaleźć w publikacjach [1, 5, 10 i 11].

W pracy niniejszej obliczymy obciążenie krytyczne powłoki wykonanej z materiału izotropowego ściśliwego ze wzmocnieniem. Nie wprowadza się zasadniczych ograniczeń odnośnie parametrów fizycznych czy też geometrycznych (jak np. w pracy TRAPEZINA [7]). Zakładamy, że obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Lova (w powłoce panuje płaski stan naprężenia, może być stosowana hipoteza niewydłużalnego odcinka normalnego) i zajmimy się dowolną formą utraty stateczności. Rozważać będziemy aktywny proces obciążenia, to znaczy że nie wystąpi zewnętrzne lub wewnętrzne odciążenie.

2. RÓWNANIA STATECZNOŚCI I ZWIĄZKI FIZYCZNE

Przedmiotem analizy jest cienkościenna powłoka w kształcie stożka ściętego (rys. 7), obciążona zewnętrznym ciśnieniem bocznym o intensywności σ oraz siłą podłużną N_a rozłożoną równomiernie na mniejszej podstawie, skierowaną wzdłuż tworzącej. Zakładamy, że przed utratą stateczności istnieje w powłoce bezmomentowy stan naprężeń o siłach wewnętrznych: N_{10} , N_{20} , T_{10} , T_{20} . Wymiary powłoki są takie, że pod wpływem obciążenia zewnętrznego przy aktywnym i proporcjonalnym narastaniu składowych tensora naprężeń wyboczenie może nastąpić po osiągnięciu granicy sprężystości materiału.

Równania stateczności powłoki stożkowej zostały wyprowadzone w pracy [10]. Postać ich jest następująca:

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \sin \beta + \frac{\partial^2 \delta M_s}{\partial s^2} s \cos \beta + 2 \frac{\partial \delta M_s}{\partial s} \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \delta M_\theta}{\partial \theta^2} - \\
 & - \frac{\partial \delta M_\theta}{\partial s} \cos \beta + \frac{2}{s} \frac{\partial \delta M_{s\theta}}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{s\theta}}{\partial s \partial \theta} + \left(\frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right. \\
 & \left. + \cos \beta \frac{\partial w}{\partial s} \right) N_{20} + s \cos \beta \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) T_{10} = 0, \\
 & \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \beta - \frac{\partial^2 \delta \gamma_{12}}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial \delta \gamma_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_2}{\partial s^2} s \cos \beta + \frac{1}{s \cos \beta} \times \\
 & \times \frac{\partial^2 \delta \varepsilon_1}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \delta \varepsilon_2}{\partial s} \cos \beta - \frac{\partial \delta \varepsilon_1}{\partial s} \cos \beta = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie Φ , w oznaczają odpowiednio funkcję sił i funkcję ugięcia, δM_s , δM_θ , $\delta M_{s\theta}$, δN_s , δN_θ , $\delta N_{s\theta}$ wariacje momentów i sił w powłoce wywołane utratą stateczności oraz $\delta \varepsilon_s$, $\delta \varepsilon_\theta$, $\delta \gamma_{s\theta}$ wariacje odkształceń w powłoce.

Równanie (2.1)₁ wynika z warunków równowagi powłoki, a (2.1)₂ jest równaniem nierozdzielności odkształceń.

Opiaramy się na hipotezie Kirchhoffa-Lova, zgodnie z którą

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \delta \varepsilon_s = \delta \varepsilon_1 - x_3 \delta \kappa_1, \\
 & \delta \varepsilon_\theta = \delta \varepsilon_2 - x_3 \delta \kappa_2, \\
 & \delta \gamma_{s\theta} = \delta \gamma_{12} - x_3 \delta \kappa_{12}.
 \end{aligned}$$

Tutaj $\delta \varepsilon_1$, $\delta \varepsilon_2$, $\delta \gamma_{12}$ oznaczają odpowiednio wariacje wydłużeń w powierzchni podstawowej; $\delta \kappa_1$, $\delta \kappa_2$, $\delta \kappa_{12}$ zmiany krzywizn; x_3 jest współrzędną normalną do powierzchni podstawowej, przy czym $\frac{h}{2} \leq x_3 \leq \frac{h}{2}$.

Wariacje krzywizn powłoki określają wzory

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad & \delta \kappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \delta \kappa_2 = \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\sin \beta}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\
 & \delta \kappa_{12} = \frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \cos \beta} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\operatorname{tg} \beta}{2s} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s^2} \operatorname{tg} \beta.
 \end{aligned}$$

Z kolei należy wyznaczyć siły i momenty w powłoce, jakie powstaną w wyniku utraty stateczności:

$$(2.4) \quad \delta N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} dx_3, \quad \delta M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \delta \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3.$$

W tym celu posłużymy się obydwooma podstawowymi teoriami plastyczności. Zgodnie z teorią deformacyjną Nádai'a-Hencky'ego mamy [12]

$$(2.5) \quad \sigma_{ij} = 2m(\varepsilon_i) \varepsilon_{ij} + [3K - 2m(\varepsilon_i)] \varepsilon_m \delta_{ij}.$$

Związki fizyczne teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa mają postać

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \delta \varepsilon_s &= \frac{1}{E} (\delta \sigma_s - \nu \delta \sigma_\theta) + \frac{1}{E} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right) \left(\sigma_s - \frac{1}{2} \sigma_\theta \right) \frac{\delta \sigma_i}{\sigma_i}, & \begin{matrix} \rightarrow \\ (s, \theta) \\ \leftarrow \end{matrix} \\ \delta \gamma_{s\theta} &= \frac{1}{G} \delta \tau_{s\theta} + \frac{3}{E} \left(\frac{E}{E_k} - 1 \right) \tau_{s\theta} \frac{\delta \sigma_i}{\sigma_i}, \end{aligned}$$

gdzie $\sigma_i = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_s \sigma_\theta + 3\tau_{s\theta}^2}$ oznacza intensywność naprężeń.

Związki (2.5) należy rozwiązać i wykonać wariacje składowych tensora naprężeń, a wzory (2.6) odwracamy ze względu na wariacje naprężeń. Po podstawieniu do (2.4) i scałkowaniu wzdłuż grubości powłoki otrzymujemy wzory, które dla skrócenia zapisu podajemy w postaci macierzowej

$$(2.7) \quad \begin{bmatrix} \delta N_s \\ \delta N_\theta \\ \delta N_{s\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & -E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & -E_{23} \\ -E_{31} & -E_{32} & E_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \gamma_{12} \end{bmatrix},$$

$$(2.8) \quad \begin{bmatrix} \delta M_s \\ \delta M_\theta \\ \delta M_{s\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D_{11} & -D_{12} & D_{13} \\ -D_{21} & -D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & -D_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta \kappa_1 \\ \delta \kappa_2 \\ \delta \kappa_{12} \end{bmatrix}.$$

Współczynniki E_{ij} i D_i , według koncepcji wzrastającego obciążenia wynikają oczywiście z przekształceń i całkowania zgodnie z (2.4). Zależą od przyjętej teorii plastyczności, mechanicznych własności materiału w stanie sprężystym i plastycznym i od stanu naprężeń w powłoce przed utratą stateczności. Ponieważ wartości ich podano w pracy [10] dla teorii deformacyjnej i w [11] dla teorii plastycznego płynięcia, przeto tutaj ich ogólnej postaci nie będziemy przytaczać, podamy jedynie ich postać po ustaleniu charakterystyki materiału i określeniu naprężeń w bezmomentowym stanie przedkrytycznym dla przyjętego typu obciążenia powłoki.

Ponieważ do równania nierozdzielności (2.1)₂ należy podstawić wariacje odkształceń, więc układ równań (2.7) należy odwrócić ze względu na odkształcenia, tzn. przedstawić w postaci

$$(2.9) \quad \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_1 \\ \delta \varepsilon_2 \\ \delta \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{E}_{13} \\ \bar{E}_{21} & \bar{E}_{22} & \bar{E}_{23} \\ \bar{E}_{31} & \bar{E}_{32} & \bar{E}_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \delta N_s \\ \delta N_\theta \\ \delta N_{s\theta} \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.10) \quad \bar{E}_{ij} = \frac{\min E_{ij}}{\det E_{ij}}.$$

Wyrażenia (2.8) i (2.9) należy wstawić do równania równowagi (2.1)₁ i równania nierozdzielności odkształceń (2.1)₂, podstawiając również do (2.8) wariacje krzy-

wizn wyrażone przez przemieszczenia (2.3) (pomijając jako niewielkie wyrazy zawierające przemieszczenie v); natomiast do (2.9) wstawiamy wariacje sił wyrażone za pomocą funkcji sił:

$$(2.11) \quad \delta N_s = \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial \Phi}{\partial s}, \quad \delta N_\theta = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2},$$

$$\delta N_{s\theta} = -\frac{1}{s \cos \beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s \partial \Theta} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta},$$

Ze względu na to, że rozpatrujemy powłokę obciążoną siłami podłużnymi i poprzecznymi, w stanie przedkrytycznym brak sił i naprężeń tnących. Stąd mamy $E_{\alpha 3} = E_{3\alpha} = D_{\alpha 3} = D_{3\alpha} = 0$. Znikają również pochodne współczynników E_{ij} i D_{ij} względem współrzędnej θ . (Z powodu kołowej symetrii obciążenia). Mając na uwadze, że w powłoce stożkowej panuje niejednorodny rozkład naprężeń — stwierdzimy, że \bar{E}_{ij} i \bar{D}_{ij} są funkcjami współrzędnej s i otrzymamy po uporządkowaniu

$$(2.12) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} \sin \beta - D_{11} s \cos \beta \frac{\partial^4 w}{\partial s^4} - 2 \cos \beta (s D_{11})_s \frac{\partial^3 w}{\partial s^3} +$$

$$+ \left[- \left((s D_{11})_{ss} + D_{12,s} + 2 D_{11,s} - \frac{1}{s} D_{22} \right) + N_{10} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} +$$

$$+ \cos \beta \left(-D_{12,ss} + \frac{1}{s} D_{22,s} - \frac{1}{s^2} D_{22} + N_{20} \right) \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{2}{s \cos \beta} \times$$

$$\times (D_{33} - D_{21}) \frac{\partial^4 w}{\partial s^2 \partial \Theta^2} + \frac{2}{s \cos \beta} \left[\frac{1}{s} (D_{12} - D_{33}) + D_{33,s} - D_{12,s} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial^3 w}{\partial s \partial \Theta^2} + \frac{1}{s \cos \beta} \left[-D_{12,ss} + \frac{1}{s} (2 D_{12,s} + D_{22,s} - 2 D_{33,s}) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{s^2} (D_{12} + D_{22} - D_{33}) - N_{20} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \Theta^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \sin \beta + \bar{E}_{22} s \cos \beta \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^4} + \frac{1}{s \cos \beta} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{12}) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial s^2 \partial \Theta^2} + \frac{1}{s^3 \cos^3 \beta} \times$$

$$\times \bar{E}_{11} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \Theta^4} + \frac{1}{s \cos \beta} \left(\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} - \frac{2}{s} \bar{E}_{12} - \frac{1}{s} \bar{E}_{33} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial s \partial \Theta^2} +$$

$$+ 2 \cos \beta (s \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{22}) + \frac{1}{s \cos \beta} \left[\bar{E}_{21,ss} - \frac{1}{s} (\bar{E}_{33,s} + 2 \bar{E}_{21,s} + \bar{E}_{11,s}) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s^2} (\bar{E}_{33} + 2 \bar{E}_{21} + 2 \bar{E}_{11}) \right] \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \Theta^2} + \cos \beta \left(s \bar{E}_{22,ss} + 2 \bar{E}_{22,s} + \bar{E}_{21,s} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{s} \bar{E}_{11} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial s^2} + \cos \beta \left(\bar{E}_{12,ss} - \frac{1}{s} \bar{E}_{11,s} + \frac{1}{s^2} \bar{E}_{11} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial s} = 0,$$

gdzie przecinkiem oznaczono różniczkowanie względem zmiennej s .

3. SIŁY BŁONOWEGO STANU NAPRZEŃ I CHARAKTERYSTYKA MATERIAŁU

Przyjmujemy charakterystykę materiału typu sprężysto plastycznego z umocnieniem liniowym (rys. 1b), dla której

$$(3.1) \quad \varepsilon_i = \frac{\sigma_i + \sigma_{pl} \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right)}{E_k} \quad \text{dla} \quad \varepsilon_i > \varepsilon_{pl}.$$

Dla takiej charakterystyki w zakresie plastycznym moduł styczny E_k jest stały, natomiast moduł sieciowy $E_c = \sigma_i / \varepsilon_i$ jest zmienny i określony według wzoru (3.1).

Siły wewnętrzne i naprężenia odpowiadające przyjętemu rodzajowi obciążenia (rys. 1a) w stanie błonowym określają wzory

$$(3.2) \quad N_{10} = \sigma_s h = \frac{\sigma}{2 \operatorname{tg} \beta} \left(\frac{s_1^2}{s} - s \right) - N_a \frac{s_1}{s},$$

$$N_{20} = \sigma_\theta h = -\frac{\sigma s}{\operatorname{tg} \beta}, \quad T_{10} = T_{20} = 0.$$

Przyjęcie stanu naprężeń (3.2), wynikające z założenia o bezmomentowości przy obliczaniu obciążeń krytycznych w powłoce w ujęciu geometrycznie liniowym, jest konieczne, gdyż w przypadku braku tego założenia należy stosować inne kryteria utraty stateczności. Nie eliminuje to jednak możliwości wykorzystania wyników niniejszej pracy dla szeregu innych praktycznych przypadków, gdzie od początku procesu obciążenia występuje w powłoce stan zgięciowy.

Jak już podano, założony rodzaj obciążenia oraz idealny kształt geometryczny (brak początkowych niedokładności) określają bezmomentowy przedkrytyczny stan naprężeń w powłoce. Rodzaj podparcia powinien być taki, że w wyniku narastania obciążenia zewnętrznego niemożliwe jest powstanie sił poprzecznych i momentów zginających na brzegach powłoki przed wyboczeniem. Przykład takiego podparcia pokazano na rys. 1a. Dla innego rodzaju zamocowania, które wprowadza stan zgięciowy w okolicy brzegów, przyjęta dalej metoda rozwiązania oraz uzyskane wyniki będą w przybliżeniu poprawne dla powłok o średniej lub dużej długości ze względu na lokalny charakter zaburzeń brzegowych.

Zakładamy, że występuje stały stosunek obciążeń poprzecznych do podłużnych,

$$(3.3) \quad \alpha_N = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\sigma s_1}{N_c},$$

dzięki temu zachodzi proporcjonalny wzrost składowych tensora naprężenia w trakcie procesu obciążania powłoki i otrzymamy następujące naprężenia wzdłużne, obwodowe i intensywność naprężeń:

$$(3.4) \quad \sigma_s = -\frac{\sigma s}{2h \operatorname{tg} \beta} k_s, \quad \sigma_\theta = -\frac{\sigma s}{h \operatorname{tg} \beta}, \quad \sigma_i = \frac{\sigma s}{2h \operatorname{tg} \beta} \sqrt{\Omega_s}.$$

Naprężenia bezwymiarowe, wchodzące w skład współczynników macierzy sztywności [10], wynoszą

$$\bar{\sigma}_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_i} = -\frac{k_s}{\sqrt{\Omega_s}}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_i} = -\frac{2}{\sqrt{\Omega_s}}.$$

We wzorach powyższych

$$(3.5) \quad k_s = 1 - \left(\frac{s_1}{s}\right)^2 \xi_N, \quad \xi_N = 1 - \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{\alpha_N},$$

$$\Omega_s = k_s (k_s - 2) + 4 \quad (\Omega_s > 0).$$

Warto tutaj zauważyć, że przyjmując $\alpha_N = 2 \operatorname{tg} \beta$ otrzymujemy $k_s = 1$, $\Omega_s = 3$ i wzory (3.4) przyjmują postać odpowiadającą działaniu na powłokę wszechstronnego równomiernego ciśnienia hydrostatycznego. Jeżeli $\alpha_N \rightarrow \infty$, to $\xi_N \rightarrow 1$ i otrzymujemy przypadek, gdy na powłokę działa wyłącznie poprzeczne ciśnienie równomierne σ . Funkcja Ω_s jest zawsze większa od zera, niezależnie od wartości funkcji k_s . Moduł sieczny i styczny dla przyjętej w zakresie sprężystym i plastycznym charakterystyki materiału (rys. 1) są określone następująco:

$$(3.6) \quad E_c = \begin{cases} \frac{E_k}{1 + \frac{k_1}{\sigma s \sqrt{\Omega_s}}}, & \text{jeżeli } |\sigma_{pl}| \leq \sigma_i \leq \sigma_m; \quad E_k = \begin{cases} E_k, \\ E_0, \end{cases} \\ E, & \text{jeżeli } 0 < \sigma_i \leq |\sigma_{pl}|, \end{cases}$$

gdzie σ_m jest naprężeniem odpowiadającym wytrzymałości doraźnej, a $k_1 = 2 \left(\frac{E_k}{E} - 1 \right) \sigma_{pl} h \operatorname{tg} \beta$. Warunki (3.6) uwzględniamy w trakcie obliczeń numerycznych za pomocą instrukcji logicznych.

4. OBCIĄŻENIE KRYTYCZNE

Celem obliczenia obciążenia krytycznego powłoki przystąpimy wpieryw do rozwiązania układu równań różniczkowych (2.12). Funkcję ugięcia w i funkcję sił Φ przyjmujemy w postaci podwójnych szeregów nieskończonych

$$(4.1) \quad w(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(s) \cos n\theta,$$

$$\Phi(s, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{mn}(s) \cos n\theta,$$

przy czym w pierwszym przybliżeniu weźmiemy po jednym wyrazie tych funkcji. Po podstawieniu funkcji (4.1) do równań (2.12) sprowadzimy układ równań różnicz-

kowych cząstkowych do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Układ ten przyjmie postać

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \sin \beta \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \alpha_1 \frac{d^4 w}{ds^4} + \alpha_2 \frac{d^3 w}{ds^3} + (\bar{\alpha}_3 - n^2 \alpha_5) \frac{d^2 w}{ds^2} + \\ + (\bar{\alpha}_4 - n^2 \alpha_7) \frac{dw}{ds} - n^2 w (\bar{\alpha}_9 - n^2 \alpha_{10}) = 0, \\ \sin \beta \frac{d^2 w}{ds^2} + \beta_5 \frac{d^3 \Phi}{ds^3} + (\beta_7 - n^2 \beta_2) \frac{d^2 \Phi}{ds^2} + \beta_1 \frac{d^4 \Phi}{ds^4} + \\ + (\beta_8 - n^2 \beta_4) \frac{d\Phi}{ds} + n^2 \Phi (n^2 \beta_3 - \beta_6) = 0. \end{aligned}$$

Zmienne współczynniki α_i i β_i można określić z równań (2.12); $2n$ jest parametrem odpowiadającym liczbie półfal po wyboczeniu powłoki w kierunku obwodowym. Układ równań (4.2) scałkujemy w sposób przybliżony metodą ortogonalizacyjną. Funkcje $w(s)$ i $\Phi(s)$ wybieramy w postaci

$$(4.3) \quad w(s) = w_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1), \quad \Phi(s) = \Phi_0 \sin \frac{m\pi}{l} (s - s_1),$$

gdzie m jest liczbą półfal wzdłuż tworzącej.

Funkcje (4.3) spełniają kinematyczne warunki brzegowe swobodnego podparcia powłoki, tj. $w(s_1, \theta) = 0$, $w(s_2, \theta) = 0$, a warunki statyczne spełnione są częściowo, co dla powłok długich nie ma istotnego znaczenia z technicznego punktu widzenia. W myśl metody ortogonalizacyjnej Galerkin-Bubnowa żądamy, aby

$$(4.4) \quad \int_{s_1}^{s_2} F_1(s) w(s) ds = 0, \quad \int_{s_1}^{s_2} F_2(s) \Phi(s) ds = 0,$$

gdzie $F_1(s)$ i $F_2(s)$ oznaczają lewe strony równań (4.2).

Podstawiając funkcje (4.3) do równań (4.2) oraz przeprowadzając ortogonalizację zgodnie z (4.4), uzyskamy układ dwóch równań algebraicznych względem niewiadomych w_0 i Φ_0 :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} w_0 A_{11} + \Phi_0 A_{12} &= 0, \\ w_0 A_{21} + \Phi_0 A_{22} &= 0. \end{aligned}$$

Układ równań (4.5) będzie jednoznacznie spełniony, gdy zniknie jego wyznacznik, tj.

$$(4.6) \quad A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = 0,$$

co jednocześnie stanowi kryterium stateczności.

Zwrócić należy uwagę, że zmienne współczynniki równań (4.2) zawierają współczynniki macierzy sztywności D_{ij} i \bar{E}_{ij} oraz ich pierwsze i drugie pochodne względem argumentu s . Całkując przez części pozbywamy się tych pochodnych. Pozostałych funkcji scałkować analitycznie nie można ze względu na ich złożoną postać. Po-

zostaje jedynie całkowanie numeryczne. Ostatecznie uzyskujemy następujące równanie stateczności dla przyjętego typu obciążenia złożonego:

$$(4.7) \quad 3m^2 \pi^2 \left(\frac{m\pi}{lh} \right)^2 \sin^2 \beta - H_\sigma G_\sigma = 0,$$

w którym obciążenie krytyczne tkwi w sposób uwikłany. Funkcje H_σ i G_σ są określone następująco:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} H_\sigma &= A_0 + \tilde{A}_1 \cos \beta + n^2 \frac{1}{\cos \beta} \left(\tilde{A}_2 + \frac{6\sigma l}{Eh^3 \operatorname{tg} \beta} \right) + n^4 \frac{1}{\cos^3 \beta} \tilde{A}_3, \\ G_\sigma &= B_0 + \tilde{B}_1 \cos \beta + n^2 \frac{1}{\cos \beta} \tilde{B}_2 + n^4 \frac{1}{\cos^3 \beta} \tilde{B}_3. \end{aligned}$$

A_0, B_0 oznaczają stałe określone następującymi wzorami:

$$(4.9) \quad \begin{aligned} A_0 &= 3 \frac{\sigma l}{Eh^3 \operatorname{tg} \beta} \cos \beta \left\{ \frac{1}{2} - m_1^2 \left[s_1^2 \xi_N - \frac{1}{3l} (s_2^3 - s_1^3) \right] \right\} + d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} m_1^2 \cos \beta, \\ B_0 &= -b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} m_1^2 \cos \beta, \end{aligned}$$

a \tilde{A}_i i \tilde{B}_i są całkami

$$(4.10) \quad \begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} m_1^2 \left(-s d_{11} m_1^2 \sin^2 \varphi + d_{12} m_1 \sin 2\varphi - \frac{1}{s} d_{22} \cos^2 \varphi \right) ds, \\ \tilde{A}_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{1}{N} \frac{1}{s} m_1 \left(-2d_{12} m_1 \sin^2 \varphi + \frac{1}{s} d_{22} \sin 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2d_{33} \frac{1}{s} \left(m_1^2 \cos^2 \varphi - m_1 \frac{1}{s} \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2 \varphi \right) \right] ds, \\ \tilde{A}_3 &= - \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{N} \frac{1}{s^3} d_{22} \sin^2 \varphi ds, \\ \tilde{B}_1 &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} m_1^2 \left(s b_{22} m_1^2 \sin^2 \varphi - b_{12} m_1 \sin 2\varphi + \frac{1}{s} b_{11} \cos^2 \varphi \right) ds, \\ \tilde{B}_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{N}{M} \frac{1}{s} m_1 \left(2b_{12} m_1 \sin^2 \varphi - \frac{1}{s} b_{11} \sin 2\varphi \right) + \right. \\ &\quad \left. + b_{33} \frac{1}{s} \left(m_1^2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{s} m_1 \sin 2\varphi + \frac{1}{s^2} \sin^2 \varphi \right) \right] ds, \\ \tilde{B}_3 &= \int_{s_1}^{s_2} \frac{N}{M} \frac{1}{s^3} b_{11} \sin^2 \varphi ds, \quad m_1 = \frac{m\pi}{l}, \quad \varphi = m_1 (s - s_1). \end{aligned}$$

Współczynniki występujące w równaniach (4.10) są związane z elementami macierzy sztywności (2.8) następująco:

$$(4.11) \quad \begin{aligned} d_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta}, & b_{11} &= D_{22}, & b_{22} &= D_{11}, & b_{12} &= -D_{12}, \\ d_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{D_{12}(s_2)}{N(s_2)} - \frac{D_{12}(s_1)}{N(s_1)}, \\ b_{12}^0 \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{N(s_2)}{M(s_2)} D_{12}(s_2) - \frac{N(s_1)}{M(s_1)} D_{12}(s_1). \end{aligned}$$

Elementy macierzy sztywności (2.8) oraz funkcje N i M zależą od przyjętej teorii plastyczności i dla założonego typu obciążenia powłoki i charakterystyki materiału (rys. 1) są określone następująco:

a) teoria deformacyjna Nádai'a-Hercky'ego

$$(4.12) \quad \begin{aligned} D_{11} &= \varphi_c \frac{(k_s - 4)^2}{4\Omega_s} + \frac{E_k}{E_c}, \\ D_{12} &= -\varphi_c \frac{(1 - k_s)(k_s - 4)}{2\Omega_s} + \frac{1}{2} E_k \left(\frac{1}{E_c} - \frac{\nu_1}{E} \right), \\ D_{22} &= \varphi_c \frac{(1 - k_s)^2}{\Omega_s} + \frac{E_k}{E_c}, \\ d_{33} &= \frac{2}{3 \frac{E}{E_c} - \nu_1}, & b_{33} &= 3 \frac{E}{E_c} - \nu_1, \\ N &= \frac{1}{4} \left[(3E + 2\nu_1 E_k) \frac{1}{E_c} - \frac{2\nu_1}{\Omega_s} (1 - k_s)(k_s - 4) \varphi_c - \nu_1^2 \frac{E_k}{E} \right], \\ M &= \frac{E_k}{E_c} \left\{ \frac{\varphi_c}{4\Omega_s} [(k_s - 4)^2 + 4(1 - k_s)^2] + \frac{E_k}{E_c} \right\} + \frac{1}{4} E_k \left[\varphi_c \frac{(1 - k_s)(k_s - 4)}{\Omega_s} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} E_k \left(\frac{2}{E_c} - \frac{\nu_1}{E} \right) \right] \left(\frac{2}{E_c} - \frac{\nu_1}{E} \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi_c = 1 - \frac{E_k}{E_c}, \quad \nu_1 = 1 - 2\nu;$$

b) teoria plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa

$$(4.13) \quad \begin{aligned} D_{11} &= 2\Omega_s + \frac{1}{2} \omega_k (k_s - 4)^2, \\ D_{12} &= 2\nu\Omega_s - \omega_k (1 - k_s)(k_s - 4), \\ D_{22} &= 2[\Omega_s + \omega_k (1 - k_s)^2], \\ N &= 2(1 - \nu^2) \Omega_s + \frac{1}{2} \omega_k [(5 - 4\nu)(k_s^2 + 4) - 4(4 - 5\nu)k_s], \\ M &= 4\Omega_s^2 (1 - \nu^2)^2 + \Omega_s \omega_k [4(1 - k_s)^2 + 4\nu(1 - k_s)(k_s - 4) + (k_s - 4)^2], \end{aligned}$$

gdzie

$$\omega_k = \frac{E}{E_k} - 1,$$

$$d_{33} = \frac{1}{1+\nu}, \quad b_{33} = 2(1+\nu).$$

Warto tutaj nadmienić, że w przypadku odkształceń sprężystych $E_c = E_k = E$; stąd dla teorii deformacyjnej $\varphi_c = 0$ i elementy macierzy sztywności przyjmują stałe wartości: $D_{11} = D_{22} = 1$, $D_{12} = 0,25(1+2\nu)$. Podobnie dla teorii plastycznego pływnięcia $\omega_k = 0$, $D_{11} = D_{22} = 2\Omega_s$, $D_{12} = 2\nu\Omega_s$.

Funkcji (4.11) nie ma potrzeby rozwijać, gdyż przy obliczeniach numerycznych można w algorytmie przewidzieć odpowiednią procedurę dla przechowywania w pamięci tych wielkości obliczanych przy numerycznym całkowaniu odpowiednich funkcji. Obciążenie krytyczne $(\sigma_{kr}$ i $N_{akr})$, które w równaniu stateczności tkwi w sposób uwikłany, stanowi najmniejszy dodatni pierwiastek równania (4.7), gdzie należy dokonać minimalizacji względem parametrów m i n . Dla jego wyznaczenia można zastosować którąkolwiek z metod iteracyjnych.

5. OBLICZENIA NUMERYCZNE I WNIOSKI

Celem analizy numerycznej jest obliczenie obciążeń krytycznych powłoki przy dowolnej kombinacji obciążenia poprzecznego do podłużnego, jak i zbadanie wpływu podstawowych parametrów fizycznych i geometrycznych na wielkość obciążeń krytycznych i postać utraty stateczności. Mimo że wyrażenia \tilde{A}_i i \tilde{B}_i (4.10) sprowadzono do prostszej postaci przez całkowanie przez części, analityczne wyznaczenie obciążenia krytycznego jest niemożliwe ze względu na złożoną postać funkcji podcałkowych i występowanie obciążenia krytycznego w równaniu stateczności w sposób uwikłany. Tok obliczeń przedstawia się następująco. Lewą stronę równania stateczności traktujemy jako funkcję jednej zmiennej σ i parametrów m i n , tj. $C - H_\sigma G_\sigma = F_\sigma$. Przyjmujemy konkretne wymiary powłoki i stałe materiałowe (E , E_k , ν , σ_{pl}) i w sposób iteracyjny metodą interpolacji liniowej z potrzebną dokładnością poszukujemy miejsc zerowych funkcji F_σ , co odpowiada pierwiastkom równania (4.7). Interesuje nas oczywiście najmniejszy dodatni pierwiastek równania dla m i n wziętych z przedziału liczb naturalnych. Przy obliczaniu całek \tilde{A}_i , \tilde{B}_i najwygodniej posłużyć się można wzorem Simpsona z krokiem wybieranym iteracyjnie dla wymaganej dokładności. Po ułożeniu algorytmu obliczenia przeprowadzono na komputerze ODRA 1305 dla powłoki w kształcie stożka ściętego, swobodnie podpartej na brzegach, obciążonej jak na rys. 7.

Jako wielkości podstawowe przyjęto: odległość od wierzchołka do górnej podstawy $s_1 = 84$ cm, długość powłoki wzdłuż tworzącej $l = s_2 - s_1 = 43$ cm, grubość powłoki $h = 0,8$ cm, kąt pochylenia tworzącej przy podstawie dolnej $\beta = 50^\circ$, stosunek obciążenia poprzecznego do podłużnego $\alpha_N = 8,0$, moduł sprężystości podłużnej $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², moduł wzmocnienia liniowego $E_1 = E_k = 1,0 \cdot 10^5$ kG/cm²,

współczynnik ściśliwości $\nu=0,3$, granica plastyczności $\sigma_{pl}=10000 \text{ kG/cm}^2$. Jeżeli którykolwiek z wymienionych parametrów dla celów analizy ulega zmianie, to zostanie zaznaczone to na odpowiednim wykresie.

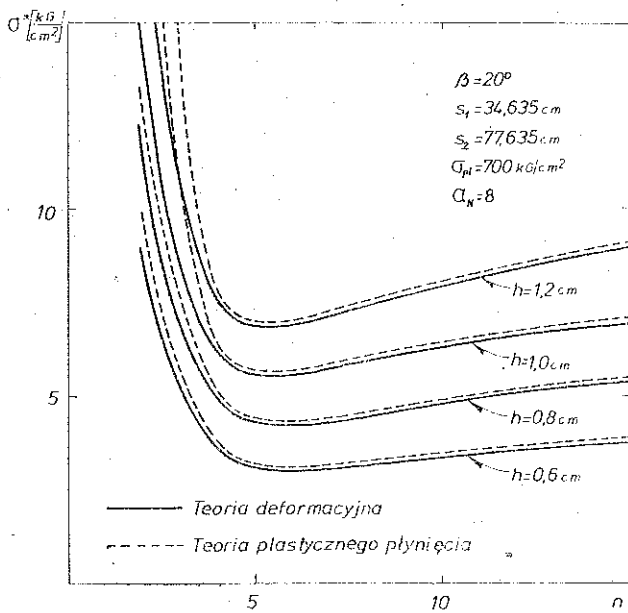
Pierwszym krokiem analizy numerycznej było zbadanie wpływu zmiany grubości powłoki (przy innych parametrach stałych) na przebieg obciążeń krytycznych. Na wykresie (rys. 2) pokazano jak zmienia się wartość pierwiastków równania stateczności (4.7) ze zmianą ilości fal po obwodzie powłoki dla różnych grubości h . Z wykresu widać, że najmniejszą wartość σ^* uzyskuje się przy pewnej wartości n , zależnej od pozostałych parametrów i wielkość ta jest właśnie poszukiwanym poprzecznym obciążeniem krytycznym σ_{kr}^* , któremu oczywiście odpowiada krytyczna siła podłużna $N_{a_{kr}}$. Sporządzono również wykres (rys. 3) pokazujący, że obciążenie krytyczne minimalizuje się również według parametru m (ilość półfal wzdłuż tworzącej powłoki). W tym przypadku najmniejsze obciążenie krytyczne uzyskano przy $m=1$; w innych przypadkach gdy następuje przewaga obciążenia podłużnego w stosunku do poprzecznego (mała wartość współczynnika α_N), powłoka traci stateczność przy $m>1$.

W jaki sposób zmienia się obciążenie krytyczne ze zmianą grubości, pokazano na rys. 4. Stwierdzić można tutaj, że w miarę wzrostu grubości powłoki obciążenie krytyczne również wzrasta i to w sposób zbliżony do liniowego. Postać wyboczenia powłoki odpowiadała powstawaniu $n=6$ (z przejściem na $n=5$ dla większych grubości) fal po obwodzie (przy $m=1$) dla tej grupy danych. Obliczenia przeprowadzono również dla teorii plastycznego płynięcia (TPP); obciążenia krytyczne były nieco wyższe niż dla teorii deformacyjnej.

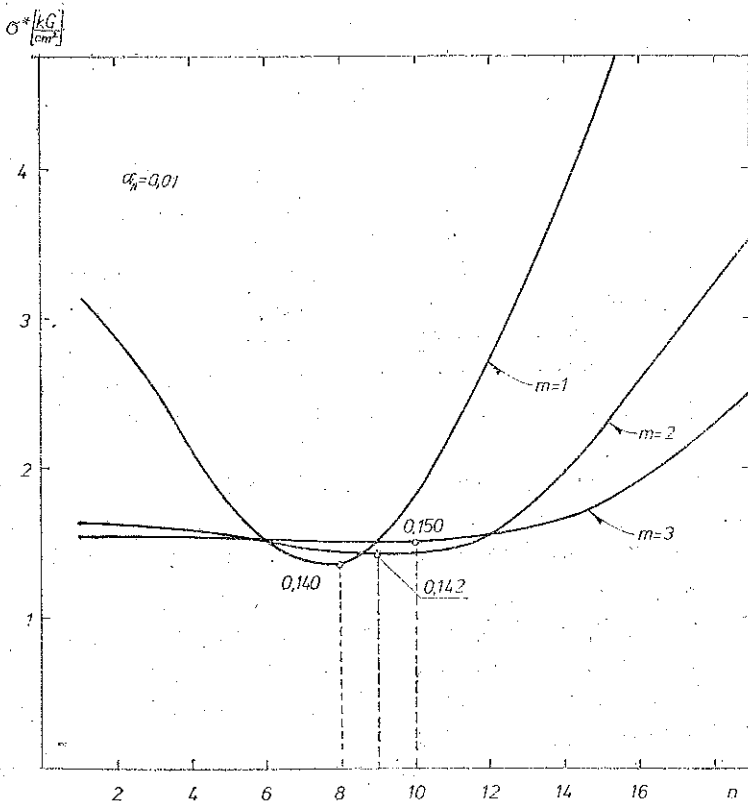
Istotnym elementem analizy numerycznej było zbadanie wpływu zmiany współczynnika α_N na wielkość obciążeń krytycznych. Wynik analizy przedstawia rys. 5. Stwierdzono, że: 1) zmiana α_N nie wpływa na postać utraty stateczności, 2) w miarę wzrostu α_N krytyczne obciążenie boczne σ_{kr} najpierw nieliniowo wzrasta, osiąga maksimum przy pewnej ($\alpha_N=2,3835$) wartości tego współczynnika, po czym nieznacznie maleje, 3) krytyczna siła wzdłużna $N_{a_{kr}}$ nieliniowo maleje ze wzrostem α_N ; 4) teoria plastycznego płynięcia daje nieco wyższe wartości obciążeń krytycznych niż teoria deformacyjna, przy czym rozbieżności rosną przy małych wartościach współczynnika α_N .

W tym etapie analizy przeprowadzono również obliczenia przy założeniu nieściśliwości materiału ($\nu=0,5$), jak i przy $\nu=0$. Przy podstawieniu $\nu=0,5$ obciążenia krytyczne dla obydwu teorii były o kilka procent wyższe niż przy $\nu=0,3$.

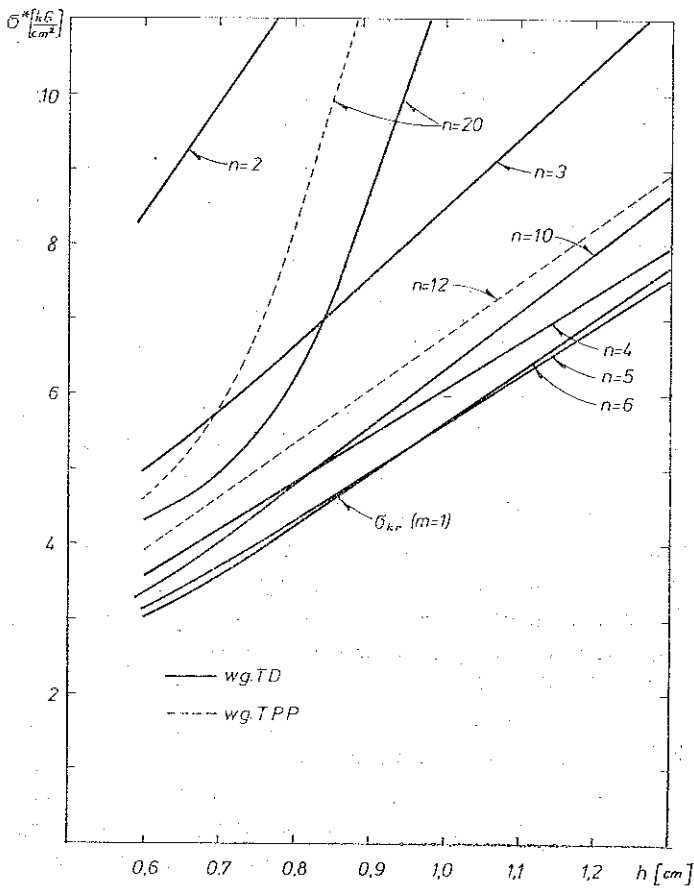
Opierając się na uzyskanych poprzednio wynikach, sporządzono wykres (rys. 6) we współrzędnych σ , N_a określający obszar stateczności powłoki. Punkty zawarte wewnątrz obszaru ograniczonego osiami układu i krzywą odpowiadają statecznemu położeniu powłoki, a przy kombinacji σ i N_a odpowiadającej położeniu na krzywej lub na zewnątrz obszaru, powłoka znajdzie się w stanie utraty stateczności. Pewną ilustracją procesu, w jakim stanie zachodzi utrata stateczności, może być wykres 7 pokazujący rozkład intensywności naprężeń w powłoce σ_l wzdłuż tworzącej w momencie utraty stateczności — dla różnych stosunków obciążenia poprzecznego do



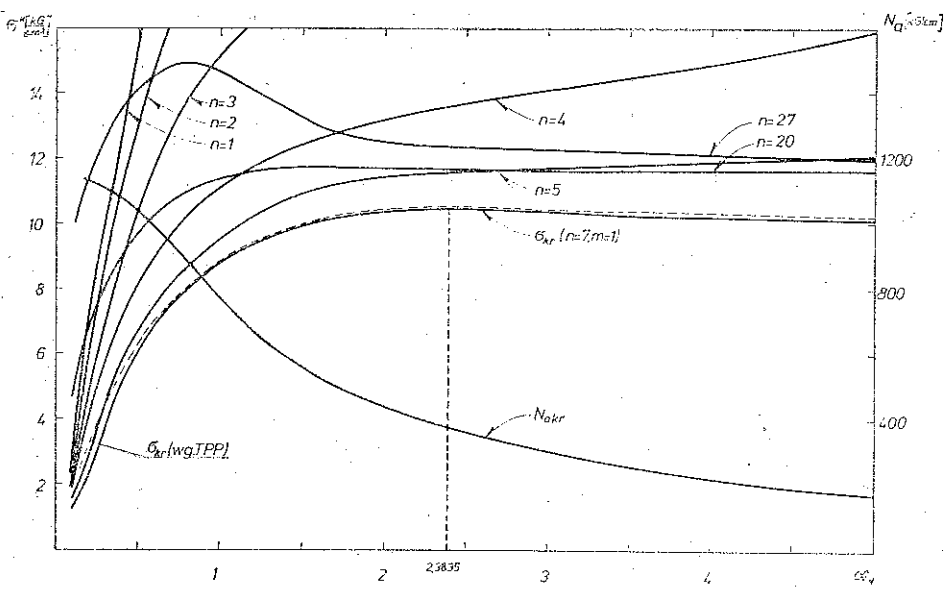
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



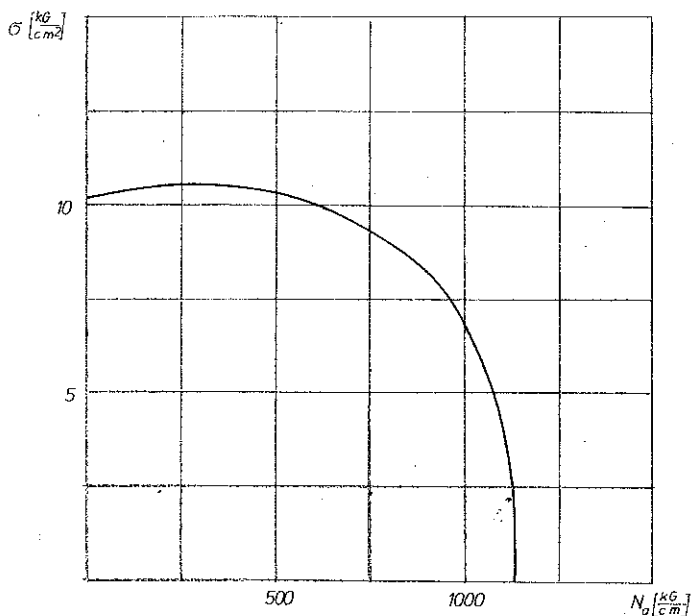
Rys. 5

podłużnego. Jak widać, α_N ma wyraźny wpływ na rozkład stref sprężystych i plastycznych w powłoce w chwili wyboczenia. Przy małych wartościach α_N najpierw zaczynają uplastyczniać się obszary w pobliżu górnej podstawy; przy wzroście obciążenia rozwój stref plastycznych odbywa się w kierunku większej podstawy. Przy wartościach α_N w granicach około 0,6 do 0,75 uplastycznianie rozpoczyna się prawie jednocześnie od górnej i dolnej podstawy, rozprzestrzeniając się w kierunku środka tworzącej; przy większych wartościach współczynnika α_N proces uplastyczniania powłoki przed wyboczeniem odwraca się, tzn. rozpoczyna się od dolnej podstawy, propagując się ku górze. Jak widać z wykresu wyboczenie powłoki dla tej grupy danych zachodziło w stanie sprężysto-plastycznym, co w pewnym sensie tłumaczy fakt niewielkiej rozbieżności wyników uzyskanych na podstawie obydwu podstawowych teorii plastyczności. Należy się spodziewać, że przy α_N mniejszym od 0,1 cała powłoka przed wyboczeniem przeszłaby w stan plastyczny.

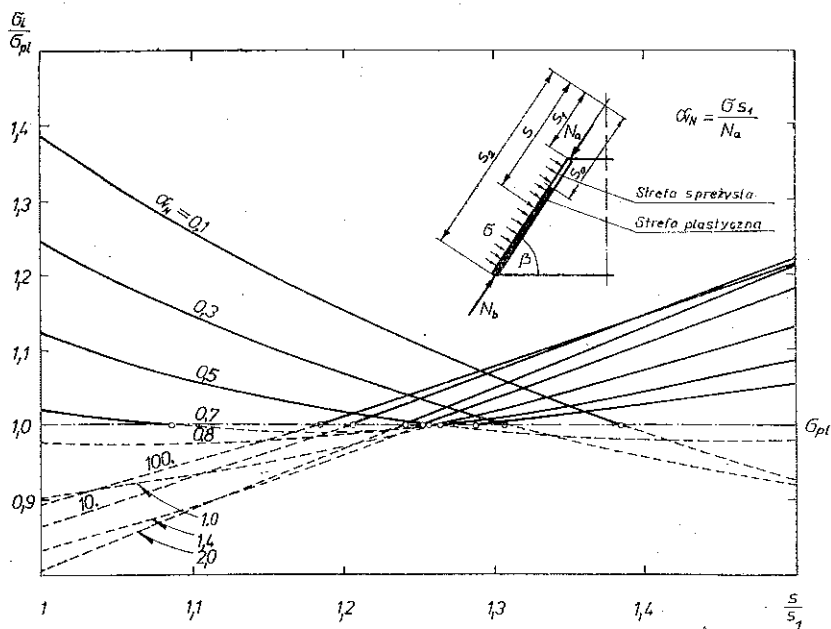
Kolejnym etapem obliczeń numerycznych było zbadanie wpływu kąta pochylenia tworzącej powłoki β na wielkości obciążeń krytycznych. Analizę przeprowadzono tutaj w dwóch wariantach. W pierwszym zmieniono kąt β przy zachowaniu stałego średniego promienia powłoki (rys. 8); w drugim wszystkie parametry zachowano stałe oprócz kąta β . Jeżeli powłoka zmienia kształt zachowując stały średni promień $r_{sr}=0,5(s_1+s_2)\cos\beta$, to ze wzrostem β obciążenie krytyczne rośnie nieliniowo przy rosnącej liczbie fal n . Warto tutaj zwrócić uwagę na fakt, że przy kątach β większych w przybliżeniu od 75° , gdy powłoka swym kształtem zbliża się do walca, obciążenie krytyczne niewiele się zmienia. Fakt ten może m.in. posłużyć do przybliżonego wyznaczania obciążenia krytycznego dla powłoki walcowej na podstawie wyników niniejszej pracy. Bezpośrednio analizować powłoki walcowej nie można ze względu na osobliwości w rozwiązaniu. Jeżeli zmieniano kąt β przy wszystkich pozostałych parametrach stałych, to obciążenia krytyczne również nieliniowo wzrastały (rys. 9), przy czym wzrost ten jest bardzo gwałtowny, gdy kąt β zbliża się do $\pi/2$. Obliczenia przeprowadzono dla trzech różnych wartości granicy plastyczności σ_{pl} zarówno dla teorii deformacyjnej, jak i dla teorii plastycznego płynięcia. Wyższa granica plastyczności wywołuje wyższe obciążenia krytyczne. Rozbieżności pomiędzy TPP i TD są większe dla małych kątów β .

Na kolejnym wykresie (rys. 10) pokazano wpływ zmiany modułu wzmocnienia liniowego $E_1=E_k$ na obciążenie krytyczne. Z wykresu widać, że wpływ ten jest nieliniowy; przy wzroście E_k obciążenie krytyczne rośnie natomiast postać utraty stateczności nie ulega zmianie ($n=8$).

Oprócz omówionych przypadków zbadano również jak kształtują się obciążenia krytyczne ze zmianą długości tworzącej powłoki; tutaj przy wzroście $l=s_2-s_1$ obciążenie krytyczne spada. Przeprowadzono obliczenia dla innych układów danych, jednak jakościowy charakter analizy nie odbiegał od omówionych przypadków. Stwierdzono również, że rozbieżności wyników uzyskanych na podstawie związków fizycznych teorii plastycznego płynięcia i teorii deformacyjnej są większe, gdy wyboczenie następuje w stanie czysto plastycznym powłoki, i są większe, gdy proces uplastycznienia jest bardziej rozwinięty. Odwrotnie rzecz się ma z uwzględnieniem

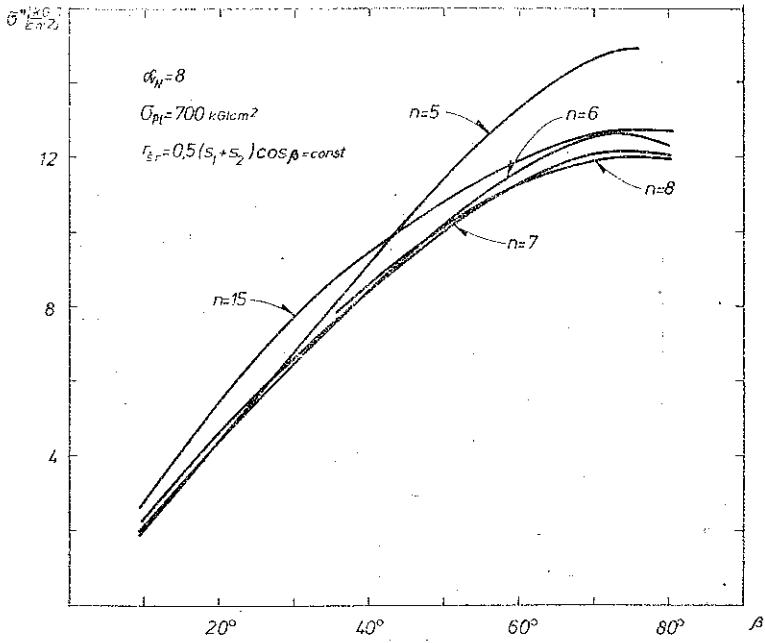


Rys. 6

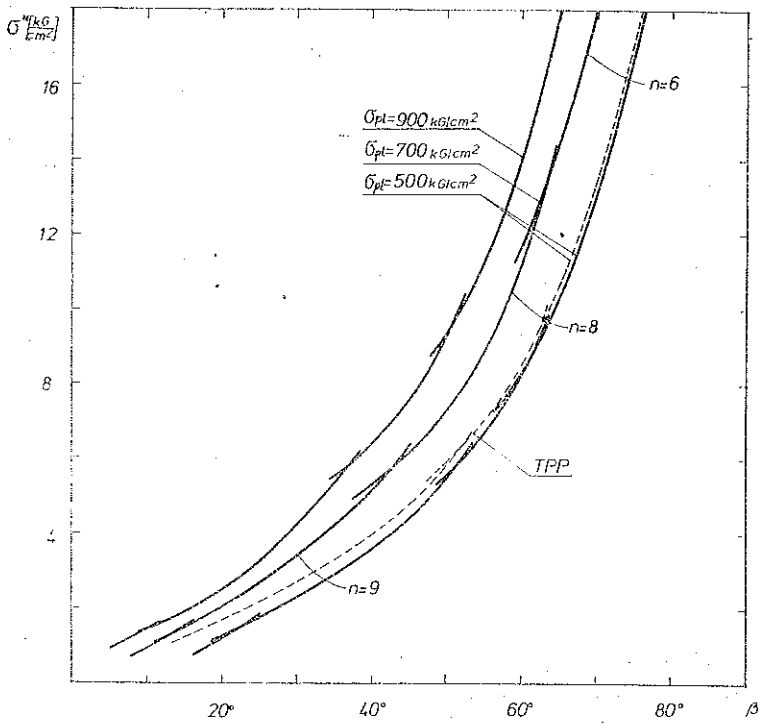


Rys. 7

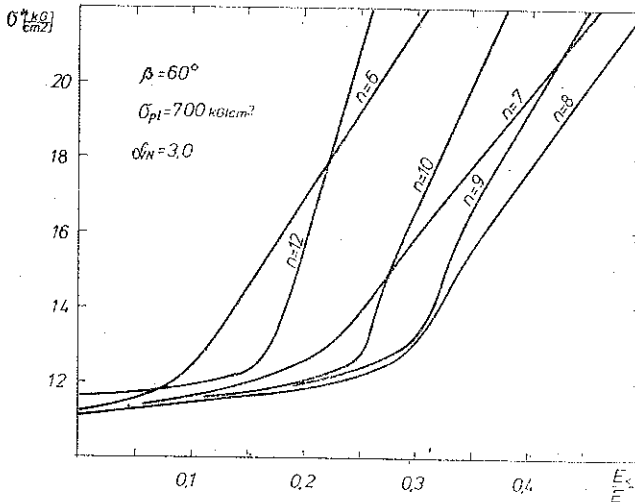
ściśliwości materiału. Tutaj rozbieżności wyników dla materiału ściśliwego i nieściśliwego maleją w miarę rozwoju procesu uplastycznienia. Obliczenia wykazały, że zmiana parametrów geometrycznych wpływa wyraźnie na postać wybočenja powłoki.



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Jak już wspomniano, przy badaniu wpływu zmiany współczynnika α_N obciążenie σ_{kr} osiągało pewną wartość maksymalną dla określonej wartości tego współczynnika. Stwierdzono, że wartość ta wraz z pozostałymi danymi odpowiada powstaniu naprężeń błonowych w stanie przedkrytycznym $\sigma_s = 0,5\theta_0$. Jak wiadomo, taki stan w powłoce wywołuje wszechstronne równomierne ciśnienie hydrostatyczne. Stąd wniosek, że najkorzystniejszy z punktu widzenia stateczności powłoki stożkowej jest taki stosunek obciążenia poprzecznego do podłużnego, który wywołuje w powłoce stan naprężeń, gdzie naprężenie obwodowe jest w przybliżeniu dwa razy większe od wzdłużnego. Fakt ten można wykorzystać przy projektowaniu powłok.

Dla sprawdzenia poprawności przyjętej metody dokonano porównania liczbowego obciążeń krytycznych uzyskanych wg niniejszej pracy, z dostępnymi w literaturze ([1]) dla walcowych powłok plastycznych, a także dla stożkowych powłok sprężystych. Zgodnie z pracą [13] obciążenie krytyczne powłoki stożkowej obciążonej wszechstronnym ciśnieniem równomiernym przy danych: $s_1 = 8,7$ cm, $s_2 = 27,7$ cm, $h = 0,055$ cm, $\beta = 55^\circ$, $E = 2,075 \cdot 10^6$ kG/cm², $\nu = 0,3$, jest równe 1,645 kG/cm², natomiast dla tych samych danych wg niniejszej pracy $\sigma_{kr} = 1,614$ kG/cm². Uzyskano dobrą zgodność (rozbieżność wynosi około 2%).

W trakcie obliczeń numerycznych nasunęło się kilka istotnych uwag. Stwierdzono m.in., że duży wpływ na wyniki ma zachowanie odpowiedniej dokładności obliczeń w trakcie procesu iteracyjnego. Oczywiście należy zdać sobie sprawę z tego, że żądanie większej dokładności jest związane niejednokrotnie ze znacznym zwiększeniem czasu obliczeń komputerowych. Stąd też ograniczona liczba badanych wariantów.

W konkluzji należy jeszcze raz stwierdzić, że dzięki przedstawionej metodzie wyniki pracy przyjęły zwartą postać i mogą być przydatne w praktyce projektowej zarówno dla powłok plastycznych jak i sprężystych. Celem kolejnej pracy jest weryfikacja doświadczalna uzyskanych rezultatów.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Э. И. Григолюк, *Теоретическое и экспериментальное исследование устойчивости тонких оболочек за пределом упругости*, Механика, Устойчивость и Пластичность, Итоги Наук, 1967.
2. Б. Г. Газизов, А. М. Зайнашев, *Об устойчивости усеченных конических оболочек на упругом основании за пределом упругости*, Иссл. по Теории Пластин и Оболочек, 5, 1967.
3. A. HOFFMAN, R. ROCHE, F. JEANPIERRE, S. GOLDSTEIN, *Flambement elastique et plastique des coques*, Realisation dans le systeme Ceasemt Resultants disponibles.- Comparaison a des essais, Rev. Franc. Mec. 4, 62-63, 1977.
4. M. KLEIBER, *Duże deformacje ciał sprężysto-plastycznych*, Teoria i numeryczna analiza konstrukcji, Prace IPPT, 13, 1978.
5. Ю. П. Лепик, *Равновесие упруго-пластических и жестко-пластических пластин и оболочек*, Инж. Журнал, 4, 601-616, 1964.
6. W. C. LYONS, *Elastic and plastic buckling of cylindrical shells subjected to impulsive load*, Arch. Mech, 22, 1, 1970.
7. И. И. Трапезин, *Об устойчивости конической оболочки вращения при напряжениях больших предела упругости*, Сб. Расчеты на прочность, Машин., 11, 1965.
8. H. RAMSEY, *Plastic buckling of a conical shell under axial compression*, Int. J. Mech. Sci., 19, 5, 1977.
9. Z. WASZCZYŹYŃ, *Obliczanie skończonych ugięć sprężysto-plastycznych płyt i powłok obrotowo symetrycznych*, P. K., Kraków 1970.
10. J. ZIELNICA, *Stateczność powłoki stożkowej poza granicą sprężystości* Rozpr. Inż., 20, 3, 435-454, 1972.
11. J. ZIELNICA, W. OSMÓLSKI, *Wyznaczanie obciążenia krytycznego cienkiej powłoki stożkowej w oparciu o teorię plastycznego płynięcia*, Arch. Bud. Masz., 23, 2, 283-299, 1976.
12. M. ŻYCZKOWSKI, *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa 1973.
13. S. JONIAK, *O pewnym sposobie modelowania funkcji ugięć po utracie stateczności dla powłoki stożkowej*, Arch. Bud. Masz., 20, 3, 1973.

Резюме

КРИТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ФОРМЕ
УСЕЧЕННОГО КОНУСА

В работе представлен метод определения критических нагрузок тонкой оболочки в форме усеченного конуса, нагруженной равномерным давлением, действующим на боковую поверхность, и продольной силой, направленной вдоль образующей. Предполагается, что материал оболочки и геометрические размеры так подобраны, что потеря устойчивости может наступить после превышения предела упругости в пленочном докритическом напряженном состоянии. Используется линейное геометрически уравнение устойчивости оболочки с учетом сжимаемости материала и принятием характеристики упрочнения $\sigma_t = \sigma_t(\epsilon_t)$ линейного типа. Опираются на физических соотношениях так деформационной теории, как и теории пластического течения. Для решения исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка применен ортогонализационный метод. Введение исследования условия на секущий модуль дает возможность анализа, упругих упруго-пластических и полностью пластических оболочек. Численный анализ вопроса дал возможность сравнения двух основных теорий пластичности так для несжимаемого, как и сжимаемого материалов.

SUMMARY

CRITICAL STATE OF AN ELASTIC-PLASTIC SHELL IN THE FORM OF
A TRUNCATED CONE

The paper presents a method of determining the critical loads of a thin shell in the form of a truncated cone, loaded by uniform pressure acting on the lateral surface, and by a longitudinal force acting along the generator. Material of the shell and its geometric dimensions are assumed to be selected so that the loss of stability may occur after passing the elastic limit in the membrane, subcritical state of stress. Linear geometric stability equations of the shell are used, account being taken of material compressibility the hardening characteristics $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ is of linear type. The physical relations of both the plastic deformation and the plastic flow theories are used. The method of orthogonalisation is applied to the solution of the fourth order set of partial differential equations governing the problem. Introduction of the condition of the secant modulus enables the analysis of elastic, elastic-plastic and plastic shells. The numerical analysis performed makes it possible to compare the both fundamental plasticity theories for compressible and incompressible materials.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 18 grudnia 1978 r.