

ANALIZA POWŁOK SZTYWNO-PLASTYCZNYCH W ZAKRESIE DUŻYCH UGIĘĆ

MLADEN MITOW (SOFIA) I MARIA K. DUSZEK (WARSZAWA)

Celem pracy jest opracowanie metody analitycznej otrzymywania rozwiązań przybliżonych dla powłok plastycznych w zakresie dużych odkształceń lub przemieszczeń. Rozwiązania takie, dając przybliżony obraz przebiegającego procesu, są przydatne zarówno z punktu widzenia bezpośrednich zastosowań w praktyce inżynierskiej, jak i przy zastosowaniu metod numerycznych, do wstępnej analizy jakościowej pracy konstrukcji.

Występujące w dotychczasowej literaturze prace związane z rozważanym zagadnieniem oparte są na równaniach Donnella-Własowa, dostatecznie ścisłych jedynie dla powłok bardzo mało wyniosłych w zakresie umiarkowanie dużych ugięć. W pracy zaproponowano teorię będącą uogólnieniem teorii Donnella-Własowa na powłoki wyniosłe oraz duże ugięcia.

Metodę zilustrowano na przykładzie zamkniętej powłoki walcowej poddanej wewnętrznemu równomiernie rozłożonemu obciążeniu nominalnemu. Otrzymane zależności obciążenie-ugięcie porównano z tymi jakie uzyskano dla analogicznego przykładu opierając się na równaniach Donnella-Własowa, otrzymując istotne poprawienie wyników.

1. WPROWADZENIE

Rozwój teorii powłok plastycznych, jaki obserwujemy w ostatnich latach, koncentruje się głównie wokół dwóch kierunków. Pierwszy, dotyczy zagadnień wyznaczania obciążeń, przy których rozpoczyna się proces deformacji plastycznych, czyli tzw. «nośności granicznej». W ramach tego podejścia nie można opisać wpływu zmian kształtu konstrukcji powstających w procesie plastycznego odkształcenia na zdolność przenoszenia przez nią obciążeń. Stawia to poza zasięgiem analizy całą grupę zjawisk obserwowanych w trakcie użytkowania konstrukcji inżynierskich.

Drugi kierunek badań związanych z teorią powłok plastycznych obejmuje metody numeryczne uzyskiwania rozwiązań możliwie ściśle sformułowanych problemów (a więc również nieliniowych geometrycznie) za pomocą maszyn cyfrowych. Wadą tych metod jest ich na ogół wysoki koszt, ograniczona przydatność do analizy jakościowej całej klasy konstrukcji oraz mała efektywność przy rozwiązywaniu zagadnień geometrycznie nieliniowych, o ile nie znamy ani nie potrafimy przewidzieć charakteru badanego procesu (np. bifurkacji czy utraty stateczności).

Powstaje zatem potrzeba opracowania metod analitycznych otrzymywania rozwiązań przybliżonych dla powłok plastycznych w zakresie dużych odkształceń czy przemieszczeń, które dając przybliżony obraz przebiegającego procesu są przydatne zarówno z punktu widzenia bezpośrednich zastosowań w praktyce inżynierskiej,

jak i przy zastosowaniu metod numerycznych — do wstępnej analizy jakościowej pracy konstrukcji.

Występujące w dotychczasowej literaturze prace zawierające takie rozwiązania, prowadzone w ramach teorii geometrycznie nieliniowej, dotyczą jedynie wąskiej klasy powłok mało wyniosłych przy umiarkowanie dużych ugięciach i nieskończenie małych przemieszczeniach stycznych [1–8]. Geometryczna nieliniowość w związkach odkształceniowo-przemieszczeniowych przejawia się wówczas przez wystąpienie wyrazu zawierającego kwadrat gradientu przemieszczenia normalnego do powierzchni środkowej. Równania geometryczne tego typu wprowadzone były po raz pierwszy przez Kármána dla płyt, a następnie uogólnione na powłoki mało wyniosłe przez Dannela, Mushtariego i Własowa. Wprowadzone ograniczenia dotyczące wyniosłości powłok i przemieszczeń stawiają poza zasięgiem rozważań większość interesujących konstrukcji powłokowych.

Powszechnie stosowane w dotychczasowych rozwiązaniach dla cienkich powłok założenia Love'a-Kirchhoffa budzą również zastrzeżenia z punktu widzenia skończonych deformacji plastycznych⁽¹⁾.

Celem naszej pracy jest podanie metody otrzymywania przybliżonych rozwiązań analitycznych dla powłok sztywno-idealnie plastycznych w zakresie dużych odkształceń lub przemieszczeń, która uniknęłaby wyżej wspomnianych ograniczeń i nieściśłości.

Różnica pomiędzy przedstawionym podejściem a znanym z literatury polega na:

1) rozszerzeniu zakresu rozważanych powłok z punktu widzenia ich wyniosłości oraz wielkości dopuszczalnych przemieszczeń, co pociąga za sobą konieczność uwzględnienia w związkach geometrycznych innych wyrazów nieliniowych niż wyraz występujący w związkach Donnella-Własowa;

2) weryfikacji założeń teorii Love'a-Kirchhoffa oraz zastąpieniu warunku niewydłużalności elementu normalnego do powierzchni środkowej przez warunek nieściśliwości.

Metodę zilustrowano na przykładzie zamkniętej powłoki walcowej poddanej wewnętrznemu równomiernie rozłożonemu obciążeniu nominalnemu. Następnie porównano otrzymane zależności obciążenie-ugięcie z tymi, jakie uzyskano dla analogicznego przykładu na podstawie teorii Love'a-Kirchhoffa oraz równań Donnella-Własowa, otrzymując istotne poprawienie wyników. Pozwoliło to wnioskować o celowości podjętych rozważań.

2. ZAŁOŻENIA I PODSTAWOWE ZWIĄZKI

Rozpatrując zagadnienie w ramach teorii powłok cienkich, czyli przyjmując, że stosunek grubości powłoki do najmniejszego promienia krzywizny powierzchni

(¹) Założenie Love'a-Kirchhoffa o niewydłużalności elementu normalnego do powierzchni środkowej, konsekwentnie stosowane dla materiału nieściśliwego podlegającego stowarzyszonemu prawu płynięcia, zmusza do zbyt daleko idących ograniczeń nałożonych na dopuszczalne pola naprężeń i odkształceń.

środkowej jest wielkością pomijalną w stosunku do jedności ($H/R \ll 1$), mamy z góry określony stopień dokładności rozwiązania określony przez ten stosunek.

Uwzględniając efekty geometrycznej nieliniowości należy podstawowe równania wzbogacić jedynie o te wyrazy, które są w stosunku do wyrazu maksymalnego większe niż H/R . Zasadę tę przyjmujemy za kryterium przy ustalaniu odpowiedniej postaci związków geometrycznych dla skończonych przemieszczeń. Z kolei rząd wielkości poszczególnych składowych w nieliniowych równaniach, określających w sposób ścisły pole odkształceń przez pole przemieszczeń powierzchni środkowej — zależy nie tylko od sposobu jej deformacji, ale również od wyniosłości powłoki. Aby móc zatem uwzględnić w związkach geometrycznych wyrazy, które dla danego przypadku nie są pomijalnie małe, należy ustalić parametry określające początkowy kształt oraz sposób deformacji powłoki.

W związku z tym wprowadzamy następującą klasyfikację powłok ze względu na ich wyniosłość, określoną przez rząd wielkości stosunku długości wzorcowej fali deformacji L do najmniejszego promienia krzywizny R (²).

1. Powłoki mało wyniosłe (lub mało zakrzywione): $L/R \leq 0(\epsilon)$, gdzie ϵ jest małą liczbą, której kwadrat jest wielkością pomijaną w stosunku do jedności ($\epsilon^2 \ll 1$). Dla powłok cienkich $H/R \leq 0(\epsilon^2)$, gdzie H jest grubością powłoki.

2. Powłoki umiarkowanie wyniosłe (umiarkowanie zakrzywione): $L/R = 0(\epsilon^{1/2})$.

3. Powłoki średnio wyniosłe (średnio zakrzywione): $L/R = 0(1)$.

4. Powłoki wyniosłe lub silnie zakrzywione: $L/R \geq 0(\epsilon^{-1})$.

Rodzaj deformacji powłoki określamy zaś przez następującą klasyfikację:

1. Małe ugięcia W i małe przemieszczenia styczne V_A

$$\max\left(\frac{W}{H}\right) \leq 0(\epsilon), \quad \max\left(\frac{V_A}{H}\right) \leq 0(\epsilon), \quad A=1, 2.$$

2. Umiarkowanie duże ugięcia i małe przemieszczenia styczne

$$\max\left(\frac{W}{H}\right) \leq 0(1), \quad \max\left(\frac{V_A}{H}\right) \leq 0(\epsilon), \quad A=1, 2.$$

3. Umiarkowanie duże ugięcia i przemieszczenia styczne

$$\max\left(\frac{W}{H}\right) \leq 0(1), \quad \max\left(\frac{V_A}{H}\right) \leq 0(1), \quad A=1, 2.$$

4. Duże ugięcia i małe przemieszczenia styczne

$$\max\left(\frac{W}{H}\right) \leq 0(\epsilon^{-1}), \quad \max\left(\frac{V_A}{H}\right) \leq 0(\epsilon), \quad A=1, 2.$$

5. Duże ugięcia i umiarkowanie duże przemieszczenia styczne

$$\max\left(\frac{W}{H}\right) \leq 0(\epsilon^{-1}), \quad \max\left(\frac{V_A}{H}\right) \leq 0(1), \quad A=1, 2.$$

(²) Pojęcie wzorcowej fali deformacji jest znane w literaturze; por. m.in. [9 i 10]. Wprowadza się je w celu oszacowania wielkości gradientu wektora przemieszczenia $0(U_{d/r}) = 0(U_d/L)$.

6. Duże ugięcia i przemieszczenia styczne

$$\max \left(\frac{W}{H} \right) \leq 0 (\varepsilon^{-1}), \quad \max \left(\frac{V_A}{H} \right) \leq 0 (\varepsilon^{-1}), \quad A=1, 2.$$

Wspomniana na wstępie weryfikacja teorii Love'a-Kirchhoffa omówiona szczegółowo w [11] sprowadza się do przyjęcia następujących założeń (które są mniej ograniczające niż klasyczne założenia teorii Love'a-Kirchhoffa).

1. Powłoka jest cienka, tzn. jej grubość jest wielkością pomijalnie małą w porównaniu z najmniejszym promieniem krzywizny $H/R \ll 1$.
2. Składowe wektora przemieszczeń są analitycznymi funkcjami zmiennej w kierunku normalnym do powierzchni środkowej powłoki.
3. Odształcenia poprzeczne są pomijalnie małe.
4. Odształcenie plastyczne zachodzi bez zmian objętości.

Należy podkreślić że z powyższych założeń (w przeciwieństwie do założeń Love'a-Kirchhoffa) nie wynika ani płaskość przekroju, ani niewydłużalność elementu normalnego do powierzchni środkowej powłoki.

Formułując równania teorii powłok plastycznych przy skończonych przemieszczeniach i odształceniach, posługując się będziemy opisem Lagrange'a, tzn. odnosić będziemy wszystkie wielkości do niezdeformowanej konfiguracji powłoki. Zalety opisu Lagrange'a były omawiane m.in. w pracach [12 i 18].

W przyjętym opisie właściwy dobór zmiennych (odpowiedniej miary naprężenia odpowiadającej przyjętej mierze odształcenia) określa funkcja dysypacji [13]. Na jednostkę objętości nieściśliwego materiału dysypacja wynosi:

$$(2.1) \quad \bar{D} = \sigma^{IJ} d_{IJ} = S^{KL} \dot{E}_{KL}$$

odpowiednio w opisie przestrzennym i materialnym, przy czym σ jest tensorem naprężenia Cauchy'ego, d tensorem prędkości deformacji, E tensorem odształceń Greena, S drugim (symetrycznym) tensorem naprężeń Pioliiego-Kirchhoffa. Wzór (2.1) wskazuje, że tensory S i E stanowią właściwy układ zmiennych dla określenia procesu plastycznego płynięcia w opisie materialnym (Lagrange'a), podczas gdy w opisie przestrzennym (Eulera) właściwym układem zmiennych jest σ i d .

Jeżeli przez U oznaczymy wektor przemieszczenia, to składowe tensora odształcenia Greena E określone są następującym wzorem:

$$(2.2) \quad 2E_{KL} = U_{K||L} + U_{L||K} + U_{M||K} U^M{}_{||L},$$

gdzie symbol $||$ oznacza kowariantne różniczkowanie przestrzenne względem współrzędnych X^K określających położenie punktu w chwili początkowej. Indeksy oznaczone literami łącińskimi przybierają wartości 1, 2, 3, greckimi zaś wartości 1, 2.

W przyjętym układzie współrzędnych linie parametryczne $X^A = \text{const}$ tworzą siatkę na powierzchni środkowej, a X^3 oznacza współrzędną mierzoną w kierunku zewnętrznym normalnej do powierzchni środkowej.

Zgodnie z przyjętym założeniem 2) o analityczności składowych U_K możemy przedstawić je w postaci następującego szeregu potęgowego:

$$(2.3) \quad \begin{aligned} U_r &= V_r(X^A) + X^3 \beta_r(X^A) + (X^3)^2 \gamma_r(X^A) + \dots, \\ U_3 &= W(X^A) + X^3 \beta_3(X^A) + (X^3)^2 \gamma_3(X^A) + \dots, \end{aligned}$$

przy czym wobec założenia 1) pominiemy w dalszych rozważaniach wyrazy wyższego rzędu ze względu na X^3 .

Po podstawieniu (2.3) do (2.2) oraz zamianie różniczkowania kowariantnego w bazie przestrzennej przez oznaczone symbolem $|$, różniczkowanie kowariantne w bazie związanej z powierzchnią środkową otrzymujemy składowe tensora odkształcenia Greena:

$$(2.4) \quad E_{KL} = A_{KL} + X^3 K_{KL},$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_{4r} &= V_{(A|r)} - B_{Ar} W + \frac{1}{2} (W_{|A} W_{|r} + B_A^\Phi B_{\Phi r} W^2 + V_{(A}^\Phi V_{\Phi|r)} - B_A^\Phi B_r^\Phi V_\Phi V_\Phi) + \\ &\quad + B_{(A}^\Phi V_\Phi W_{|r)} - B_{(A}^\Phi V_{\Phi|r)} W, \\ A_{43} &= \frac{1}{2} (\beta_A + W_{|A} + B_A^\Phi V_\Phi + V_{|A}^\Phi \beta_\Phi - B_A^\Phi \beta_\Phi W + W_{|A} \beta_3 + B_A^\Phi V_\Phi \beta_3), \end{aligned}$$

$$(2.5) \quad A_{33} = \beta_3 + \frac{1}{2} (\beta^A \beta_A + \beta_3^2),$$

$$\begin{aligned} K_{4r} &= \beta_{(A|r)} - B_{Ar} \beta_3 + V_{(A}^\Phi \beta_{\Phi|r)} - B_{(A}^\Phi \beta_{\Phi|r)} W + B_{(A}^\Phi B_{\Phi r)} W \beta_3 - \\ &\quad - B_{(A}^\Phi V_{\Phi|r)} \beta_3 + W_{(A} \beta_{3|r)} + B_{(A}^\Phi V_\Phi \beta_{3|r)} + B_{(r}^\Phi W_{|A)} \beta_\Phi + B_{(A}^\Phi B_r^\Phi) V_\Phi \beta_\Phi, \\ K_{43} &= \frac{1}{2} (\beta_{3|A} + B_A^\Phi \beta_\Phi - B_A^\Phi \beta_\Phi \beta_3 + \beta_3 \beta_{3|A} + B_A^\Phi \beta_\Phi \beta_3 + \beta_{|A}^\Phi \beta_\Phi) + \\ &\quad + \gamma_A + \gamma_\Phi V_{|A}^\Phi - 2B_A^\Phi \gamma_\Phi W + \gamma_3 W_{|A} + B_A^\Phi \gamma_3 V_r, \\ K_{33} &= 2\gamma_3 - B_\Phi^r \beta_r \beta^\Phi + 2\gamma_\Phi \beta^\Phi + 2\gamma_3 \beta_3. \end{aligned}$$

Przez A_{Ar} oznaczono pierwszą, a przez B_{Ar} drugą podstawową formę powierzchni środkowej.

Aby opisać stan odkształcenia powłoki jedynie przez składowe przemieszczeń punktów powierzchni środkowej, należy wyznaczyć β_K i γ_K jako funkcje W i V_A . W tym celu wykorzystujemy założenia 3) i 4). (Dokładna metoda postępowania podana w pracy [11]).

Jednak otrzymana w ten sposób postać składowych tensora odkształceń jest zbyt skomplikowana, aby mogła znaleźć praktyczne zastosowanie przy otrzymywaniu rozwiązań metodami analityczno-numerycznymi.

Systematycznie badając rząd wielkości poszczególnych składowych w związkach odkształceniowo-przemieszczeniowych, a następnie pomijając wyrazy, które w stosunku do wyrazu maksymalnego są rzędu ε^2 lub wyższego, otrzymujemy dla określonego kształtu (wyniosłości) powłoki oraz dla określonego zakresu przemieszczeń,

odpowiednie uproszczone związki geometryczne. W pracy [11] wyprowadzono w ten sposób związki geometryczne dla 20 przypadków zawierających wszystkie określone poprzednio rodzaje deformacji oraz początkowej wyniosłości powłok.

W tabelcy 1 przedstawiono kilka z nich szczególnie charakterystycznych.

Tabela 1

Lp.	Typ powłoki	Typ deformacji	H/R	L/R	W/R	V/H	A_{AR}	K_{AR}
1.1	Cienkie, mało wyniosłe	Umiarkowane W Małe V_A	ε^2	ε	1	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ R}$	$-W_{ AR}$
1.2		Duże W Małe V_A	ε^2	ε	ε^{-1}	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ R}$	$-W_{ AR} + W_{ AR} \times$ $\times W_{ A} W_{ R} A_{AR}^{\circ}$
2.1	Cienkie, umiarkowane wyniosłe	Umiarkowane W Małe V_A	ε^2	$\varepsilon^{1/2}$	1	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ R}$	$-W_{ AR} - B_{AR}^{\circ} \times$ $\times V_{\phi} + B_{(A}^{\circ} V_{\phi R)} +$ $+ B_{AR} V_{ \phi}^{\circ}$
2.2		Duże W Małe V_A	ε^2	$\varepsilon^{1/2}$	ε^{-1}	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ R} +$ $+\frac{1}{2} B_A^{\circ} B_{\phi R} W^2$	$-W_{ AR}$
3.1	Cienkie, średnio wyniosłe	Umiarkowane W Małe V_A	ε^2	1	1	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W$	$-W_{ AR} - B_{AR}^{\circ} \times$ $\times V_{\phi} - B_{(A}^{\circ} V_{\phi R} +$ $+ B_{AR} (V_{ \phi}^{\circ} - B_{\phi}^{\circ} W)$
3.2		Duże W Małe V_A	ε^2	1	ε^{-1}	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} W_{ A} W_{ R} +$ $+\frac{1}{2} B_A^{\circ} B_{\phi R} W^2$	$-W_{ AR} - B_{AR} B_{\phi}^{\circ} W$
4.1	Cienkie, wyniosłe	Umiarkowane W Małe V_A	ε^2	ε^{-1}	1	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W$	$-W_{ AR} - B_{AR} B_{\phi}^{\circ} W$
4.2	(silnie za- krzywione)	Duże W Małe V_A	ε^2	ε^{-1}	ε^{-1}	ε	$V_{(A R)} - B_{AR} W +$ $+\frac{1}{2} B_A^{\circ} B_{\phi R} W^2$	$-W_{ AR} - B_{AR} B_{\phi}^{\circ} W$

Porównując związki określające A_{AR} i K_{AR} łatwo zauważyć różnice występujące pomiędzy tymi wzorami dla poszczególnych przypadków. I tak np. dla powłok mało wyniosłych przy umiarkowanie dużych przemieszczeniach normalnych i małych przemieszczeniach stycznych — związki geometryczne przedstawione w tabelcy 1 (p. 1.1) pokrywają się z otrzymanymi przez Donnella i Własowa. Natomiast dla powłok średnio wyniosłych oraz silnie zakrzywionych przy analogicznym polu przemieszczeń, (p. 3.1 i 5.1 w tabelcy 1) wyrazy nieliniowe we wzorach geometrycznych są na tyle małe, że mogą być pominięte. Dla zakresu dużych przemieszczeń normalnych tensor wydłużeń powierzchni środkowej zawiera wyrazy nieliniowe różne dla powłok o różnym stopniu wyniosłości. Wyraz $B_{AR} B_{\phi}^{\circ} W$ występujący we wzorze na zmianę krzywizny dla powłok średnio wyniosłych i silnie zakrzywionych (wyniosłych) powoduje np. dla powłok walcowanych konieczność uwzględnienia, przy osiowo-symetrycznej deformacji, zmiany krzywizny obwodowej.

W celu określenia właściwej dla przyjętego opisu miary sił wewnętrznych (naprężeń wypadkowych) korzystamy, podobnie jak poprzednio przy określaniu właściwej miary naprężeń, z funkcji dysypacji (2.1). Podstawiając (2.4) różniczkowa-

ne względem czasu do (2.1) oraz wykorzystując założenia 1), 3) i 4), możemy energię dysypowaną odniesioną do jednostki niezdeformowanej powierzchni środkowej przedstawić w postaci

$$(2.6) \quad D = \int_{-H/2}^{+H/2} \bar{D} dX^3 = \int_{-H/2}^{+H/2} [(S^{4r} - G^{4r} S^{33}) \dot{A}_{4r} + (S_{4r} - G_{4r} S^{33}) X^3 \dot{K}_{4r}] dX^3,$$

gdzie G^{4r} jest tensorem metrycznym w przyjętym układzie współrzędnych.

Powyższy wzór możemy napisać w postaci:

$$(2.7) \quad D = N^{4r} \dot{A}_{4r} + M^{4r} \dot{K}_{4r},$$

gdzie

$$(2.8) \quad N^{4r} = \int_{-H/2}^{+H/2} (S^{4r} - G^{4r} S^{33}) dX^3, \quad M^{4r} = \int_{-H/2}^{+H/2} (S_{4r} - G_{4r} S^{33}) X^3 dX^3.$$

Na podstawie (2.7) wnioskujemy, że N^{4r} i M^{4r} zdefiniowane poprzez wzory (2.8) są uogólnionymi naprężeniami odpowiadającymi uogólnionym prędkościom odkształceń \dot{A}_{4r} i \dot{K}_{4r} [11].

Równania równowagi w rozważanej teorii wyprowadzamy opierając się na zasadzie prac przygotowanych przy wykorzystaniu odpowiednich związków geometrycznych.

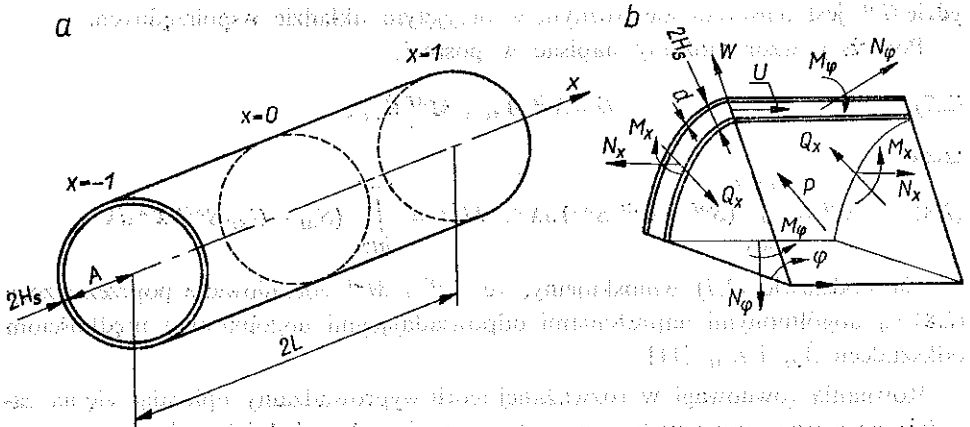
Właściwe sformułowanie związków konstytutywnych dla skończonych odkształceń w opisie materialnym jest zagadnieniem wymagającym szczególnej uwagi i będzie omówione w oddzielnej publikacji. Obecnie przedstawimy w skrócie podstawowe aspekty tego zagadnienia. W literaturze spotykamy dwa podstawowe podejścia. Pierwsze z nich polega na formułowaniu związków konstytutywnych w zmiennych opisu Eulera (tzn. warunku plastyczności w przestrzeni składowych tensora naprężeń Cauchy'go σ oraz stowarzyszonego z nim prawa płynięcia, które określa składowe tensora prędkości deformacji d). Następnie transformujemy przyjęte w ten sposób związki do zmiennych opisu Lagrange'a, czyli S i E .

Drugie podejście polega na formułowaniu warunku plastyczności bezpośrednio w przestrzeni naprężeń Pioliiego-Kirchhoffa w podobnej postaci jak w przestrzeni naprężeń Cauchy'ego (por. np. [12 i 13]). Wówczas składowe tensora prędkości deformacji Greena określone są przez stowarzyszone prawo płynięcia z tak przyjętym warunkiem granicznym.

Obydwa podejścia prowadzą do definicji różnych materiałów, przy tym do opisu metali konstrukcyjnych, z fizycznego punktu widzenia, wydaje się być bardziej uzasadnione podejście pierwsze. Podejście drugie natomiast prowadzi do znacznie prostszej postaci związków konstytutywnych wyrażonych za pomocą zmiennych opisu Lagrange'a i dlatego zastosowano je w przedstawionym poniżej przykładzie. Przyjęcie rozważań takiego modelu pewnego „hipotetycznego” materiału usprawiedliwia fakt, że głównym celem obecnej pracy jest badanie wpływu początkowego kształtu powłoki (z punktu widzenia jej wyniosłości) na postać przybliżonych wzorów określających wielkości statyczne i kinematyczne powłoki.

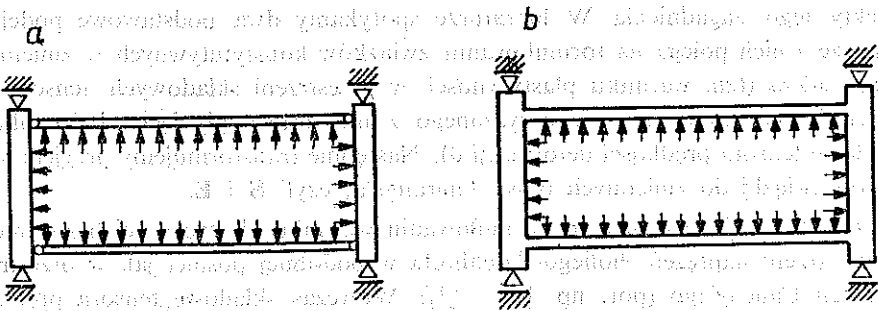
3. POWŁOKA WALCOWA. PRZYKŁAD ROZWIĄZANIA

Jako przykład rozpatrzmy zachowanie się kołowo-symetrycznej, zamkniętej powłoki walcowej o promieniu A i długości $2L$, poddanej działaniu równomiernie rozłożonego, wewnętrznego obciążenia nominalnego (odniesionego do jednostki pola powierzchni niezdeformowanej) ⁽³⁾ (rys. 1). Brzegi powłoki połączone są prze-



Rys. 1. a) Powłoka walcowa, b) element powłoki walcowej

gubowo lub w sposób sztywny z przesuwanymi dnami (rys. 2). Środek walcowanego układu współrzędnych przyjmujemy w środku powłoki.



Rys. 2. Powłoka walcowa: a) o brzegach przegubowo połączonych z dnem, b) o brzegach utwierdzonych w dnie

Stan naprężenia w ściance powłoki określony jest przez siły wewnętrzne Pioliego-Kirchhoffa N_{xx} , $N_{\varphi\varphi}$, M_{xx} , $M_{\varphi\varphi}$, które, jak pokazano poprzednio, są uogólnionymi naprężeniami odpowiadającymi uogólnionym odkształceniom A_{xx} , $A_{\varphi\varphi}$, K_{xx} , $K_{\varphi\varphi}$.

⁽³⁾ Przyjęcie tego rodzaju obciążenia (aczkolwiek w praktyce znacznie rzadziej spotykanego niż ciśnienie hydrostatyczne) prowadzi do daleko prostszych wzorów wyrażonych za pomocą zmiennych opisu Lagrange'a. Aby nie zaciemniać istoty zagadnienia, polegającego na ilustracji konsekwencji korekty związków geometrycznych, ograniczymy się w tej pracy do przypadku obciążenia nominalnego.

Kinematykę powłoki określają składowe wektora przemieszczenia punktów powierzchni środkowej: W — w kierunku radialnym i U — w kierunku tworzącej.

Rozważamy powłoki o przekroju trójwarstwowym typu sandwichowego z materiału sztywno-idealnie plastycznego. Jako kryterium uplastycznienia przyjmujemy warunek plastyczności Treski.

Rozwiązanie wyżej sformułowanego zadania dla przypadków 1.1 i 2.1 tablicy 1, czyli dla powłok mało i umiarkowanie wyniosłych przy umiarkowanie dużych ugięciach i małych przemieszczeniach stycznych, było otrzymane w pracy [6].

Rozwiążemy to samo zadanie dla przypadku 2.2 tablicy 1, czyli dla powłoki umiarkowanie wyniosłej, przy dużych ugięciach i małych przemieszczeniach stycznych. Zakładając kołowo-symetryczną postać deformacji związku geometryczne napisane w walcowym układzie współrzędnych x, φ, r sprowadzą się do następującej postaci ⁽⁴⁾:

$$(3.1) \quad \lambda_x = u' + \frac{w'^2}{4\alpha h}, \quad \kappa_x = \frac{w''}{2\alpha},$$

$$\lambda_\varphi = w + \frac{w^2}{2}, \quad \kappa_\varphi = 0,$$

gdzie

$$(3.2) \quad x = \frac{X}{L}, \quad w = \frac{W}{A}, \quad u = \frac{U}{L},$$

$$\alpha = \frac{L^2}{2AH}, \quad h = \frac{H}{A}, \quad \kappa_x = HK_{xx}, \quad \lambda_x = A_{xx}, \quad \lambda_\varphi = A_{\varphi\varphi},$$

gdzie d oznacza grubość warstw zewnętrznych, $2H$ grubość warstwy środkowej, przecinkiem zaś oznaczono różniczkowanie względem współrzędnej x . Długość wzorcowej fali deformacji L pokrywa się w tym przypadku z długością powłoki.

Z tablicy 1 wynika, że rozpatrując analogiczny przykład dla powłok dłuższych (w tablicy określonych jako średnie wyniosłe — przypadek 3.2 i wyniosłe — przypadek 4.2) należy uwzględnić zmianę krzywizny obwodowej, która wynosi $\kappa_\varphi = w$.

Różniczkując równanie (3.1) względem czasu otrzymujemy wzory dla prędkości odkształceń:

$$(3.3) \quad \dot{\lambda}_x = \dot{u}' + \frac{w' \dot{w}'}{2\alpha h}, \quad \dot{\kappa}_x = \frac{\dot{w}''}{2\alpha},$$

$$\dot{\lambda}_\varphi = \dot{w} + w\dot{w}, \quad \dot{\kappa}_\varphi = 0.$$

Aby w proponowanej teorii energetyczne zasady zachowania pozostały spełnione w sposób ścisły, równania równowagi wyprowadzimy dla pola prędkości odkształceń określonego równaniami (3.3), stosując zasadę prac przygotowanych w formie

$$(3.4) \quad D_{\text{ext}} = D_{\text{int}},$$

⁽⁴⁾ Związki geometryczne Donnella-Własowa (stosowane w pracy [6]) nie zawierają wyrazu $\frac{w^2}{2}$ we wzorze na λ_φ .

gdzie D_{ext} oznacza moc przygotowaną sił powierzchniowych i brzegowych, a D_{int} jest mocą uogólnionych naprężeń (określaną przez jednostkową dysypację wzorem (2.7)).

Wprowadzając następujące wielkości bezwymiarowe:

$$(3.5) \quad n_x = \frac{N_x}{2\sigma_0 d}, \quad n_\phi = \frac{N_\phi}{2\sigma_0 d}, \quad m_x = \frac{M_x}{2\sigma_0 H d},$$

$$p = \frac{PA}{2\sigma_0 d}, \quad d_{\text{ext}} = \frac{D_{\text{ext}}}{4\pi\sigma_0 ALH}, \quad d_{\text{int}} = \frac{D_{\text{int}}}{4\pi\sigma_0 ALH},$$

oraz zdefiniowane przez wzory (3.2), otrzymujemy równanie (3.4) w postaci

$$(3.6) \quad d_{\text{ext}} = d_{\text{int}},$$

gdzie

$$(3.7) \quad d_{\text{int}} = \int_{-1}^{+1} (n_x \dot{\lambda}_x + n_\phi \dot{\lambda}_\phi + m_x \dot{\kappa}_x + m_\phi \dot{\kappa}_\phi) dx,$$

oraz

$$(3.8) \quad d_{\text{ext}} = \int_{-1}^{+1} p \dot{w} dx + \left(\bar{n}_x \dot{u} + \bar{m}_x \frac{\dot{w}'}{2\alpha} - \frac{A}{L} s \dot{w} \right) \Big|_{x=\pm 1},$$

przy czym $\bar{n}_x = \frac{\pi A^2 P}{2\pi A \cdot 2\sigma_0 d} = \frac{p}{2}$ i \bar{m}_x są danymi siłami na brzegu powłoki (stacycznymi warunkami brzegowymi), a \dot{w} daną prędkością przemieszczeń na brzegu powłoki (kinematycznymi warunkami brzegowymi).

Podstawiając (3.3) do (3.7) otrzymujemy

$$(3.9) \quad d_{\text{int}} = \int_{-1}^{+1} \left(n_x \dot{u}' + n_x \frac{w \dot{w}'}{2\alpha h} + n_\phi \dot{w} + n_\phi w \dot{w}' + m_x \frac{\dot{w}''}{2\alpha} \right) dx.$$

Następnie całkując przez części oraz wprowadzając oznaczenie

$$(3.10) \quad s \equiv -\frac{A}{L} w' n_x + \frac{L}{2A\alpha} m'_x,$$

dochodzimy do następującej postaci prędkości dysypacji energii wewnętrznej:

$$(3.11) \quad d_{\text{int}} = \int_{-1}^{+1} \left[\left(n_\phi + n_\phi w - n_x \frac{w''}{2\alpha h} + \frac{1}{2\alpha} m''_x \right) \dot{w} - n'_x \dot{u} \right] dx +$$

$$+ \left(n_x \dot{u} - \frac{A}{L} s \dot{w} + \frac{1}{2\alpha} m'_x \dot{w}' \right) \Big|_{x=\pm 1}.$$

Podstawienie (3.8) i (3.11) do (3.6) prowadzi do następującego równania:

$$(3.12) \quad \int_{-1}^{+1} \left[\left(n_\phi + n_\phi w - n_x \frac{w''}{2\alpha h} + \frac{1}{2\alpha} m''_x - p \right) \dot{w} - n'_x \dot{u} \right] dx +$$

$$+ \left[(n_x - \bar{n}_x) \dot{u} - \frac{A}{L} (\dot{w} - \dot{w}') s + \frac{1}{2\alpha} (m_x - \bar{m}_x) \dot{w}' \right] \Big|_{x=\pm 1} = 0.$$

Aby równanie (3.12) było spełnione dla wszystkich pól prędkości przemieszczeń kinematycznie dopuszczalnych musi zachodzić warunek

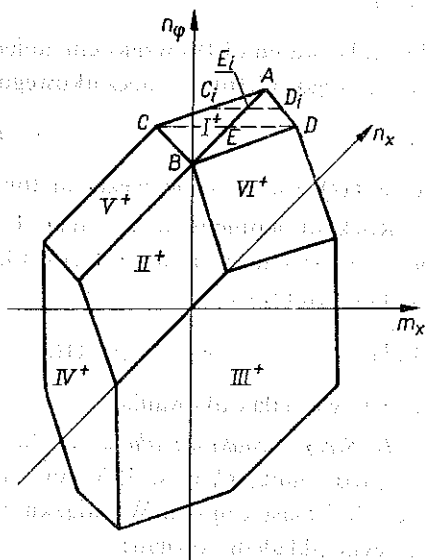
$$(3.13) \quad n_\phi - n_\phi w - \frac{1}{2h\alpha} n_x w'' + \frac{1}{2\alpha} m_x'' - p = 0, \\ n_x' = 0$$

oraz muszą być spełnione statyczne i kinematyczne warunki brzegowe.

Równania (3.13) stanowią szukany układ równań równowagi dla powłoki walcowej poddanej obciążeniu p . Równania te różnią się od stosowanych w teorii Donnella-Własowa dodatkowym członem $n_\phi w$.

Warunek graniczny Treski dla powłoki walcowej o przekroju sandwiczowym przy zerowej zmianie krzywizny obwodowej ($\kappa_\phi = 0$) można przedstawić za pomocą powierzchni składającej się z 12 obszarów płaskich określonych następującymi równaniami (rys. 3) [15]:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \text{I}^\pm & \quad n_\phi = \pm 1, \\ \text{II}^\pm & \quad n_\phi - n_x = \pm 1, \\ \text{III}^\pm & \quad -n_x + m_x = \pm 1, \\ \text{IV}^\pm & \quad -n_x - m_x = \pm 1, \\ \text{V}^\pm & \quad 2n_\phi - n_x - m_x = \pm 2, \\ \text{VI}^\pm & \quad 2n_\phi - n_x + m_x = \pm 2. \end{aligned}$$



Rys. 3. Powierzchnia plastyczności Treski dla powłoki walcowej o ścianie trójwarstwowej

W rozważanych przypadkach kinematyczne i statyczne warunki brzegowe mają postać

$$(3.15) \quad \text{dla } x=0: \quad w=w_0, \quad w'=0, \quad u=0;$$

$$(3.16) \quad \text{dla } x=\pm 1: \quad w=0, \quad n_x=p/2$$

oraz $m_x=0$ dla powłoki o brzegach przymocowanych przegubowo natomiast $m_x=1-n_x$ dla powłoki o brzegach utwierdzonych.

Warunki początkowe (dla $t=0$) mają postać

$$(3.17) \quad w=0, \quad u=0.$$

Z teorii nośności granicznej wynika, że w chwili uplastycznienia $p \geq 1$. W związku z tym oraz na podstawie (3.16)₂ zachodzi $n_x \geq 1/2$ dla $x = \pm 1$. Następnie z analizy równań równowagi pola prędkości odkształceń związanego stowarzyszonym prawem płynięcia z warunkiem plastyczności (3.14) oraz warunków brzegowych wynika, że w trakcie plastycznych deformacji w powłoce powstają następujące dwie strefy: I strefa brzegowa dla $1 \geq x \geq \xi$ oraz II strefa środkowa dla $\xi \geq x \geq 0$.

I Strefa brzegowa dla $\xi \leq x \leq 1$. Występujący tu stan naprężenia reprezentowany jest na rys. 3 przez odcinek $\overline{C_1 E_1}$ dla przypadku powłoki połączonej przegubowo z płytami dna, a przez odcinek $\overline{C_1 D_1}$ dla przypadku powłoki zamocowanej. Odpowiada to I⁺ płatowi powierzchni plastyczności o równaniu

$$(3.18) \quad n_\varphi = 1.$$

Na podstawie prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem (3.18) otrzymujemy $\dot{\kappa}_x = 0$.

Wykorzystując powyższy warunek w równaniu (3.3)₂ otrzymujemy

$$(3.19) \quad \dot{w}'' = 0.$$

Po scałkowaniu (3.19) względem zmiennej x i czasu oraz wykorzystaniu warunków brzegowego (3.16)₁ i początkowego (3.17)₁ otrzymujemy

$$(3.20) \quad w = B(t)(1-x),$$

gdzie $B(t)$ jest na razie nieznaną funkcją czasu.

Rozkład momentów w strefie I otrzymujemy z równania równowagi (3.13)₁ przy wykorzystaniu równań (3.18) (3.20) i (3.16)₃ dla powłoki o brzegach połączonych przegubowo:

$$(3.21) \quad m_x = \alpha(p-1)(x^2-1) + \frac{B\alpha}{3}(x-1)^3 + C(x-1),$$

gdzie C jest stałą całkowania.

II Strefa środkowa dla $\xi \geq x \geq 0$. W strefie tej stan naprężenia reprezentowany jest przez punkt C_1 (rys. 3) leżący na krawędzi przecięcia się I⁺ i III⁻ płatów powierzchni plastyczności. W związku z tym warunek graniczny określony jest następującym układem równań:

$$(3.22) \quad n_\varphi = 1, \quad -n_x + m_x = -1.$$

Z równania równowagi (3.13)₂ i z warunku granicznego (3.22)₂ wynika, że w tej strefie

$$(3.23) \quad m_x'' = 0.$$

Podstawiając (3.22)₁ i (3.23) do (3.13)₁ otrzymujemy

$$(3.24) \quad 2h\alpha(p-1) + 2h\alpha w + n_x w'' = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie względem w oraz wykorzystując warunki brzegowe (3.15)₁ i (3.15)₂ dla wyznaczenia stałych całkowania dochodzimy do następującego wzoru określającego ugięcie w środkowej strefie powłoki:

$$(3.25) \quad w = \frac{1}{2} [w_0 - (p-1)](e^{Dx} + e^{-Dx}) + p - 1,$$

gdzie $D = 2\sqrt{h\alpha/p}$.

Moment zginający m_x w strefie środkowej określony jest równaniem (3.22)₂.

Żądając spełnienia dla $x=\xi$ następujących warunków ciągłości:

$$(3.26) \quad w] = 0, \quad w'] = 0, \quad m_x] = 0, \quad m_x'] = 0,$$

gdzie] oznacza skok poprzedzającej funkcji, dochodzimy do układu równań określającego rozwiązanie dla powłoki walcowej o brzegach połączonych przegubowo z dnami w postaci:

$$(3.27) \quad w_0 = (p-1) \left(1 - \frac{2\sqrt{E}}{F} \right),$$

$$p = 1 + \frac{3F}{3F + 2\alpha(\xi-1)^2(F+2E+2)};$$

dla $\xi \leq x \leq 1$

$$(3.28) \quad w = B(1-x),$$

$$m_x = \alpha(p-1)(x^2-1) + \frac{B\alpha}{3}(x-1)^3 + C(x-1);$$

dla $0 \leq x \leq \xi$

$$(3.29) \quad w = \frac{1}{2} [w_0 - (p-1)] (e^{Dx} + e^{-Dx}) + p-1,$$

$$m_x = \frac{p}{2} - 1,$$

$$(3.30) \quad n_x = \frac{p}{2}, \quad n_\phi = 1,$$

gdzie

$$B = \frac{3[2\alpha(1-p)(\xi-1)^2 - p + 2]}{4\alpha(\xi-1)^3},$$

$$(3.31) \quad C = \frac{\alpha(p-1)(1-\xi)(3+\xi) + 3(p-2)}{2(\xi-1)}, \quad E = e^{2D\xi},$$

$$D = 2\sqrt{\frac{\alpha h}{p}}, \quad F = E + 1 + (E-1)(1-\xi)D.$$

Analogiczne postępowanie przy zamianie warunku brzegowego (3.16)₃ na warunek (3.16)₄ — prowadzi do rozwiązania dla przypadku powłoki walcowej o brzegach utwierdzonych w płytach dennych:

$$(3.32) \quad w_0 = (p-1) \left(1 - \frac{2\sqrt{E}}{F} \right),$$

$$p = 1 + \frac{3F}{3F + \alpha(\xi-1)^2(F+2E+2)};$$

dla $\xi \leq x < 1$

$$(3.33) \quad w = B(1-x),$$

$$m_x = \alpha(p-1)(x^2-1) + \frac{B\alpha}{3}(x-1)^3 + C(x-1) + 1 - \frac{p}{2};$$

dla $0 \leq x \leq \xi$

$$(3.34) \quad w = \frac{1}{2} [w_0 - (p-1)] (e^{Dx} + e^{-Dx}) + p - 1,$$

$$(3.35) \quad m_x = \frac{p}{2} - 1,$$

$$(3.35) \quad n_x = \frac{p}{2}, \quad n_\varphi = 1.$$

Dla stanu błonnego (który realizuje się, gdy momenty zginające osiągną wartości zerowe) na podstawie otrzymanego rozwiązania lub bezpośrednio całkując równania równowagi przy wykorzystaniu warunków granicznych (3.22) i warunków brzegowych (3.15) i (3.16) otrzymujemy

$$(3.36) \quad \begin{aligned} p &= 2, \\ w_0 &= 1 - \frac{2e^{\sqrt{2\alpha}h}}{1 + e^{2\sqrt{2\alpha}h}}, \\ w &= \frac{1}{2} (w_0 - 1) (e^{Dx} + e^{-Dx}) + 1, \\ m_x &= 0, \quad n_x = n_\varphi = 1 \end{aligned}$$

zarówno dla powłoki o brzegach połączonych z dnami przegubowo jak i w sposób sztywny.

4. Dyskusja wyników

Równania (3.27) dla powłoki o brzegach połączonych przegubowo oraz równania (3.32) dla powłoki o brzegach zamocowanych wyznaczają zależności $p = p(w_0)$. Zawierają one dwa parametry określające kształt powłoki: h — grubość i α wyniosłość.

Ze względu na skomplikowaną postać tych wzorów końcowe wyniki dla poszczególnych przypadków kształtu powłoki zostały wyznaczone za pomocą komputera MIŃSK-32. Program ułożono w języku FORTRAN 32.

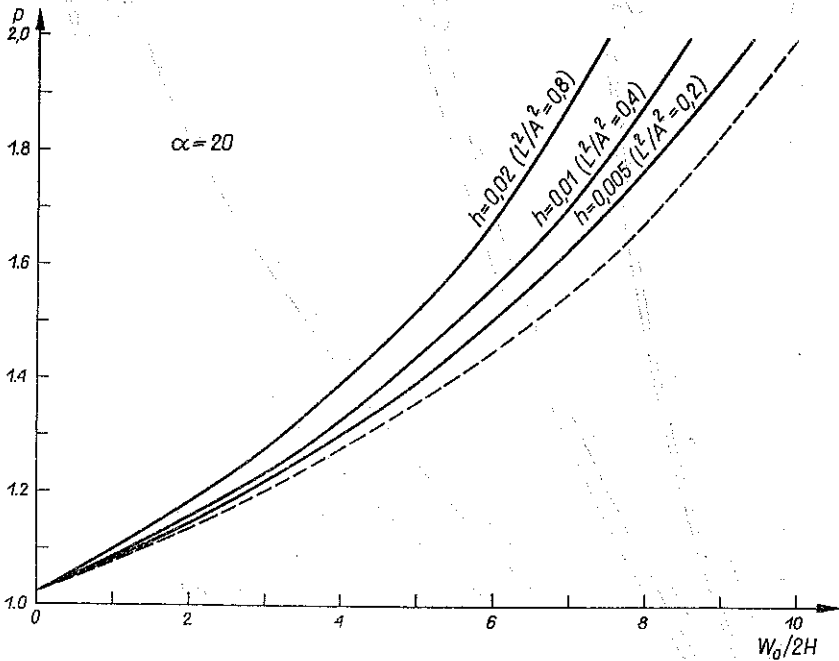
Otrzymane wielkości $p = p(w_0/2h)$ dla powłoki o brzegach połączonych przegubowo dla $\alpha = 20$ oraz kilku wartości parametru $h = 0,02; 0,01; 0,005$, co odpowiada $L^2/A^2 = 0,8; 0,4; 0,2$, przedstawiono na rys. 4.

Rozwiązanie dla analogicznego przypadku powłoki walcowej otrzymane w [6] (na podstawie związków geometrycznych Donnella-Własowa i odpowiadających im równań równowagi) dla porównania przedstawiono na rys. 4 linią przerywaną. Związek $p = p(w_0/2h)$ zależy wówczas tylko od jednego parametru α charakteryzującego kształt powłoki.

Z porównania wykresów widzimy, że przy przejściu powłoki w stan błonowy maksymalne ugięcia określone równaniem (3.36)₂ są od 7% do 25% mniejsze od maksymalnych ugięć otrzymanych w [6].

Na rys. 5 przedstawiono analogiczny wykres $p=p(w_0/2h)$ dla $h=0,01$ oraz kilku wartości parametru α . Linia ciągłą oznaczono tu rozwiązania dla powłok o brzegach połączonych przegubowo, linią kropka — kreska rozwiązania dla powłok o brzegach zamocowanych. Rozwiązania otrzymane w [6] dla powłok o brzegach połączonych przegubowo oznaczono linią przerywaną.

Dla wyraźniejszego podkreślenia różnic pomiędzy wynikami otrzymanymi w [6] (na podstawie teorii Love'a-Kirchhoffa i równań Donnella-Własowa) oraz wynikami otrzymanymi na podstawie opracowanej tu teorii, przedstawiono na rys. 6 wykres maksymalnego ugięcia w_0 w chwili przejścia powłoki w stan błonny w zależności od parametru α . Linia ciągłą oznaczono krzywą otrzymaną na podstawie równania $(3.36)_2$ dla $h=0,01$, linią zaś przerywaną analogiczny wykres otrzymany w [6].



Rys. 4. Zależności obciążenia – ugięcie dla powłoki walcowej o brzegach połączonych przegubowo z dnem

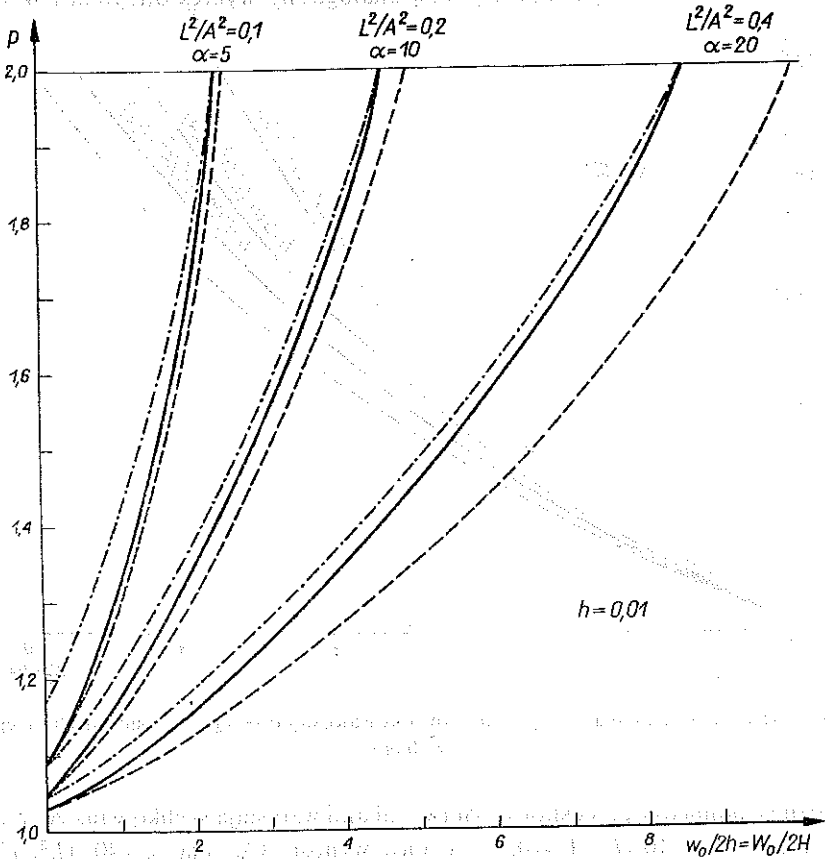
Różnice pomiędzy przedstawionymi wynikami wzrastają szybko wraz ze wzrostem α . I tak dla $\alpha=10$ ($L^2/A^2=0,2$) różnica wynosi 8% dla $\alpha=40$ ($L^2/A^2=0,4$) już 25%.

Stąd wniosek, że dla opisu zachowania się powłok walcowych mało wyniosłych ($L/A=0$ (ϵ), tj. $\alpha \leq 5$), których przejście w stan błonny następuje przy ugięciach rzędu grubości powłoki, teoria Donnella-Własowa (przy założeniach Love'a-Kirchhoffa) jest dostatecznie ścisła dla potrzeb inżynierskich. Natomiast dla analizy powłok na tyle długich, że $L/A=0$ ($\epsilon^{1/2}$) ($5 \leq \alpha \leq 50$), dla których przejście w stan błonny następuje przy ugięciach rzędu kilku lub kilkunastu grubości, przedstawiona teoria daje istotne poprawienie rozwiązań.

Wyniki te potwierdzają (dla rozpatrywanego zakresu parametrów) poprawność i potrzebę analizy przeprowadzonej w punkcie 2 oraz klasyfikacji związków geometrycznych przedstawionych w tablicy 1.

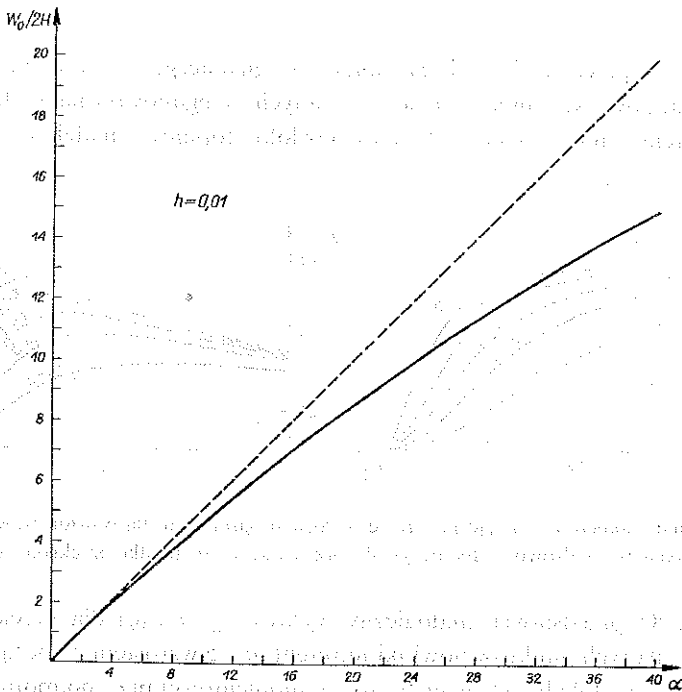
Dla powłok średnio wyniosłych i wyniosłych (tzn. gdy $L \geq R$) stosowane związki geometryczne (a następnie równania równowagi) należy w dalszym ciągu zmodyfikować (zgodnie z tablicą 1), aby otrzymane rozwiązanie we właściwy sposób opisywało rzeczywiste zachowanie się powłok.

Rysunek 7 ilustruje sposób deformacji powłoki o brzegach przymocowanych przegubowo w poszczególnych stadiach rozwoju plastycznego płynięcia opisanego przez równania $(3.28)_1$ i $(3.29)_1$ dla $\alpha = 20$ i $h = 0,01$.



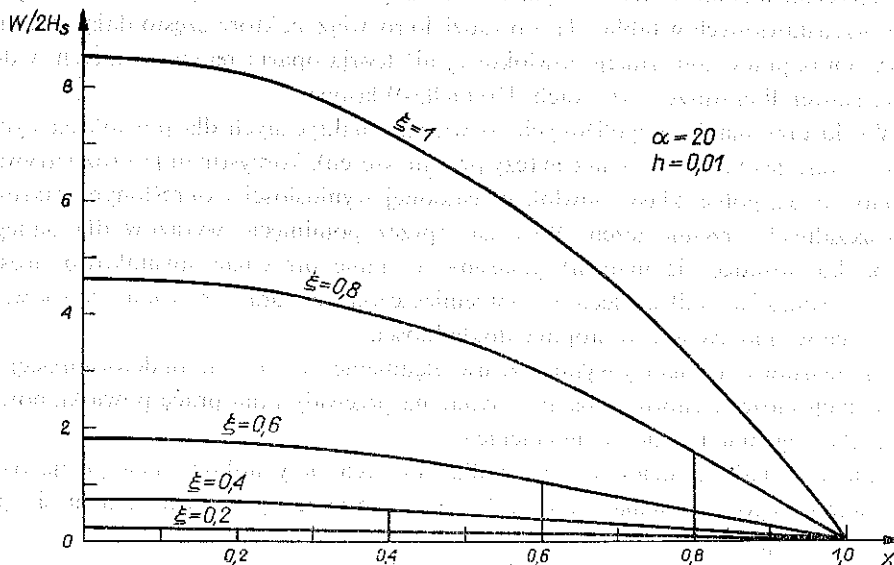
Rys. 5. Zależności obciążenia - ugięcie dla powłok walcowych

W strefie brzegowej (dla $\xi \leq x \leq 1$) profil ugięcia jest liniową funkcją zmiennej x (równanie $(3.28)_1$). Następuje tu obrót powłoki bez wydłużeń w kierunku x ($\lambda_x = 0$). W strefie środkowej (dla $0 \leq x \leq \xi$), która w chwili uplastycznienia reprezentowana jest punktem, a następnie ze wzrostem obciążenia propaguje się w kierunku podpór obejmując w chwili osiągnięcia stanu bezmomentowego całą powłokę; profil naprężenia jest eksponentialną funkcją zmiennej x (równanie $(3.29)_1$).



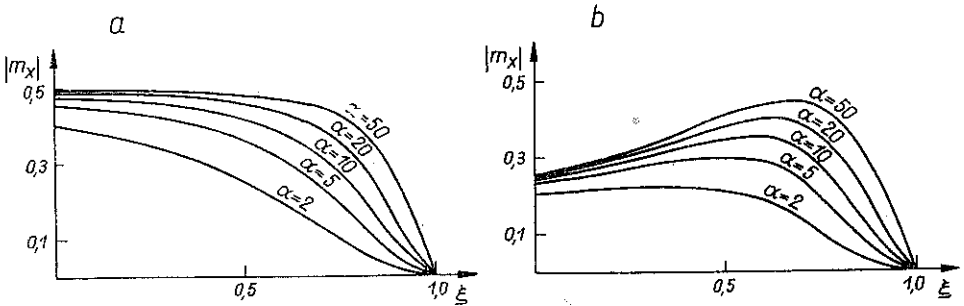
Rys. 6. Wpływ kształtu (wyniosłości) powłoki na maksymalną wartość ugięcia w chwili przejścia w stan błonowy.

— Krzywa otrzymana na podstawie równania (3.8) dla $h=0,01$; — — — analogiczna zależność otrzymana w [6] na podstawie równań teorii Donnell'a-Własowa



Rys. 7. Rozkład ugięć wzdłuż osi powłoki walcowej dla $h=0,01$

Rysunek 8a przedstawia wykres momentu zginającego m_x w zależności od parametru ξ dla powłoki o brzegach zamocowanych przegubowo (dla $x=0$). Widzimy, że ze wzrostem ξ moment m_x w środku powłoki stopniowo maleje do zera.



Rys. 8. Zmiana momentu zginającego m_x ze wzrostem parametru dla powłok walcowych o brzegach połączonych przegubowo z dnem; a) dla przekroju $x=0$, b) dla przekroju $x=0,7$

Rysunek 8b przedstawia analogiczny wykres $m_x=m_x(\xi)$ dla przekroju $x=0,7$. Widzimy, że dla tych punktów powłoki moment m_x ze wzrostem ξ początkowo rośnie (związane jest to z lokalizowaniem się strefy momentowej przy podporach), po czym maleje do zera dla $\xi=1$.

5. WNIOSKI

Na podstawie przytoczonych rozważań można wnioskować, że proponowana geometrycznie nieliniowa teoria (oparta na zmodyfikowanych związkach geometrycznych przedstawionych w tablicy 1) prowadzi do rozwiązań, które często dają znacznie lepszy obraz pracy konstrukcji powłokowej niż teoria oparta na stosowanych w dotychczasowej literaturze związkach Donnella-Własowa.

W celu otrzymania przybliżonych rozwiązań analitycznych dla powłok plastycznych w zakresie dużych odkształceń (czy przemieszczeń), korzystnym jest rozpatrywać osobno poszczególne klasy powłok o ustalonej wyniosłości i określonym zakresie dopuszczalnych przemieszczeń. Wówczas (przez pominięcie wyrazów dla danego przypadku dostatecznie małych), jesteśmy w stanie otrzymać stosunkowo prostą postać związków odkształceniowo-przemieszczeniowych oraz równań równowagi przy zachowaniu żądanego stopnia dokładności.

Z przedstawionej analizy wynika, że uwzględnienie zmian kształtu deformującej się konstrukcji może w istotny sposób wpłynąć na przewidywaną pracę powłoki, powodując tzw. «geometryczne wzmocnienie».

Należy jednak spodziewać się, że dla pewnych przypadków wystąpi zjawisko „geometrycznego osłabienia”, co wiąże się z niestatecznym zachowaniem się powłoki [4 i 16].

Dla pewnych typów powłok ugięcia rzędu kilku czy kilkunastu grubości powodują tak znaczny wzrost sił osiowych z równoczesnym zmniejszeniem wpływu momentów zginających, że w rozważaniach można z powodzeniem stosować teorię błonową.

Wniosek ten jest również ważny, ponieważ często ze względu na skomplikowaną postać stawianego problemu przy dużych odkształceniach, w celu uzyskania efektywnego rozwiązania, korzystne jest przyjęcie stanu błonowego (np. [17]).

W zakończeniu należy jeszcze podkreślić, że przedstawiona w pracy analiza została przeprowadzona z punktu widzenia uwzględnienia wpływu geometrycznej nieliniowości jedynie w związkach opisujących statykę i kinematykę powłok. Natomiast związki konstytutywne zostały przyjęte w postaci tradycyjnie stosowanej w teorii nośności granicznej.

Aby otrzymane wyniki mogły znaleźć zastosowanie w praktyce inżynierskiej przy projektowaniu konstrukcji powłokowych wykonanych z takich materiałów jak np. stal czy aluminium należy krytycznie przeanalizować i ewentualnie odpowiednio zmodyfikować przyjętą postać związków konstytutywnych, aby być pewnym, że opisują one rzeczywiste własności danych materiałów. Zagadnienie to będzie tematem dalszych opracowań.

Autorzy pragną podziękować Prof. A. SAWCZUKOWI za cenne uwagi otrzymane w trakcie wykonywania pracy.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. M. DUSZEK, *Plastic analysis of cylindrical shells subjected to large deflections*, Arch. Mech. Stos., **18**, 5, 1966.
2. Ju. R. LEPIK, *Large deflections of rigid-plastic cylindrical shells under axial tension and external pressure*, Nuclear Engineering and Design, **4**, 1966.
3. Ю. Р. Лепик, *Большие прогибы жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления*, Труды в Весоюз. Конф. по теории оболочек, Тарту 1966.
4. О. Н. Шаблій, *Большие прогибы жестко-пластической пологой сферической оболочки*, Материалы летней школы по проблеме: физически и геометрически нелинейные задачи теории пластин и оболочек, Тарту 1966.
5. M. DUSZEK, *Plastic analysis of shallow spherical shells at moderately large deflections*, TUTAM Symposium Theory Thin Shells, Copenhagen 1967, Springer — Verlag, Berlin 1969.
6. M. DUSZEK, *Analiza plastyczna dwuwarstwowych powłok walcowych uwzględniająca wpływ zmiany kształtu*, Rozpr. Inżyn., **15**, 4, 1967.
7. R. H. LANCE, J. E. SOECHTING, *A displacement bounding principle in finite plasticity*, Int. J. Solid Structures, **6**, 1970.
8. M. DUSZEK, A. SAWCZUK, *Load-deflection relations for rigid-plastic cylindrical shells beyond the incipient collapse load*, Int. J. Mech. Sci., **12**, 1970.
9. H. L. DONNELL, *General thin shell displacement — strain relations*, Prec. 4-th U.S. Nat. Congress Appl. Math. 1962.
10. W. T. KOITER, *On the nonlinear theory of thin elastic shells*, Kon. Ned. Akad. Wet., Proc. Series B. Phys. Sciences, **69**, 1, 1966.
11. M. K. DUSZEK, *Geometrycznie nieliniowa teoria konstrukcji sztywno-plastycznych*, Prace IPPT Nr 42, Warszawa 1975.
12. A. SAWCZUK, *Lagrangian formulation of large deflection theory for plastic shells*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 6, 1971.
13. R. HILL, *Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time*, J. of Mech. and Physics of Solids, **7**, 1959.
14. A. E. GREEN, P. M. HAGHDI, *A general theory of an elastic-plastic continuum*, Arch. Rat. Mech. Anal., **18**, 1965.

15. P. G. HODGE, *The rigid-plastic analysis of symmetrically loaded cylindrical shells*, J. Appl. Mech., 21, 1954.
16. E. T. ONAT, *The influence of geometry changes on the load-deflection behaviour of plastic solids*, in: Plasticity, ed. by L. S. SHU and P. S. SYMONDS, Pergamon Press, 1961.
17. J. ORKISZ, *Skończone odkształcenia osiowo-symetrycznych powłok z uwzględnieniem reologicznych własności materiału*, Zesz. Nauk. Politechniki Krakowskiej, 11, Kraków 1969.
18. W. PIETRASZKIEWICZ, *Obroty skończone i opis Lagrange'a w nieliniowej teorii powłok*, Biuletyn IMP PAN, 172/880, 1976.

Резюме

АНАЛИЗ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В ОБЛАСТИ БОЛЬШИХ ПРОГИБОВ

Целью работы является разработка аналитического метода приближенных решений для пластических оболочек в области больших деформаций или перемещений. Такие решения, давая приближенную картину происходящего процесса, пригодны так с точки зрения непосредственных применений в инженерной практике, как и при применении численных методов для предварительного качественного анализа работы конструкции. Выступающие в существующей до сих пор литературе работы, связанные с рассматриваемым вопросом, опираются на уравнения Донелла-Власова достаточно точные только для оболочек очень малого вклада в области умеренно больших прогибов. В работе предложена теория, будучая обобщением теории Донелла-Власова на оболочки большого вклада и на большие прогибы. Метод иллюстрирован на примере замкнутой цилиндрической оболочки подвергнутой внутренней, равномерно распределенной, номинальной нагрузке. Полученные зависимости нагрузка-прогиб сравнены с теми зависимостями, которые получены для аналогичного примера опираясь на уравнения Донелла-Власова, получая существенное улучшение результатов.

SUMMARY

ANALYSIS OF RIGID-PLASTIC SHELLS AT LARGE DEFLECTIONS

An analytical method for approximate solutions for plastic shells at large strains and or displacements is presented. Such solutions give an approximative picture of the occurring deformation process. Moreover they are useful in immediate engineering applications and in developing numerical methods to preliminary qualitative analysis of the response of structure.

In hitherto existing literature on this subject as a rule the Donnell-Vlasov equations are used which are sufficiently exact solely for shallow shells and moderately large deflections. In this paper a theory is proposed which generalizes the Donnell-Vlasov theory to deep shells and large deflections. The method is illustrated on the example on the closed cylindrical shell subjected to internal uniformly distributed nominal load. The obtained load-deflections relations are compared with analogous ones basing on Donnell-Vlasov equations. An essential improving of the results is observed.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 maja 1977 r.