

## PLASKI PRZEPŁYW PRZEZ PRZEGRODĘ PRZEPUSZCZALNĄ W PRZEWODZIE O ŚCIANKACH RÓWNOLEGLYCH

PIOTR K I J K O W S K I I I W O N A S Z A F R A N K O W S K A (WARSZAWA)

Rozpatruje się płaski przepływ wirowy płynu nielepkiego, nieściśliwego. Obszar przepływu o postaci nieskończonego pasa ograniczony jest dwiema równoległymi ściankami i przegrodzony powierzchnią przepuszczalną. Po przekształceniu i zlinearyzowaniu równań podstawowych pojawia się dwa rozwiązania ogólne po dwóch stronach przegrody za pomocą warunków zgodności na przegrodzie. Uzyskuje się zależność między asymptotycznym profilem prędkości przed przegrodą oraz rozkładem współczynnika strat na przegrodzie i asymptotycznym profilem prędkości za przegrodą.

### 1. WSTĘP

Rozpatruje się płaski przepływ płynu spełniający następujące warunki: 1) płyn jest nielepki, 2) nieściśliwy oraz 3) pomija się siły masowe czynne.

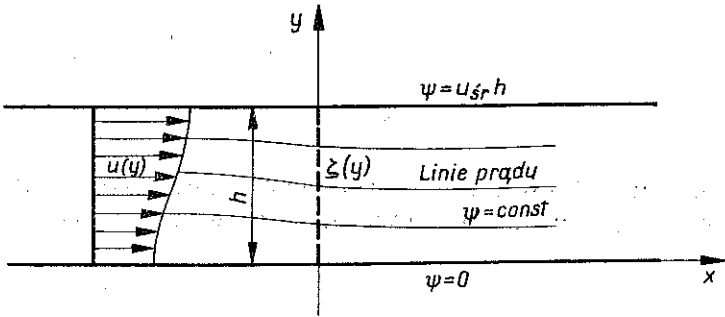
Pod nazwą przegrody przepuszczalnej rozumie się siatki, blachy perforowane otworami o różnych kształtach, ruszty itp. elementy stanowiące dodatkowy opór w przepływie. Charakteryzuje je tzw. współczynnik lokalnego spadku ciśnienia  $\zeta$  określony następująco:

$$\zeta = \frac{2\Delta p}{\rho V_{\text{śr}}^2},$$

gdzie  $\Delta p$  oznacza spadek ciśnienia na przegrodzie,  $\rho$  gęstość płynu oraz  $V_{\text{śr}}$  średnią lokalną prędkość przepływu. Zakłada się, że liczba oczek, otworów, szczelin itp. jest bardzo duża w przekroju przewodu.

Przegrody przepuszczalne zdefiniowane wyżej używane są w celu zmiany rozkładu prędkości w przewodzie, najczęściej w celu uzyskania przepływu jednorodnego, tzn. wyrównania rozkładu prędkości. Rozwiązanie równań przepływu dla takiego przypadku nie jest znane ze względu na nieciągłość przepływu w przekroju siatki.

Przedstawiona zostanie teoria stanowiąca rozwiązanie układu równań opisujących przepływ w dwóch obszarach: przed przegrodą i za przegrodą w przewodzie o ściankach równoległych, z uwzględnieniem warunków zgodności na przegrodzie (tj. w przekroju nieciągłości). Rys. 1 przedstawia schemat omawianego przepływu. Przyjęto tu następujący układ odniesienia: oś  $x$  skierowana zgodnie z kierunkiem prędkości głównej ( $\parallel$  do osi kanału), oś  $y$  jest prostopadła do osi  $x$  i leżąca w płaszczyźnie przegrody.



Rys. 1

## 2. UKŁAD RÓWNAŃ PODSTAWOWYCH

Układ równań opisujący zdefiniowany wyżej przepływ przedstawia się następująco:

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \end{aligned}$$

gdzie  $u$  i  $v$  oznaczają składowe prędkości w kierunku osi  $x$  i  $y$ . Wprowadzamy funkcję prądu  $\psi$  oraz całkę pierwszą równań ruchu (równanie Bernoulliego dla przepływów wirowych)

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -v, & \frac{\partial \psi}{\partial y} &= u, \\ \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} &= f(\psi). \end{aligned}$$

Takie określenie funkcji prądu wynika z równania ciągłości. Pamiętając o definicji funkcji prądu i wykorzystując warunki (2.2) możemy układ równań (2.1) zastąpić innym o postaci

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} &= f(\psi), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

### 3. PRZEJŚCIE DO UKŁADU WSPÓLRZĘDNYCH $\sigma, \psi$

Wprowadzamy nowe zmienne  $\sigma$  i  $\psi$  (ukośnokątne, krzywoliniowe) określane następująco:  $\sigma \equiv x$ ,  $\psi$  jest funkcją prądu.

Układ równań (2.3) napisany w nowych zmiennych  $\sigma$  i  $\psi$  wyrazi się następująco:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - v \frac{\partial u}{\partial \psi} + u \frac{\partial v}{\partial \psi} &= 0, \\ \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{p}{\rho} &= f(\psi) \\ \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \psi} \end{aligned}$$

Po wyrugowaniu ciśnienia z układu (3.1) otrzymujemy dwa równania opisujące funkcje  $u$  i  $v$ :

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - v \frac{\partial u}{\partial \psi} + u \frac{\partial v}{\partial \psi} &= 0, \\ u \frac{\partial u}{\partial \psi} + v \frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{\partial v}{\partial \sigma} &= \frac{df}{d\psi} \end{aligned}$$

gdzie  $f=f(\psi)$  jest określona warunkami brzegowymi.

### 4. LINEARYZACJA UKŁADU RÓWNAŃ (3.2)

Wprowadzamy następujące założenia linearyzacyjne:

$$(4.1) \quad u = u_{sr} + u', \quad v = v',$$

gdzie  $u_{sr} = \text{const.}$  a  $u'$  i  $v'$  są to małe rzędu wyższego wobec  $u_{sr}$ . Zakładając, że  $\partial H/\partial \sigma$  i  $\partial H/\partial \psi$  są tego samego rzędu co  $H$  ( $H$  reprezentuje zaburzenia, tj.  $u'$  lub  $v'$ ) i odrzucając małe wyższego rzędu, doprowadzamy układ (3.2) do postaci:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial \sigma} + u_{sr} \frac{\partial v'}{\partial \psi} &= 0, \\ u_{sr} \frac{\partial u'}{\partial \psi} - \frac{\partial v'}{\partial \sigma} &= \frac{df}{d\psi}. \end{aligned}$$

Tak więc przyjęliśmy dość mocne założenia linearyzacyjne, mianowicie że pochodne wielkości zaburzenia są tego samego rzędu co i same zaburzenia. Po wyrugowaniu  $v'$  układ (4.2) możemy napisać w postaci jednego równania opisującego funkcję  $u'$ :

$$(4.3) \quad \frac{1}{u_{sr}} \frac{\partial^2 u'}{\partial \sigma^2} + u_{sr} \frac{\partial^2 u'}{\partial \psi^2} = \frac{d^2 f}{d\psi^2}.$$

## 5. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA (4.3)

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$(5.1) \quad u' = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\psi) S_n(\sigma) + G(\psi).$$

Podstawiając to rozwiązanie do (4.3), możemy określić funkcję z dokładnością do pewnych dowolnych stałych

$$\begin{aligned} F_n(\psi) &= \cos(k_n \psi), \\ S_n(\psi) &= I_n e^{\pm k_n u_{sr} \sigma}, \\ G(\psi) &= \frac{f(\psi)}{u_{sr}} + C_1 \psi + C_2, \end{aligned}$$

gdzie  $k_n$  i  $I_n$  oznaczają ciągi stałych dowolnych (zakładamy  $k_n > 0$ ) a  $C_1$  i  $C_2$  stałe dowolne całkowania.

Po uwzględnieniu powyższych wyników wzór (5.1) przyjmuje postać

$$(5.2) \quad u' = \sum_{n=1}^{\infty} \cos(k_n \psi) I_n e^{\pm k_n u_{sr} \sigma} + f(\psi) \frac{1}{u_{sr}} + C_1 \psi + C_2.$$

Całkując pierwsze równanie układu (4.2) wyznaczamy  $v'$ :

$$(5.3) \quad v' = -\frac{1}{u_{sr}} \int_0^{\psi} \frac{\partial u'}{\sigma} d\psi.$$

Z równania (2.2), uwzględniając założenia linearyzacyjne (4.1), możemy określić ciśnienie:

$$(5.4) \quad p = \rho f(\psi) - \rho \left( \frac{u_{sr}^2}{2} + u_{sr} u' \right).$$

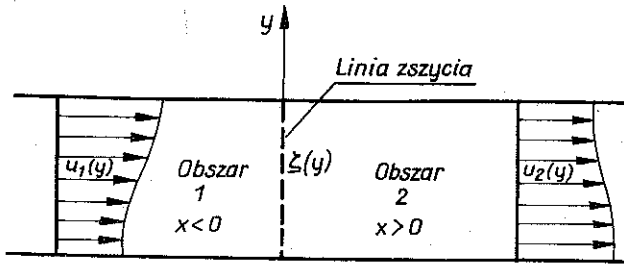
## 6. WARUNKI BRZEGOWE I WARUNKI ZGODNOŚCI

Poszukujemy rozwiązania (ograniczonego) w dwóch obszarach półnieskończonych na prawo i na lewo od przegrody. Oznaczmy indeksem 1 wielkości charakteryzujące przepływ na lewo od przegrody, indeksem 2 wielkości charakteryzujące przepływ na prawo od przegrody. Podział na obszary ilustruje rys. 2.

Warunki fizyczne zagadnienia narzucają przyjęcie znaku «+» wykładnika w formule (5.2) na lewo od przegrody i znaku «-» wykładnika na prawo od przegrody. Wtedy rozwiązanie (5.2) dla obu obszarów przyjmuje postać

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u'_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{n1} \cos(k_{n1} \psi) e^{k_{n1} u_{sr} \sigma} + f_1(\psi) \frac{1}{u_{sr}} + C_{11} \psi + C_{21}, \\ u'_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{n2} \cos(k_{n2} \psi) e^{-k_{n2} u_{sr} \sigma} + f_2(\psi) \frac{1}{u_{sr}} + C_{12} \psi + C_{22}. \end{aligned}$$

Analogicznie można dla obu obszarów napisać wyrażenia (5.3) i (5.4) określające  $v'$  i  $p$ . Przyjęcie innych znaków w wykładnikach powodowałoby nieograniczone narastanie funkcji wbrew założeniu.



Rys. 2

Warunki na dolnym i górnym brzegu obszaru. Ponieważ brzeg obszaru jest jednocześnie ścianką kanału, przeto mamy:

$$(6.2) \quad \begin{aligned} y=0, \quad \psi = \psi_0 = 0, \\ y=h, \quad \psi = \psi_1 = u_{sr} h, \\ v'_1 = v'_2 = v' = 0 \quad \text{dla} \quad y=0, \quad y=h. \end{aligned}$$

Warunek (6.2)<sub>2</sub> wynika z warunku stałości wydatku  $\Psi_1 - \Psi_0 = u_{sr} h$

Warunki w  $\infty$  na lewo od przegrody. Jeśli  $x = \sigma \rightarrow -\infty$ , to

$$u_1 \rightarrow u_{-\infty 1}(\psi) = u_{-\infty}(\psi),$$

gdzie  $u_{-\infty}(\psi)$  jest znane, bo zakładamy, że dany jest rozkład  $u_{-\infty}(y)$ ;

$$p_1 \rightarrow p_{-\infty 1} = p_{-\infty} = \text{const},$$

przy czym przyjmujemy, że  $p_{-\infty}$  jest dane.

Warunki w  $\infty$  na prawo od przegrody. Jeżeli  $x = \sigma \rightarrow \infty$ , to

$$u_2 \rightarrow u_{+\infty 2}(\psi) = u_{+\infty}(\psi),$$

gdzie funkcja  $u_{\infty}(\psi)$  może być dana lub nie w zależności od postawionego zagadnienia;

$$p_2 \rightarrow p_{\infty 2} = p_{\infty} = \text{const},$$

przy czym  $p_{\infty}$  powinna wynikać z rozwiązania.

Warunki na przegrodzie przepuszczalnej. Dla  $x = \sigma = 0$  zachodzą następujące warunki:

$$(6.3) \quad u_{01} = u_{02} = u_0,$$

co wynika z ciągłości,

$$(6.4) \quad v_{01} = v_{02},$$

gdyż zakładamy, że przegroda nie zmienia składowej stycznej prędkości (tzn. rozwiązanie będzie poprawne dla tego rodzaju przegród):

$$(6.5) \quad p_{01} - p_{02} = \zeta \frac{\rho u_0^2}{2},$$

gdzie  $\zeta$  oznacza lokalny współczynnik strat.

Lokalny współczynnik strat  $\zeta = \zeta(y)$  (lub  $\zeta = \zeta(\psi)$ ) jest charakterystyczny dla danego typu przegrody i może być dany lub poszukiwany w zależności od postawionego zagadnienia.

Po uwzględnieniu założeń (4.1) otrzymujemy

$$(6.6) \quad p_{01} - p_{02} = \zeta \rho \left( \frac{u_{sr}^2}{2} + u_{sr} u_0' \right).$$

## 7. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Wykorzystując warunki wymienione w p. 6 można określić wszystkie stałe występujące we wzorach (6.1) z wyjątkiem ciągu stałych  $l_n$ , i napisać te wzory w postaci

$$(7.1) \quad u_1' = - \sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(k_n \psi) e^{+k_n u_{sr} \sigma} + u_{-\infty}' ,$$

$$u_2' = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(k_n \psi) e^{-k_n u_{sr} \sigma} + u_{\infty}' ,$$

gdzie  $kn = n\pi/u_{sr}h$ ,  $h$  oznacza wysokość przewodu, przy czym  $u_{sr} = \frac{1}{h} \int_0^h u dy$ ,  $-l_{n1} = -l_{n2} = l_n$ . Analogicznie można napisać szeregi określające ciśnienie:

$$(7.2) \quad p_1 = \rho u_{sr} \sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(k_n \psi) e^{k_n u_{sr} \sigma} + p_{-\infty} ,$$

$$p_2 = -\rho u_{sr} \sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(k_n \psi) e^{-k_n u_{sr} \sigma} + p_{\infty} .$$

Zauważmy, że po dodaniu stronami wyrażeń (7.1) i uwzględnieniu warunku (6.3)<sub>1</sub> otrzymujemy następujący wniosek:

$$u_0' = \frac{u_{01}' + u_{02}'}{2} = \frac{1}{2} (u_{-\infty}' + u_{\infty}'),$$

tzn. prędkość na przegrodzie jest równa średniej z prędkości dla  $x = \sigma \rightarrow \infty$  i prędkości dla  $x = \sigma \rightarrow -\infty$ .

## 8. PROBLEMY SZCZEGÓLNE

W odniesieniu do przepływów przez przegrody przepuszczalne można postawić zagadnienia «proste» lub «odwrotne». Zagadnienie «proste» polega na założeniu współczynnika oporu  $\zeta(\psi)$  przegrody i poszukiwaniu rozkładu prędkości  $u_\infty(\psi)$  odpowiadającego temu rozkładowi  $\zeta$ . Zagadnienie «odwrotne» polega na założeniu pewnego rozkładu prędkości za przegrodą (teoretycznie  $u_\infty$ ) i poszukiwaniu takiego rozkładu współczynnika  $\zeta$  na przegrodzie, który ten rozkład prędkości wywołał.

Poniżej rozpatrujemy pewne szczególne przypadki tych zagadnień.

### 8.1. Przypadek $\zeta = \text{const}$

Podstawiając funkcje (7.2) do wzoru (6.6) i uwzględniając że  $u'_0 = u_{01}$ , określone jest formułą (7.1)<sub>1</sub> dochodzimy do wniosku, że spełnione muszą być następujące zależności:

$$(8.1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(k_n \psi) = \frac{\zeta}{2 + \zeta} u'_{-\infty},$$

$$p_{-\infty} - p_\infty = \rho \zeta \frac{u_{sr}^2}{2}.$$

Wzór (8.1)<sub>2</sub> pozwala nam wyznaczyć ciśnienie  $p_\infty$ .

Postępując analogicznie i uwzględniając, że  $u'_0 = u_{02}$ , określone jest formułą (7.1)<sub>2</sub>, otrzymujemy przy wykorzystaniu wzorów (8.1)

$$(8.1) \quad u'_{\infty} = \frac{2 - \zeta}{2 + \zeta} u'_{-\infty}.$$

Wzór ten znany jest w literaturze pod nazwą teorii «optymalnej» siatki i uzyskany został dla szczególnego (schodkowego) o pojedynczym schodku rozkładu prędkości — bez rozwiązywania ruchu, lecz za pomocą elementarnych i niezupełnie ścisłych rozważań. Dowiedliśmy więc, że prawidłowy jest on dla dowolnego rozkładu prędkości  $u_{-\infty}$  spełniającego założenia linearyzacyjne.

Z powyższych wzorów wynikają następujące wnioski: 1) całkowite wyrównanie wstępnego rozkładu prędkości zachodzi dla  $\zeta = 2$ ; 2) dla  $\zeta < 2$  następuje wyrównanie częściowe, a dla  $\zeta > 2$  tzw. «odwrócenie» profilu prędkości.

### 8.2. Przypadek gdy $\zeta \neq \text{const}$ jest postaci $\zeta = \zeta_{sr} + \varepsilon$

Zakładamy, że  $\varepsilon(\psi)$  jest wielkością małą pierwszego rzędu, tj. tego samego rzędu co  $u'$  i  $v'$ . Postępując podobnie jak w punkcie poprzednim, po odrzuceniu wielkości małych wyższego rzędu otrzymujemy

$$(8.3) \quad u'_{\infty} = \frac{2 - \zeta_{sr}}{2 + \zeta_{sr}} u'_{-\infty} - \frac{\varepsilon(\psi) u_{sr}}{2 + \zeta_{sr}}.$$

Aby nastąpiło całkowite wyrównanie prędkości ( $u'_{\infty} = 0$ ) musi być spełniony warunek

$$\varepsilon(\psi) = \frac{(2 - \zeta_{sr}) u'_{-\infty}}{u_{sr}}.$$

Z powyższego wzoru wynika, że  $\varepsilon(\psi)$  musi być dobrane odpowiednio do założonego  $\zeta_{sr}$  z tym zastrzeżeniem, aby spełniona była nierówność

$$\zeta = \zeta_{sr} + \varepsilon(\psi) \geq 0,$$

a więc aby

$$(8.4) \quad \zeta_{sr} \geq \frac{-2u'_{-\infty}}{u_{sr} - u'_{-\infty}}.$$

Należy zatem przyjąć najmniejszą wartość spełniającą tę nierówność (co minimalizuje straty):

$$\zeta_{sr} = \max \left( \frac{-2u'_{-\infty}}{u_{sr} - u'_{-\infty}} \right).$$

Z powyższego warunku widać od razu, że  $\zeta_{sr}$  jest wielkością małą rzędu pierwszego w odniesieniu do 1 (wielkości  $u'_{-\infty}$  i  $u_{sr}$  spełniają założenia linearyzacyjne), a więc jest dużo mniejsze od  $\zeta = 2$ , wyrównującego rozkład prędkości w przypadku  $\zeta = \text{const}$ . (przy każdym rozkładzie  $u'_{-\infty}$  spełniającym nasze założenia).

### 8.3. Przypadek gdy $\zeta \neq \text{const}$ i może być zupełnie dowolne

Poszukujemy takiego rozkładu  $\zeta$  na przegrodzie, który pozwala uzyskać dany rozkład prędkości  $u_{\infty}$  za przegrodą (zagadnienie odwrotne).

Wykorzystując podane w p. 6 i 7 wzory, dochodzimy do następującego równania:

$$(8.5) \quad \zeta(\psi) = \frac{2}{u_{-\infty} + u'_{\infty} + u_{sr}} \left[ u'_{-\infty} - u'_{\infty} + \frac{p_{-\infty} - p_{\infty}}{\rho u_{sr}} \right],$$

a zakładając w szczególności  $u'_{-\infty} = 0$  otrzymujemy

$$\zeta(\psi) = \frac{2}{u'_{\infty} + u_{sr}} \left[ u'_{-\infty} + \frac{p_{-\infty} - p_{\infty}}{\rho u_{sr}} \right],$$

W tym przypadku nie możemy wyznaczyć  $p_{\infty}$ , a zatem wprowadzamy wielkość  $\zeta_{sr}$  zdefiniowaną w następujący sposób:

$$\zeta_{sr} = \frac{2(p_{-\infty} - p_{\infty})}{\rho u_{sr}^2},$$

gdzie

$$\zeta_{sr} = \frac{1}{h} \int_0^h \zeta(y) dy, \quad \zeta = \zeta_{sr} + \zeta'.$$

Podobnie jak w p. 8.2 musi być spełniona nierówność

$$\zeta(\psi) = \frac{2u'_{-\infty} + \zeta_{sr} u_{sr}}{u'_{-\infty} + u'_{\infty} + u_{sr}} \geq 0,$$

a stąd

$$(8.6) \quad \zeta_{sr} \geq \frac{-2u'_{-\infty}}{u_{sr}}.$$



Można przyjąć, podobnie jak poprzednio, najmniejszą wartość spełniającą tę nierówność, tj.

$$\zeta_{sr} = \max \left( \frac{-2u'_{-\infty}}{u_{sr}} \right).$$

Jak widać i w tym przypadku, średnia wartość  $\zeta_{sr}$  może być małą pierwszego rzędu wobec 1.

### 9. ZAKOŃCZENIE

Po wyznaczeniu  $u'_{\infty}$  w przypadku zadania prostego lub korzystając bezpośrednio z danych  $u'_{-\infty}$ ,  $u'_{\infty}$  w przypadku zadania odwrotnego, możemy wyznaczyć ciąg współczynników  $l_n$  rozwinięcia w szereg Fouriera na podstawie wzoru

$$u'_{-\infty} - u'_{\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} l_n \cos(k_n \psi).$$

Wzór ten wynika ze wzorów (7.1) z wykorzystaniem warunku (6.3)<sub>1</sub>. Mając ciąg stałych możemy określić pole prędkości i ciśnień w całym obszarze przepływu ze wzorów (7.1), (7.2) oraz (5.3), co kończy rozwiązanie problemu.

Ostatecznie więc wzór (8.3) z nierównościami (8.4) rozwiązuje zarówno zagadnienie proste jak i odwrotne przy pewnych ograniczeniach (linearyzacyjnych) na  $\zeta$ . Natomiast wzór (8.5) z nierównościami (8.6) rozwiązuje zagadnienie odwrotne bez tych ograniczeń.

Można wyrównywać każdy rozkład prędkości jedną siatką o  $\zeta=2$  (jedną dla wszystkich rozkładów spełniających założenia linearyzacyjne) przy znacznych stratach lub siatką o niewielkim  $\zeta$  (małe straty), lecz dobraną każdorazowo do danego rozkładu prędkości przed siatką. Można do danego rozkładu prędkości przed siatką dobrać siatkę dającą pożądaną rozkład prędkości za siatką — przy minimalizacji strat.

### DODATEK

#### DYSKUSJA RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW RÓWNAŃ (p 2, 3 i 4) I ZAŁOŻEŃ LINEARYZACYJNYCH

Aby nie zaciemniać toku wywodów, który prowadzi bezpośrednio do zastosowań praktycznych, zdecydowaliśmy się zamieścić dyskusję układów równań w dodatku.

Istotne jest zauważyć, że układy równań (2.1), (2.3), (3.1), (3.2) i (4.2) nie są w pełni równoważne ani w sensie bezpośrednim tego słowa, ani ze względu na przeprowadzoną linearyzację. Ponieważ przy przekształceniach jednych układów równań w drugie dokonuje się po drodze różniczkowania (podwyższa się rząd równań) i całkowania, przeto w pewnych z tych układów mogą się pojawić dodatkowe rozwiązania, których w układzie wyjściowym nie było. Warunki brzegowe i warunki zszycia w rozwiązywanym zadaniu eliminują te rozwiązania, co jednak nie zawsze musi zachodzić. W pewnych osobliwych przypadkach może się zdarzać, że warunki fizyczne zadania nie eliminują rozwiązań dodatkowych.

Przejsie od układu równań (2.1) do układu równań (2.3) polega na wprowadzeniu funkcji prądu, której istnienie wynika z równania ciągłości, a równocześnie na wykorzystaniu całki pierwszej równań ruchu. Zatem układ (2.3) w (istocie układ czterech równań z czterema niewiadomymi  $u, v, \psi, p$ ) (\*) nie zawiera nowych rozwiązań w porównaniu z układem (2.1). Przejsie od układu równań (2.3) do układu (3.1) polega na zwykłej zamianie zmiennych (przejsie do nowych zmiennych ukośnokątnych, z których  $\psi$ , to jest funkcja prądu, jest w naturalny sposób związana z przepływem) i również nie wprowadza nowych rozwiązań. Dopiero różniczkowanie prowadzące do eliminacji ciśnienia z układu (3.1) i przejsie do układu (3.2) wprowadza nowe rozwiązania, które zostają usunięte przez warunki brzegowe i warunki zszycia w dalszym ciągu wywodów.

Układ równań (4.2) uzyskany został przez wprowadzenie założeń linearyzacyjnych wymienionych w tekście. Nie jest on oczywiście równoważny układowi (3.2), stanowi tylko jego przybliżoną postać, tym niemniej przejsie to nie wprowadziło nowych rozwiązań. Jednakże różniczkowanie przeprowadzone w układzie równań (4.2), prowadzące do eliminacji zmiennej  $v'$  (skąd uzyskujemy równanie (4.3)) prowadzi ponownie do wprowadzenia nowych rozwiązań.

Można zatem powiedzieć, że wynikanie (3.1)  $\Rightarrow$  (3.2) oraz (4.2)  $\Rightarrow$  (4.3) zachodzi, lecz wynikanie w przeciwną stronę nie zachodzi bez wprowadzenia dodatkowych warunków dotyczących eliminowanej zmiennej; ani bowiem istnienie funkcji  $v'$  nie wynika z równania (4.3) (trzeba dołączyć jedno z równań układu (4.2)), ani istnienie funkcji  $p$  nie wynika z układu równań (3.2) (trzeba dołączyć jedno z ostatnich równań układu (3.1)).

Ciekawę jest porównać linearyzację układu (3.2) z linearyzacją układu równań wyjściowych (2.1).

Jeżeli wprowadzimy założenia linearyzacyjne do układu równań (2.1), to otrzymamy

$$(D1) \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0,$$

$$(D2) \quad u_{sr} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$(D3) \quad u_{sr} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Eliminacja ciśnienia z tego układu odbywa się również drogą różniczkowania. Po różniczkowaniu i redukcji otrzymuje się

$$(D4) \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} = 0$$

(\*) Po uwzględnieniu związków  $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$  zamiast równania ciągłości.

i po wprowadzeniu funkcji prądu zaburzenia znajdziemy

$$(D5) \quad \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x^3} = 0.$$

Równania te nie są równoważne wyjściowym równaniom (D1)–(D3), zawierają one pewne dodatkowe rozwiązania, przy czym przejście odwrotne wymaga skorzystania z jednego z równań określających ciśnienie (D2) lub (D3). Równanie ostatnie (D5) oczywiście nie jest równoważne równaniu (4.3) choć ich rozwiązania, po usunięciu rozwiązań dodatkowych, różnią się tylko o wyrazy małe drugiego rzędu w granicach przyjętych założeń. Dowód tego może jednakże być przeprowadzony tylko na podstawie warunków zszycia na przegrodzie.

Rozwiązanie ostatniego równania (D5) w obszarze na lewo i prawo od przegrody może być uzyskane jako suma dwóch funkcji, z których jedna jest rozwiązaniem równania Laplace'a, a druga zależy tylko od  $y$ ; wynika to z ogólnej teorii równań różniczkowych liniowych. Obydwie te funkcje mają nieciągłości w formie skoku w punktach odpowiadających na przegrodzie. Ostatecznie korzystając z warunków fizycznych zadania trzeba również usunąć zbędne rozwiązania i problem jest podobny do poprzedniego.

W artykule zdecydowaliśmy się na korzystanie z przekształconego układu równań (3.1), gdyż właśnie w tym układzie widoczny jest fizyczny sens straty ciśnienia oraz skoku funkcji  $f(\psi)$  na przegrodzie.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. R. COLLAR, *The Effect of the Gauze on the Velocity Distribution in a Uniform Duct*, R and M ARC, 1867, 1939.
2. P. R. OWEN, H. K. ZIENKIEWICZ, *The production of uniform shear flow on a wind tunnel*, J. of Fluid Mechanics, 2, 6, 521, 1957.
3. И. Л. Повх, *Аэродинамический эксперимент в машиностроении*, Машгиз, ГИГИМЛ, 122, Москва, Ленинград 1959.
4. И. Л. Повх, *Методы расчета сопротивлений плоских решеток*, Труды ЛПИ, 5, 1953.
5. Г. И. Таганов, *Выравнивающее действие сетки в потоках жидкости и газа*, Труды ЦАГИ, 604, 1947.

#### Резюме

#### ПЛОСКОЕ ПЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ ПРОНИЦАЕМУЮ ПРЕГРАДУ В ПРОВОДЕ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

Рассматривается плоское вихревое течение невязкой, несжимаемой жидкости. Область течения, вида бесконечной полосы, ограничена двумя параллельными стенками и перегородена проницаемой поверхностью. После преобразования и линеаризации основных уравнений, спшивается два общих решения с двух сторон преграды при помощи условий совместности на преграде. Получается зависимость между асимптотическим профилем скорости перед преградой, а распределением коэффициента потерь на преграде и асимптотическим профилем скорости за преградой.

## SUMMARY

## PLANE FLOW THROUGH A PERMEABLE BARRIERE IN A TUNNEL WITH PARALLEL WALLS

A plane vortex flow of nonviscid and incompressible fluid is considered. A flow region in a form of an infinite layer is bounded by two parallel walls and partited by a permeable surface. After transformation and linearization of the basic equations the two general solutions are joined on the both sides of the barriere. A relation between asymptotic velocity profile before a barriere, distribution of loss factor on the barriere and asymptotic velocity profile behind the barriere is obtained.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 30 kwietnia 1977 r.*

---