ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 26, 3, 371—379, 1978
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

FUNKCJE PRZEMIESZCZEŃ DLA DRUGIEGO OSIOWO-SYMETRYCZNEGO ZAGADNIENIA MIKROPOLARNEJ ELASTOSTATYKI

JANUSZ DYSZLEWICZ (WROCŁAW)

W ramach mikropolarnej elastostatyki rozważa się problem osiowo-symetrycznej deformacji opisany przez wektor przemieszczenia $\mathbf{u}(r,z)\equiv(0,u_\theta,0)$ i wektor obrotu $\boldsymbol{\varphi}(r,z)\equiv(\varphi x,0,\varphi z)$. Autor [14] zaproponował odmienną od innych dróg [2–5], naprężeniową drogę rozwiązania tego zagadnienia i uzyskał reprezentację pól podobną do znanej reprezentacji W. Nowackiego [2]. Niniejsza praca stanowi rozszerzenie [14] na przypadek niejednorodnych równań. Pokazuje się, że dla rozwiązania zagadnienia z obciążeniami masowymi wystarczy znajomość pewnych funkcji $\chi(r,z)$, $\sigma(r,z)$. $\eta_\theta(r,z)$ oraz $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$, natomiast przypadek trwałych odkształceń sprowadza się do wyznaczenia funkcji $\chi^*(r,z)$ oraz $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$.

1. Wprowadzenie

Rozważmy tzw. drugie osiowo-symetryczne zagadnienie w ramach liniowej elastostatyki jednospójnego ośrodka Cosseratów [1]. W zagadnieniu tym przemieszczenia i obroty, w układzie współrzędnych walcowych (r,θ,z), opisują wektory następujące

$$\mathbf{u}(r,z)\equiv(0,u_\theta,0),\qquad \boldsymbol{\varphi}(r,z)\equiv(\varphi_r,0,\varphi_z). \tag{1.1}$$

Funkcje u_θ, φ_r, φ_z powinny spełniać podstawowy układ trzech różniczkowych równań równowagi o pochodnych cząstkowych. Metody całkowania równań dla przemieszczeń i obrotów były przedmiotem badań autorów prac [3–5]. Autor niniejszego opracowania zaproponował w [14] odmienną metodę rozwiązania, wychodząc z podstawowych równań naprężeniowych (1.1) i uzyskał rozwiązanie podobne do rozwiązania W. Nowackiego, [2], wyznaczonego wcześniej i na innej drodze. Niniejsza praca stanowi rozszerzenie rozważań z [14] na niejednorodne równania problemu. Pokażemy, że rozwiązanie zagadnienia (1.1) dla przypadku obciążeń masowych sprowadza się do określenia pewnych funkcji $\chi(r,z)$, $\sigma(r,z)$, $\eta_\theta(r,z)$ oraz $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$, natomiast rozwiązanie dla przypadku trwałych odkształceń sprowadza się do wyznaczenia funkcji $\chi^*(r,z)$ oraz $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$.

2. Zagadnienie dla obciążeń masowych

W (1.1) naprężenia siłowo-momentowe opisują odpowiednio dwa niesymetryczne tensory $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\mu}$ o fizycznych składowych

$$\boldsymbol{\sigma}\equiv(\sigma_{r\theta},\sigma_{\theta r},\sigma_{\theta z},\sigma_{z\theta}),\qquad \boldsymbol{\mu}\equiv(\mu_{rr},\mu_{rz},\mu_{\theta\theta},\mu_{zr},\mu_{zz}). \tag{2.1}$$

Naprężenia z (2.1) powinny spełniać układ trzech równań równowagi

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\theta z}-\sigma_{z\theta}+\partial_r \mu_{rr}+\partial_z \mu_{zr}+r^{-1}(\mu_{rr}-\mu_{\theta\theta})+Y_r=0,\\
(2.2)\qquad &\sigma_{r\theta}-\sigma_{\theta r}+\partial_z \mu_{zz}+r^{-1}\partial_r(r\mu_{rz})+Y_z=0,\\
&\partial r\sigma_{r\theta}+\partial z\,\sigma_{z\theta}+r^{-1}(\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta r})+X_\theta=0,
\end{aligned}
$$

gdzie wektory

$$
(2.3)\qquad \mathbf{X}(r,z)\equiv(0,X_\theta,0),\qquad \mathbf{Y}(r,z)\equiv(Y_r,0,Y_z)
$$

określają odpowiednio siły i momenty masowe, a symbole $\partial_r f(\ldots)$, $\partial_z f(\ldots)$ oznaczają pochodną cząstkową funkcji $f(\ldots)$ względem zmiennych r i z. Przyjmijmy, opierając się na zasadzie Helmholtza, rozkład pól (2.3) na część potencjalną i solenoidalną (por. W. Nowacki i W. K. Nowacki [6]):

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{X}=\operatorname{grad} v+\operatorname{rot}\boldsymbol{\chi},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\chi}=0,\\
(2.4)\qquad &Y=\operatorname{grad}\sigma+\operatorname{rot}\boldsymbol{\eta},\qquad \operatorname{div}\boldsymbol{\eta}=0.
\end{aligned}
$$

Dla (1.1) mamy, $\boldsymbol{\chi}(r,z)\equiv(\chi_r,0,\chi_z)$, $\boldsymbol{\eta}(r,z)\equiv(0,\eta_\theta,0)$ i wzory (2.4) prowadzą do związków:

$$
(2.5)\qquad \partial_z\chi_r-\partial_r\chi_z=X_\theta,
$$

$$
(2.6)\qquad \partial_r\sigma-\partial_z\eta_\theta=Y_r,\qquad \partial_z\sigma+r^{-1}\partial_r(r\eta_\theta)=Y_z,
$$

przy czym warunek $\operatorname{div}\boldsymbol{\chi}=0$ spełniamy, wprowadzając funkcję $\chi(r,z)$ spełniającą równania

$$
(2.7)\qquad \chi_r=\partial_z\chi,\qquad \chi_z=-r^{-1}\partial_r(r\chi).
$$

Równanie (2.5) przyjmuje postać

$$
(2.8)\qquad (\nabla^2-r^{-2})\chi=X_\theta,
$$

gdzie symbol ∇^2 oznacza operator Laplace'a: $\nabla^2\equiv\partial_r^2+r^{-1}\partial r+\partial_z^2$. Przy danym opisie pól wektorowych (2.3) w zbiorze — funkcje $\chi(r,z)$, $\sigma(r,z)$, $\eta_\theta(r,z)$ wyznaczamy przy użyciu równań (2.6), (2.8) [12].

W teorii mikropolarnej pola odkształceń opisują dwa niesymetryczne tensory: tensor odkształcenia $\boldsymbol{\gamma}$ i tensor skrętno-giętny $\boldsymbol{\varkappa}$, na które nakłada się pewne ograniczenia odpowiadające warunkom nierozdzielności odkształceń z klasycznej teorii sprężystości [8–10]. W zagadnieniu (1.1) na składowe fizyczne tensorów $\boldsymbol{\gamma}$ i $\boldsymbol{\varkappa}$

$$
(2.9)\qquad \boldsymbol{\gamma}(r,z)\equiv(\gamma_{r\theta},\gamma_{\theta r},\gamma_{\theta z},\gamma_{z\theta}),\qquad \boldsymbol{\varkappa}(r,z)\equiv(\kappa_{rr},\kappa_{rz},\kappa_{\theta\theta},\kappa_{zr},\kappa_{zz})
$$

należy nałożyć sześć następujących warunków, podanych w pracy [14]:

$$
(2.10)\qquad \partial_z(\gamma_{\theta r}+\gamma_{r\theta})+(r^{-1}-\partial_r)(\gamma_{z\theta}+\gamma_{\theta z})=0
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\kappa_{\theta\theta}+r^{-1}\gamma_{\theta z}=0,\qquad \kappa_{rr}+\partial_r\gamma_{\theta z}=0,\qquad \kappa_{zr}+\partial_z\gamma_{\theta z}=0,\\
(2.11)\qquad &\partial_z\gamma_{\theta r}+r^{-1}\gamma_{z\theta}-\kappa_{zz}-\kappa_{\theta\theta}=0,\qquad \partial_r(r\gamma_{\theta r})+\gamma_{r\theta}-r\kappa_{rz}=0.
\end{aligned}
$$

Pola (2.1) i (2.9) związane są równaniami konstytutywnymi

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{r\theta}=(\mu+\alpha)\gamma_{r\theta}+(\mu-\alpha)\gamma_{\theta r}, \quad \sigma_{\theta r}=(\mu+\alpha)\gamma_{\theta r}+(\mu-\alpha)\gamma_{r\theta},\\
&\sigma_{\theta z}=(\mu+\alpha)\gamma_{\theta z}+(\mu-\alpha)\gamma_{z\theta}, \quad \sigma_{z\theta}=(\mu+\alpha)\gamma_{z\theta}+(\mu-\alpha)\gamma_{\theta z}
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\mu_{rr}=2\gamma\kappa_{rr}+\beta\kappa, \quad \mu_{\theta\theta}=2\gamma\kappa_{\theta\theta}+\beta\mu, \quad \mu_{zz}=2\gamma\kappa_{zz}+\beta\kappa,\\
&\mu_{rz}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{rz}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{zr}, \quad \mu_{zr}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{zr}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{rz},
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

gdzie $\kappa=\kappa_{rr}+\kappa_{\theta\theta}+\kappa_{zz}$, a wielkości α, β, γ, ε, μ oznaczają stałe materiałowe ośrodka Cosseratów. Równania (2.2) oraz wyrażone w terminach naprężeń warunki (2.10), (2.11) i warunki brzegowe stanowią sformułowanie naprężeniowego problemu (1.1) i podstawę do dalszych rozważań.

Warunek (2.10) wyrażony w naprężeniach

$$
\partial_z(\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta r})+(r^{-1}-\partial_r)(\sigma_{z\theta}+\sigma_{\theta z})=0, \tag{2.14}
$$

spełniamy tożsamościowo wprowadzając funkcję $\Phi^*(r, z)$ za pośrednictwem następujących równań

$$
\sigma_{r\theta}+\sigma_{\theta r}=(\partial_r-r^{-1})\Phi^*, \quad \sigma_{\theta z}+\sigma_{z\theta}=\sigma_z\Phi^*. \tag{2.15}
$$

Równanie $(2.2)_3$ po uwzględnieniu (2.8) i (2.15) doprowadzamy do postaci

$$
\partial_r[-\sigma_{\theta r}+r^{-1}\partial_r(r\chi)+\partial r\Phi^*]+\partial_z[-\sigma_{\theta z}+\partial_z(\chi r+\Phi^*)]=0 \tag{2.16}
$$

i spełniamy tożsamościowo określając funkcję $\Psi^*(r, z)$ równaniami

$$
\partial_z\Psi^*=\sigma_{\theta r}-r^{-1}\partial_r(r\chi)-\partial_r\Phi^*, \quad \partial_r\Psi^*=-\sigma_{\theta z}+\partial_z(\chi+\Phi^*). \tag{2.17}
$$

Z równań (2.15) i (2.17) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\theta r}=\partial_r\Phi^*+\partial_z\Psi^*+r^{-1}\partial_r(r\chi),\\
&\sigma_{r\theta}=-r^{-1}\Phi^*-\partial_z\Psi^*-r^{-1}\partial r(r\chi),\\
&\sigma_{\theta z}=\partial_z(\Phi^*+\chi)-\partial_r\Psi^*,\\
&\sigma_{z\theta}=\partial_r\Psi^*-\partial_z\chi.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Rozwiązując (2.12) względem odkształceń i uwzględniając (2.18) otrzymujemy

$$
\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\gamma}(\Phi^*, \Psi^*, \chi). \tag{2.19}
$$

Zwróćmy uwagę, że z (2.11) przy użyciu (2.19) drogą prostych przekształceń algebraicznych otrzymujemy

$$
\boldsymbol{\varkappa}=\boldsymbol{\varkappa}(\Phi^*, \Psi^*, \chi). \tag{2.20}
$$

Wreszcie z (2.13) przy użyciu (2.20) znajdziemy

$$
\begin{aligned}
&2\alpha\mu_{rr} = -2\gamma\partial_r[\partial_z(\mu_1^2\Phi^* + \chi) - \partial_r\Psi^*] + \beta\nabla^2\Psi^*,\\
&2\alpha\mu_{\theta\theta} = -2\gamma r^{-1}[\partial_z(\mu_1^2\Phi^* + \chi) - \partial_r\Psi^*] + \beta\nabla^2\Psi^*,\\
&2\alpha(\mu_{zz} + \mu_{rr} + \mu_{\theta\theta}) = (2\gamma + 3\beta)\nabla^2\Psi^*,\\
&2\alpha\mu_{rx} = 2\alpha\nabla_0^2(l^2\Phi^* + 2k^2\chi) + 2\gamma[\partial_z(\partial_r\Psi^* - \partial_z\chi) - \mu_1^2\partial_z^2\Phi^*],\\
&(\gamma+\varepsilon)(\mu_{rz} - \mu_{zr}) = 2\varepsilon\nabla_0^2(l^2\Phi^* + 2k^2\chi),
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

gdzie

$$
\nabla_0^2 = \nabla^2 - r^{-2}, \qquad \mu_1 = [(\alpha+\zeta)/2\mu]^{1/2}, \qquad k = [(\gamma+\varepsilon)/4\alpha]^{1/2}, \qquad l = \sqrt{2}\,k\mu_1.
$$

Z dotychczasowych rozważań wynika, że naprężenia (2.18), (2.21) spełniają tożsamościowo sześć warunków nierozdzielności odkształceń (2.10), (2.11) oraz trzecie z równań równowagi (2.2). Dwa pierwsze równania układu (2.2) przy użyciu (2.6) prowadzą do równań

$$
\begin{aligned}
&-\partial_z[(l^2\nabla_0^2 - 1)\Phi^* + 2(k^2\nabla_0^2 - 1)\chi + \eta_\theta] + \partial_r[2(\nu^2\nabla^2 - 1)\Psi^* + \sigma] = 0,\\
&\partial_z[2(\nu^2\nabla^2 - 1)\Psi^* + \sigma] + (r^{-1} + \partial_r)[(l^2\nabla_0^2 - 1)\Phi^* + 2(k^2\nabla_0^2 - 1)\chi + \eta_\theta] = 0,
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

gdzie $\nu = [(\beta+2\gamma)/4\alpha]^{1/2}$. Z (2.22) otrzymujemy oddzielne równania dla funkcji Φ^* i Ψ^*:

$$
\begin{aligned}
&\nabla_0^2[(l^2\nabla_0^2 - 1)\Phi^* + 2(k^2\nabla_0^2 - 1)\chi + \eta_\theta] = 0,\\
&\nabla^2[2(\nu^2\nabla^2 - 1)\Psi^* + \sigma] = 0.
\end{aligned}
\tag{2.23}
$$

Eliminując z (2.23) wielkości $\nabla_0^2\eta_\theta$, $\nabla^2\sigma$, $\nabla_0^2\chi$, przy użyciu (2.6), (2.8) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\nabla_0^2(l^2\nabla_0^2 - 1)\Phi^* + 2(k^2\nabla_0^2 - 1)X_\theta + \partial_r Y_z - \partial_z Y_r = 0,\\
&2\nabla^2(\nu^2\nabla^2 - 1)\Psi^* + r^{-1}\partial r(rY_r) + \partial_z Y_z = 0.
\end{aligned}
\tag{2.24}
$$

Z równań geometrycznych problemu

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{r\theta} = \partial_r u_\theta - \varphi_z, \quad \gamma_{\theta r} = -r^{-1}u_\theta + \varphi_z, \quad \gamma_{\theta z} = -\varphi r, \quad \gamma_{z\theta} = \partial_z u_\theta + \varphi_r,\\
&\kappa_{rr} = \partial_r\varphi_r, \quad \kappa_{\theta\theta} = r^{-1}\varphi r, \quad \kappa_{zz} = \partial_z\varphi_z, \quad \kappa_{rz} = \partial_r\varphi_z, \quad \kappa_{zr} = \partial_z\varphi_r,
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

po uwzględnieniu (2.19) i (2.20) — otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&2\mu u_\theta = \Phi^*,\\
&2\alpha\varphi_r = \partial_r\Psi^* - \partial_z(\mu_1^2\Phi^* + \chi),\\
&2\alpha\varphi = \partial_z\Psi^* + r^{-1}\partial r[r(\mu_1^2\Phi^* + \chi)].
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Podstawiając do (2.2) funkcje (2.12), (2.13) otrzymujemy przy użyciu (2.25) następujące równania równowagi:

$$
\begin{aligned}
&[(\gamma+\varepsilon)(\nabla^2-r^{-2})-4\alpha]\,\varphi_r+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\partial_r\kappa-2\alpha\partial_z u_\theta+Y_r=0,\\
(2.27)\qquad &[(\gamma+\varepsilon)\nabla^2-4\alpha]\,\varphi_z+(\beta+\gamma-\varepsilon)\,\partial_z\kappa+2\alpha r^{-1}\partial_r(ru_\theta)+Y_z=0,\\
&(\mu+\alpha)(\nabla^2-r^{-2})\,u_\theta+2\alpha(\partial_z\varphi_r-\partial_r\varphi_z)+X_\theta=0,
\end{aligned}
$$

gdzie $\kappa=r^{-1}\partial_r(r\varphi_r)+\partial_z\varphi_z$.

Wprowadzając (2.26) do (2.27) i uwzględniając (2.6), (2.8) spełniamy $(2.27)_3$ tożsamościowo, natomiast z $(2.27)_{1,2}$ otrzymujemy odpowiednio (2.22). Rozwiązanie problemu sprowadza się więc do określenia z równań (2.6) i (2.8) funkcji $\eta_\theta(r,z)$, $\sigma(r,z)$ i $\chi(r,z)$, a następnie do określenia funkcji $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$, które otrzymujemy z równań (2.23), spełniając nałożone warunki różniczkowe (2.22) i dane warunki brzegowe.

W. Nowacki i W. K. Nowacki [6] uogólnili klasyczny osiowo-symetryczny problem Lamba na ośrodek mikropolarny, podając w szczególności rozwiązania podstawowe dla obciążeń masowych w przypadku drgań harmonicznych w czasie. Poniżej rozpatrzymy zagadnienie (1.1) dla statycznego rozkładu pól wektorowych (2.3), sprowadzającego się do działania w początku układu współrzędnych przestrzeni nieskończonej skupionego momentu masowego:

$$
(2.28)\qquad Y_z(r,z)=M_0(2\pi r)^{-1}\delta(r)\delta(z),\qquad X_\theta(r,z)=Y_r(r,z)=0.
$$

Potencjały Φ^*, Ψ^* otrzymujemy z równań (2.24) przy użyciu transformacji Fouriera — Hankela i wykorzystaniu podręcznika [13]:

$$
(2.29)\qquad
\begin{aligned}
\Phi^*(r,z)&=-M_0(4\pi)^{-1}\partial_r\big[(1-\exp(-R/l))R^{-1}\big],\\
\Psi^*(r,z)&=-M_0 z(8\pi r)^{-1}\partial_r\big[(1-\exp(-R/\nu))R^{-1}\big].
\end{aligned}
$$

Przemieszczenie u_θ i obroty φ_r, φ_z otrzymujemy z (2.26) (przyjmując $\chi\equiv 0$) przy użyciu (2.29):

$$
\begin{aligned}
&u_\theta(r,z)=-M_0(8\pi\mu)^{-1}\partial r\big[(1-\exp(-R/l))R^{-1}\big],\\
&\varphi_r(r,z)=M_0 z(16\pi\alpha)^{-1}\big[\!\big[2\mu_1^2\partial_r\{r^{-1}\partial_r[(1-\exp(-R/l))R^{-1}]\}-\\
(2.30)\qquad &\qquad -\partial_r\{r^{-1}\partial_r[(1-\exp(-R/\nu))R^{-1}]\}\big]\!\big],\\
&\varphi_r(r,z)=-M_0(16\pi\alpha r)^{-1}\big[\!\big[2\mu_1^2\partial_r\{r\partial_r[(1-\exp(-R/l))R^{-1}]\}+\\
&\qquad +\partial_z\{z\partial_r[(1-\exp(-R/\nu))R^{-1}]\}\big]\!\big],
\end{aligned}
$$

gdzie $R=(r^2+z^2)^{1/2}$. Pola odkształceń i naprężeń w ciele otrzymujemy odpowiednio z (2.19), (2.20), (2.18) i (2.21) przy wykorzystaniu (2.29). Wzory (2.30) autor uzyskał również na innej drodze [15].

3. Zagadnienie dystorsji

W. Nowacki [7] podał podstawowe wzory i twierdzenia dotyczące występowania trwałych odkształceń w ciele mikropolarnym. Przejdziemy teraz do omówienia problemu dystorsji w przypadku zagadnienia (1.1).

Podstawowe zagadnienie w naprężeniach formułują w tym przypadku następujące równania: równowania równowagi (2.2), równania zgodności odkształceń (2.10), (2.11) oraz warunki brzegowe i równania konstytutywne:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{r\theta}+\partial^0_{r\theta}=(\mu+\alpha)\gamma_{r\theta}+(\mu-\alpha)\gamma_{\theta r}, \qquad \sigma_{\theta r}+\sigma^0_{\theta r}=(\mu+\alpha)\gamma_{\theta r}+(\mu-\alpha)\gamma_{r\theta},\\
&\partial_{\theta z}+\partial^0_{\theta z}=(\mu+\alpha)\gamma_{\theta z}+(\mu-\alpha)\gamma_{z\theta}, \qquad \sigma_{z\theta}+\sigma^0_{z\theta}=(\mu+\alpha)\gamma_{z\theta}+(\mu-\alpha)\gamma_{\theta z}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
&\mu_{rr}+\mu^0_{rr}=2\gamma\kappa_{rr}+\beta\kappa, \qquad \mu_{\theta\theta}+\mu^0_{\theta\theta}=2\gamma\kappa_{\theta\theta}+\beta\kappa, \qquad \mu_{zz}+\mu^0_{zz}=2\gamma\kappa_{zz}+\beta\kappa,\\
&\mu_{rz}+\mu^0_{rz}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{rz}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{zr}, \qquad \mu_{zr}+\mu^0_{zr}=(\gamma+\varepsilon)\kappa_{zr}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{zr}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Wprowadzone tu symbole $\boldsymbol{\sigma}^0(r,z)\equiv(\sigma^0_{r\theta},\sigma^0_{r\theta},\sigma^0_{\theta r},\sigma^0_{z\theta})$, $\boldsymbol{\mu}^0(r,z)\equiv(\mu^0_{rr},\mu^0_{\theta\theta},\mu^0_{zz},\mu^0_{rz},\mu^0_{zr})$ posiadają postać związków konstytutywnych (2.12) i (2.13). Otrzymujemy je przez dopisanie do $\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\varkappa}$ indeksu «zero». Natomiast funkcje $\boldsymbol{\gamma}^0(r,z)\equiv(\gamma^0_{r\theta},\gamma^0_{r\theta},\gamma^0_{z\theta},\gamma^0_{\theta z})$, $\boldsymbol{\varkappa}^0(r,z)\equiv(\kappa^0_{rr},\kappa^0_{\theta\theta},\kappa^0_{zz},\kappa^0_{zr},\kappa^0_{rz})$ określają pole danych dystorsji.

W dalszym ciągu pomijamy w (2.2) obciążenia masowe i drogą analogicznych rozważań do przedstawionych w p. 2 uzyskujemy wzory na naprężenia:

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\theta r}=\partial_r\Phi^*+\partial_z\Psi^*-r^{-1}\partial_r(r\chi^*),\\
&\sigma_{r\theta}=-r^{-1}\Phi^*-\partial_z\Psi^*+r^{-1}\partial_r(r\chi^*)-(\sigma^0_{r\theta}+\sigma^0_{\theta r}),\\
&\sigma_{\theta z}=\partial_z(\Phi^*-\chi^*)-\partial_r\Psi^*,\\
&\sigma_{z\theta}=\partial_r\psi^*+\partial_z\chi^*-(\sigma^0_{z\theta}+\sigma^0_{\theta z}),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

oraz

$$
\begin{aligned}
2\alpha\mu_{rr}&=-2\gamma\partial_r[\partial_z(\mu_1^2\Phi^*-\chi^*)-\partial_r\Psi^*]+\\
&\qquad+\beta(\nabla^2\Psi^*+\partial_z\sigma^0_{\theta r}-r^{-1}\sigma^0_{\theta z})-2\alpha(2\nu^2\partial_r\sigma^0_{\theta z}+\mu^0_{rr}),\\
2\alpha\mu_{\theta\theta}&=-2\gamma r^{-1}[\partial_z(\mu_1^2\Phi^*-\chi^*)-\partial_r\Psi^*]+\\
&\qquad+\beta(\nabla^2\Psi^*+\partial_z\sigma^0_{\theta r}-\partial_r\sigma^0_{\theta z})-2\alpha(2\nu^2r^{-1}\sigma^0_{\theta z}+\mu^0_{\theta\theta}),\\
2\alpha(\mu_{zz}+\mu_{rr}+\mu_{\theta\theta})&=(2\gamma+3\beta)[\nabla^2\Psi^*+\partial_z\sigma^0_{\theta r}-r^{-1}\partial_r(r\sigma^0_{\theta z})-2\alpha\kappa^0],\\
2\sigma\mu_{rz}&=2\alpha\nabla_0^2(l^0\Phi^*-2k^2\chi^*)+2\gamma[\partial_z(\partial r\Psi^*+\partial_z\chi^*)-\\
&\qquad-\mu_1^2\partial_z^2\Phi^*]+(\gamma+\varepsilon)\partial r\sigma^0_{\theta r}-(\gamma-\varepsilon)\partial_z\sigma^0_{\theta z}-2\alpha\mu^0_{rz},\\
(\gamma+\varepsilon)(\mu_{rz}-\mu_{zr})&=2\varepsilon[\nabla_0^2(l^2\Phi^*-2k^2\chi^*)+\\
&\qquad+2k^2(\partial r\sigma^0_{\theta r}+\partial_z\sigma^0_{\theta z})]-(\gamma+\varepsilon)(\mu^0_{rz}-\mu^0_{zr}),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

które spełniają tożsamościowo $(2.2)_3$, (2.10), (2.11), jeżeli funkcja $\chi^*(r, z)$ jest rozwiązaniem równania

$$\nabla_0^2 \chi^* = r^{-1} \partial r\, [r(\sigma_{r\theta}^0 + \sigma_{\theta r}^0)] + \partial_z (\sigma_{z\theta}^0 + \sigma_{\theta z}^0). \tag{3.5}$$

Dwa pierwsze równania układu (2.2) prowadzą odpowiednio do równań

$$\begin{aligned} -\partial_z [(l^2 \nabla_0^2 - 1)\Phi^* - 2(k^2 \nabla_0^2 - 1)\chi^*] + 2\partial_r (\nu^2 \nabla^2 - 1)\Psi^* = \\ = \mathrm{R}_1^0 + 2(\nu^2 \nabla_0^2 - 1)\sigma_{\theta z}^0 - 2(\nu^2 - k^2)\partial_z (\partial_z \sigma_{\theta z}^0 + \partial r\, \sigma_{\theta r}^0); \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} 2\partial_z (\nu^2 \nabla^2 - 1)\Psi^* + (r^{-1} + \partial_r)[(l^2 \nabla_0^2 - 1)\Phi^* - 2(k^2 \nabla_0^2 - 1)\chi^*] = \\ = \mathrm{R}_2^0 - 2(k^2 \nabla^2 - 1)\sigma_{\theta r}^0 + 2(\nu^2 - k^2)\partial_z [r^{-1} \partial_r (r\sigma_{\theta z}^0) - \partial_z \sigma_{\theta r}^0]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Symbolem R_i^0 $(i = 1, 2, 3)$ oznaczamy wyrażenie identyczne z lewą stroną i-tego równania układu (2.2) napisanego dla symboli $\boldsymbol{\sigma}^0$, $\boldsymbol{\mu}^0$.

Z (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla_0^2 [(l^2 \nabla_0^2 - 1)\Phi^* - 2(k^2 \nabla_0^2 - 1)\chi^*] = \\ = -\partial_z \mathrm{R}_1^0 + \partial_r \mathrm{R}_2^0 - 2(k^2 \nabla_0^2 - 1)(\partial_z \sigma_{\theta z}^0 + \partial_r \sigma_{\theta r}^0), \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} 2\nabla^2 (\nu^2 \nabla^2 - 1)\Psi^* = \\ = r^{-1}\partial_r (r \mathrm{R}_1^0) + \partial_z \mathrm{R}_2^0 + 2(\nu^2 \nabla^2 - 1)[r^{-1} \partial_r (r\sigma_{\theta z}^0) - \partial_z \sigma_{\theta r}^0]. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Eliminując $\nabla_0^2 \chi^*$ z (3.8) przy wykorzystaniu (3.5), otrzymujemy

$$\nabla_0^2 (l^2 \nabla_0^2 - 1)\Phi^* = -\partial_z \mathrm{R}_1^0 + \partial_r \mathrm{R}_2^0 + 2(k^2 \nabla_0^2 - 1)\mathrm{R}_3^0. \tag{3.10}$$

Wzory na przemieszczenia i obroty mają postać następującą:

$$\begin{aligned} 2\mu u_\theta &= \Phi^*, \\ 2\alpha \varphi_r &= -\partial_z (\mu_1^2 \Phi^* - \chi^*) + \partial_r \Psi^* - \sigma_{\theta z}^0, \\ 2\alpha \varphi_z &= r^{-1} \partial_r [r(\mu_1^2 \Phi^* - \chi^*)] + \partial_z \Psi^* + \sigma_{\theta r}^0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Układ (2.2) przy użyciu (3.1), (3.2) oraz (2.25) prowadzi do równań równowagi

$$\begin{aligned} [(\gamma + \varepsilon)(\nabla^2 - r^{-2}) - 4\alpha]\varphi_r + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_r \kappa - 2\alpha \partial_z u_\theta &= \mathrm{R}_1^0, \\ [(\gamma + \varepsilon)\nabla^2 - 4\alpha]\varphi_z + (\beta + \gamma - \varepsilon)\partial_z \kappa + 2\alpha r^{-1} \partial_r (r u_\theta) &= \mathrm{R}_2^0, \\ (\mu + \alpha)(\nabla^2 - r^{-2}) u_\theta + 2\alpha(\partial_z \varphi_r - \partial_r \varphi_z) &= \mathrm{R}_3^0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Przez podstawienie (3.11) do (3.12) sprawdzamy, że $(3.12)_3$ prowadzi do (3.5); ze wzorów $(3.12)_{1,2}$ otrzymujemy (3.6) i (3.7). Należy z kolei określić funkcję $\chi^*(r, z)$ oraz funkcje $\Psi^*(r, z)$, $\Phi^*(r, z)$; wyznaczamy je z równań (3.5) i (3.9), (3.10), a następnie spełniamy równania (3.6), (3.7) i warunki brzegowe.

W przypadku jednorodnych równań mamy: $X_\theta \equiv 0$, $Y_r \equiv 0$, $Y_z \equiv 0$, $\chi \equiv 0$, $\sigma \equiv 0$, $\eta_\theta \equiv 0$ oraz $\boldsymbol{\gamma}^0 \equiv 0$, $\boldsymbol{\varkappa}^0 \equiv 0$, $\boldsymbol{\sigma}^0 \equiv 0$, $\boldsymbol{\mu}^0 \equiv 0$, $\chi^* \equiv 0$, $\mathrm{R}_i^0 \equiv 0$ i wówczas rozwiązanie z p. 2 i p. 3 przechodzi w rozwiązanie z pracy [14].

Niniejsza praca stanowi skróconą wersję nie publikowanego opracowania [16].

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
2. W. Nowacki, *The "second" axial-symmetric problem in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Sci., Série Sci. Techn., **20**, 517–(951), 1972.
3. W. Nowacki, *Generalized Love's functions in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci., Tech., **17**, 247–(355), 1969.
4. J. Stefaniak, *Solving functions for axi-symmetric problem in the Cosserat medium*. Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **18**, 9, 1970.
5. R. S. Dhaliwal, K. L. Chowdhury, *The axi-symmetric Reissner-Sagoci problem in the linear micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **19**, 363–(661), 1971.
6. W. Nowacki, W. K. Nowacki, *The axially symmetrical Lambs problem in a semi-infinite micropolar elastic solid*, Proc. Vibr. Probl., **10**, 2, 1969.
7. W. Nowacki, *A Distortion problem in micropolar elasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **21**, 6, 1973.
8. W. Nowacki, *Volterra distortions in a micropolar elastic body*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., **21**, 1973.
9. N. Sandru, *On some problems of the linear theory of the asymmetric elasticity*, Int. J. Eng. Sci., **4**, 1, 1966.
10. W. Günther, *Zur Statik und Kinematik des Cosseratschen Kontinuums*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges., **10**, 195–213, 1958.
11. I. N. Sueddon, *Fourier transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York-Toronto-London 1951.
12. P. Moon, D. E. Spencer, *Teoria pola*, PWN, Warszawa 1966.
13. I. S. Gradstein, I. M. Rizhik, *Tablice całek, sum szeregów i iloczynów* (w jęz. rosyjskim), Nauka, Moskwa 1971.
14. J. Dyszlewicz, *The stress and displacement functions for the "second" axisymmetric problem of micropolar elastostatics*, Arch. Mech., **27**, 1, 1975.
15. J. Dyszlewicz, *Zagadnienia brzegowe równań niesymetrycznej teorii sprężystości*, rozprawa doktorska, Instytut Matematyki, Politechnika Wrocł., Wrocław 1976.
16. J. Dyszlewicz, *Funkcje przemieszczeń dla drugiego osiowo-symetrycznego zagadnienia mikropolarnej elastostatyki z uwzględnieniem obciążeń masowych oraz dystorsji*, Instytut Matematyki, Politech. Wrocł., Raport, Wrocław 1975.

Резюме

ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕШЕНИЙ ДЛЯ ВТОРОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЭЛАСТОСТАТИКИ

В рамках микрополярной эластостатуки обсуждается задача осесимметричной деформации описанной вектором перемещения $\mathbf{u}(r,z)\equiv(0,u_\theta,0)$ и вектором вращения $\boldsymbol{\varphi}(r,z)\equiv\equiv(\varphi r,0,\varphi z)$. Автор [14] предложил, отличный от других путей [2–5], путь решения в напряжениях этой задачи и получил представление полей аналогичное известному представлению В. Новацкого [2]. Настоящая работа составляет разширение [14] на случай неоднородных уравнений. Показывается, что для решения задачи с массовыми нагрузками достаточно знание некоторых фуниций $\chi(r,z)$, $\sigma(r,z)$, $\eta_\theta(r,z)$, а также $\Phi^*(r,z)$, $\Psi^*(r,z)$, случай же остаточных деформаций сводится к опредлению функции $\chi^*(r,z)$, а также $\Phi^*(r,z)$, $\Psi(r,z)$.

SUMMARY

DISPLACEMENT FUNCTIONS FOR SECOND AXI-SYMMETRIC PROBLEM OF MICROPOLAR ELASTOSTATICS

In a frame of a micropolar statics the axi-symmetric deformation described by the displacement vector $\mathbf{u}(r, z) \equiv (0, u_\theta, 0)$ and rotation vector $\varphi(r, z) \equiv (\varphi r, 0, \varphi z)$ is considered. The author [14] has proposed a different than in papers [2–5] method of solution of this problem and obtained the representation of fields similar to the well known Nowacki's representation. This paper is an extension of [14] on the case of nonhomogeneous equations. It appears that a knowledge of the certain functions $\chi(r, z)$, $\sigma(r, z)$ $\eta_\theta(r, z)$ and $\Phi^*(r, z)$, $\Psi^*(r, z)$ is sufficient for solving the problem with the mass loadings, whereas in a case of permanent deformations obtaining of solution reduces to the evaluation of the functions $\chi^*(r, z)$ and $\Phi^*(r, z)$, $\Psi^*(r, z)$.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MATEMATYKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 21 lutego 1975 r.