

DYNAMICZNE SYMETRYCZNE WYBOCZENIE LEPKOPLASTYCZNYCH POWŁOK OBROTOWYCH

WIESŁAW WOJEWÓDZKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono mechanizm dynamicznego wybooczenia o małych amplitudach lepko-plastycznych powłok obrotowych. Podano podstawowe równania opisujące symetryczną postać dynamicznego wybooczenia, metodę rozwiązania oraz przykład rozwiązania dla powłoki kulistej.

1. WPROWADZENIE

Konstrukcje powierzchniowe stosowane we współczesnej technice są poddawane działaniu coraz to większych obciążeń dynamicznych. Zmusza to do ekonomicznego wykorzystania własności materiałów konstrukcyjnych i znalezienia odpowiednich metod określania stanu naprężenia i odkształcenia. Istotnym problemem staje się wtedy zjawisko wybooczenia konstrukcji na skutek powstających odkształceń plastycznych.

W procesie dynamicznego wybooczenia, szczególnie w jego początkowym stadium, dużą rolę odgrywają siły inercji w powstrzymywaniu wzrostu amplitudy postaci wybooczenia. Umożliwia to rozwój dużych odkształceń w procesie ściskania i uplastycznienie przekroju, zanim niestateczności stają się decydujące. Zachodzi to nawet wówczas, gdy rozwój niestateczności rozpoczyna się we wczesnym stadium obciążenia. W przypadku powolnego obciążenia efekt sił bezwładności nie występuje i wówczas w procesie deformacji bardzo mały przyrost odkształcenia może powodować niestateczność. Powstające wtedy fale wybooczenia są dłuższe niż w dynamicznym przypadku, natomiast ich liczba jest mniejsza. Proces przejścia od dynamicznego do quasi-statycznego przypadku zależy od prędkości obciążenia.

W przypadku materiału wykazującego cechy sprężyste nagłe zmiany obciążenia powodują oscylacje. W sprężystym zakresie zgięciowa postać o częstotliwości wynoszącej około połowy częstotliwości drgań kolistej postaci może być, dla umiarkowanie cienkich powłok cylindrycznych, niestateczna ze względu na silne wzbudzenie przez ruch radialny, GOODIER i MCIVOR [1]. Transformacja energii z kolistej do zgięciowej postaci odbywa się na skutek perturbacji przez okres wielu cykli. Duże fałdujące, plastyczne deformacje pojawiają się, jak wykazały eksperymenty, w znacznie krótszym czasie. Zatem niestateczność typu Mathieu'go nie może ich powodować. W pierwszym okresie procesu deformacji dominuje ruch spowodowany ściskaniem i małe perturbacje nie powodują odciążenia w plastycznym sensie. Następnie poja-

wiające się wyboczenie jest typu Shanleya. Doświadczenia, LINDBERG i inni [2], i teoretyczne rozwiązania, WOJEWÓDZKI [3], pokazały, że zależnie od stopnia tłumienia w materiale wyboczenie odbywa się z oscylacjami lub bez oscylacji i że najbardziej istotny jest rozwój dużych deformacji ruchu podstawowego. W ramach tego typu wyboczenia można opisać zjawisko powstawania małych amplitud i w konsekwencji określić wielkość początkowego impulsu krytycznego. Z technicznego punktu widzenia wytrzymałości konstrukcji ta wartość obciążenia krytycznego jest najbardziej istotna, chociaż nie wyczerpuje wszystkich istniejących w praktyce sytuacji. Jak wykazały niektóre eksperymenty, np. FLORENCE i GOODIER [4], FLORENCE [5], w przypadku znacznych prędkości obciążenia postać wyboczenia zmienia się bardzo nieznacznie ze wzrostem obciążenia. Być może, że jest to wskazówka, aby w analizie przypadku dużych amplitud przyjąć tę postać wyboczenia i badać proces bardziej zaawansowanej deformacji.

Czynnikami sprzyjającymi powstawaniu dużych przemieszczeń są niedoskonałości układu, np. niedoskonałości procesu technologicznego i zawsze występujące perturbacje obciążenia i geometrii konstrukcji. Przyczyniają się one do tego, że dla pewnego poziomu obciążenia początkowe przemieszczenia prawie proporcjonalne do obciążenia doznają gwałtownych przyrostów i wtedy konstrukcja traci stateczność. W przypadku oscylacji występujące perturbacje mogą spowodować, że przemieszczenia w ruchu wokół konfiguracji równowagi układu staną się duże. Układ traci wtedy stateczność równowagi. Te dwa typy niestateczności mogą występować pod tym samym obciążeniem.

W dynamicznym wyboczeniu odkształcenia sprężyste są na ogół małe w porównaniu z odkształceniami końcowymi i z tego powodu nie zostały uwzględnione w większości istniejących opracowań, dając prostsze rozwiązania (np. w pracach ABRAHAMSONA i GOODIERA [6], VAUGHANA i FLORENCE'A [7]). Badania eksperymentalne powłok cylindrycznych, których stosunek promienia do grubości mieścił się w przedziale $10 < a/h < 36$, potwierdziły poprawność przyjęcia takiego uproszczenia. Jednakże badania LINDBERGA [8] pokazały, że dla bardzo cienkich cylindrów ($a/h = 480$) należy uwzględnić własności sprężyste materiału. Mają one znaczenie w inicjowaniu niestateczności. Interakcja kolistej sprężystej postaci ze zgięciową postacią ruchu wpływa na długość i liczbę fal, zmniejszając tę ostatnią, w których następnie rozwija się plastyczne zginanie (uwzględnienie odkształceń sprężystych będzie przedmiotem następnej pracy).

W dynamicznym wyboczeniu pod wpływem impulsowych obciążeń powodujących plastyczne płynięcie postać wyboczenia zależy nie tylko od układu, ale także od wielkości obciążenia i istniejących imperfekcji.

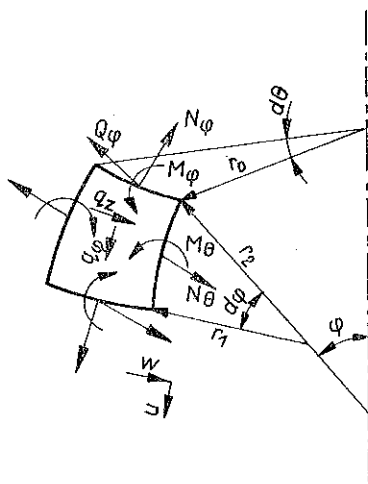
Istniejące szczegółowe rozwiązania dynamicznego, niesprężystego wyboczenia można sklasyfikować w dwie grupy. Pierwsza grupa prac [4, 6-8] (ANDERSON i LINDBERG [9], LYONS [10] i inne) zawiera rozwiązania powłok z materiału plastycznego o liniowym wzmocnieniu bez efektów lepkich. Druga grupa prac ([3], [5], WOJEWÓDZKI [11-14], PERRONE [15]) dotyczy powłok wykonanych z materiału czułego na prędkość deformacji. Wszystkie uzyskane rozwiązania z wyjątkiem [3] dotyczą cylindrycznych powłok o swobodnych końcach. W doświadczeniach obserwuje się,

że wpływ warunków brzegowych na postać deformacji ogranicza się do bardzo wąskich obszarów w pobliżu końców powłoki, rzędu małego ułamka długości fali. Również wszystkie opracowania, z wyjątkiem [3] i [4], opisują niekołowo-symetryczną postać wyboczenia. W pracy [14] zbadano wpływ podwyższonej temperatury na wyboczenie powłoki. W otrzymanych rozwiązaniach określono postać wyboczenia, rozkład pola sił wewnętrznych i w niektórych przypadkach podano wzór na początkowe obciążenie krytyczne. Dyskusję wzorów określających obciążenie krytyczne zawiera praca JONESA i OKAWY [16]. W zdecydowanej większości prac nie uwzględniono sprężystych własności materiału, nieliniowości geometrycznej oraz stosowano liniowe prawo wzmocnienia lub lepkości.

Celem niniejszej pracy jest opisanie symetrycznej postaci wyboczenia o małych amplitudach lepkoplastycznych powłok obrotowych obciążonych dynamicznie. W przypadku powłoki cylindrycznej będącej w stanie osiowego ściskania symetryczna postać wyboczenia była rozpatrywana w pracy [4] z uwzględnieniem liniowego wzmocnienia, a w [11] z uwzględnieniem lepkości materiału. Praca [3], gdzie również analizowano symetryczną postać wyboczenia, odnosi się w przeważającej części do powłoki kulistej.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Równania równowagi dynamicznej. Rozpatrujemy zagadnienie osiowo-symetryczne (rys. 1). Zatem stan naprężenia określają składowe σ_φ , σ_θ , σ_z , $\tau_{\varphi z}$. Składowe σ_z , $\tau_{\varphi z}$ są małe w porównaniu z σ_φ i σ_θ i zgodnie z założeniem technicznej teorii przy-



Rys. 1. Element powłoki; dodatnie kierunki sił i przemieszczeń

mujemy dalej $\sigma_z = 0$. Pomijając będziemy też wpływ $\tau_{\varphi z}$ na osiągnięcie stanu plastycznego w powłoce. Wektor przemieszczenia punktów powierzchni środkowej określają składowe w i u (z powodu symetrii $v = 0$). W tej sytuacji równania równowagi dynamicznej elementu powłoki mają postać [17]

$$\begin{aligned}
 & (N_\varphi r_0)' - N_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_0 + N_\theta (u/r_1 + w'/r_1) r_1 \sin \varphi - \\
 & \quad - Q_\varphi r_0 (u/r_1 + w'/r_1)' + (q_\varphi - \rho h \ddot{u}) r_0 r_1 = 0, \\
 (2.1) \quad & (Q_\varphi r_0)' + N_\theta r_0 + N_\theta r_1 \sin \varphi + N_\varphi r_0 (u/r_1 + w'/r_1)' + \\
 & \quad + N_\theta r_1 (u/r_1 + w'/r_1) \cos \varphi + (q_z - \rho h \ddot{w}) r_0 r_1 = 0, \\
 & (M_\varphi r_0)' - M_\theta r_1 \cos \varphi - Q_\varphi r_1 r_0 + M_\theta r_1 (u/r_1 + w'/r_1) \sin \varphi = 0,
 \end{aligned}$$

gdzie ρ oznacza gęstość materiału, h grubość powłoki, a przecinkiem i kropką oznaczono różniczkowanie odpowiednio względem zmiennej φ i czasu t . Eliminując się poprzeczną za pomocą ostatniego równania, układ ten można sprowadzić do układu dwóch równań.

Wypadkowe siły wewnętrzne. Określamy je następująco:

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad N_\varphi &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi dz, & N_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta dz, & Q_\varphi &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\varphi z} dz, \\
 M_\varphi &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\varphi z dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz.
 \end{aligned}$$

Związki kinematyczne. Przyjmujemy liniowe związki w postaci

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \dot{\varepsilon}_\varphi^0 &= \frac{\dot{u}' - \dot{w}}{r_1}, & \dot{\varepsilon}_\theta^0 &= \frac{\dot{u} \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}}{r_2}, & k_\varphi &= \frac{1}{r_1} \left(\frac{\dot{u} + \dot{w}'}{r_1} \right)', & k_\theta &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{r_2} \frac{\dot{u} + \dot{w}'}{r_1}, \\
 \dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_\varphi^0 - z k_\varphi, & \dot{\varepsilon}_\theta &= \dot{\varepsilon}_\theta^0 - z k_\theta,
 \end{aligned}$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_\varphi^0$, $\dot{\varepsilon}_\theta^0$ oznaczają prędkości odkształcenia punktów powierzchni środkowej, k_φ , k_θ prędkości zmian krzywizn, a $\dot{\varepsilon}_\varphi$, $\dot{\varepsilon}_\theta$ prędkości odkształcenia punktów w odległości z od powierzchni środkowej (oś z jest skierowana do środka powłoki, rys. 1).

Równania konstytutywne. Przyjmujemy równania dla materiałów wrażliwych na prędkość odkształcenia, wyprowadzone przez PERZYŃĄ [18], w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
 (2.4) \quad \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2\mu} \dot{s}_{ij} + \frac{\gamma}{2} \langle \varphi(F) \rangle \frac{s_{ij}}{\sqrt{J_2}}, & \dot{\varepsilon}_{kk} &= \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}, \\
 F &= \frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1, & \langle \varphi(F) \rangle &= \begin{cases} \varphi(F) & \text{dla } F > 0, \\ 0 & \text{dla } F \leq 0, \end{cases}
 \end{aligned}$$

gdzie ε_{ij} , σ_{ij} oznaczają odpowiednio składowe tensora odkształcenia i naprężenia, ε_{ij} , s_{ij} są dewiatorami tych tensorów, μ , K oznaczają odpowiednio moduły odkształcenia postaciowego i objętościowego, $k = \sigma_0 / \sqrt{3}$, σ_0 jest statyczną granicą plastyczności materiału, γ jest współczynnikiem lepkości (stała materiałowa), $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$ oznacza drugi niezmiennik dewiatora naprężenia.

Równania powyższe opisują liniowe efekty sprężyste, statyczne uplastycznienie według warunku Hubera-Misesa, izotropowe wzmocnienie materiału oraz liniowy

wplyw prędkości odkształcenia. W granicy, gdy $\gamma \rightarrow \infty$, $\sqrt{J_2} = k$ i po pominięciu sprężystej części prędkości odkształcenia w (2.4), otrzymuje się równania plastycznego płynięcia Saint Venanta-Levy'ego-Misesa, $\dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij}$.

W rozważanym przypadku osiowo-symetrycznego stanu i przy pominięciu sprężystej części prędkości odkształcenia z (2.4) otrzymujemy:

dla $\sqrt{J_2} > k$

$$(2.5) \quad \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\gamma}{6} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \frac{2\sigma_\varphi - \sigma_\theta}{\sqrt{J_2}}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{\gamma}{6} \left(\frac{\sqrt{J_2}}{k} - 1 \right) \frac{2\sigma_\theta - \sigma_\varphi}{\sqrt{J_2}};$$

dla $\sqrt{J_2} \leq k$

$$\dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_\theta = 0,$$

gdzie

$$(2.6) \quad J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_\theta + \sigma_\theta^2).$$

Zainicjowanie lepkoplastycznego płynięcia (2.5) jest możliwe gdy $\sqrt{J_2} > k$, a więc gdy wartość przyłożonego obciążenia w chwili początkowej przekracza wartość nośności granicznej. W trakcie deformacji, gdy $\sqrt{J_2} > k$, mamy proces obciążenia; natomiast gdy $\sqrt{J_2} \leq k$, proces odciążenia. Granica między obu procesami może zmieniać się i jest ona jednoznacznie określona przez warunek $\sqrt{J_2} = k$. Warunek ten implikuje w przypadku nieliniowych równań (2.5) $\dot{\epsilon}_{ij} = 0$ i odwrotnie. Oznacza to możliwość pojawiania się sztywnych obszarów w procesie deformacji.

3. METODA ROZWIĄZANIA

Równania równowagi dynamicznej powłok są formułowane w siłach wypadkowych (2.2). Aby je wyznaczyć, musimy rozwiązać równania (2.5) względem naprężeń.

Dla $\sqrt{J_2} > k$ otrzymujemy

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{2k}{\gamma} (2\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_\theta) + k \frac{2\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_\theta}{\sqrt{\dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{\epsilon}_\varphi \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}}, \\ \sigma_\theta &= \frac{2k}{\gamma} (2\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\varphi) + k \frac{2\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\varphi}{\sqrt{\dot{\epsilon}_\varphi^2 + \dot{\epsilon}_\varphi \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}}. \end{aligned}$$

Nieliniowość tych równań stwarza duże trudności w rozwiązywaniu konkretnych problemów. Jak już podkreślono w pierwszym rozdziale, w procesie deformacji można wyróżnić pewien podstawowy (dominujący) ruch oraz ruch perturbowany powodujący wyoboczenie o określonej postaci. Ograniczamy teraz amplitudę postaci wyoboczenia do amplitud małych w porównaniu z przemieszczeniami w ruchu podstawowym. Uzasadnia to myśl rozwinięcia (3.1) w szereg Taylora funkcji dwóch zmiennych w otoczeniu ruchu podstawowego (niepertubowanego) i zatrzymania tylko liniowych wyrazów. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 \sigma_\varphi &= \frac{k}{\gamma_0} (2\dot{\varepsilon}_\varphi + \dot{\varepsilon}_\theta) + \frac{k}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2}} \left[(2\dot{\varepsilon}_{0\varphi} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{0\theta}^2}{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2} (\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_{0\varphi}) - \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta}}{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2} (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_{0\theta}) \right], \\
 \sigma_\theta &= \frac{k}{\gamma_0} (2\dot{\varepsilon}_\theta + \dot{\varepsilon}_\varphi) + \frac{k}{\sqrt{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2}} \left[(2\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2}{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2} (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{\varepsilon}_{0\theta}) - \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{0\theta}\dot{\varepsilon}_{0\varphi}}{\dot{\varepsilon}_{0\varphi}^2 + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}^2} (\dot{\varepsilon}_\varphi - \dot{\varepsilon}_{0\varphi}) \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

gdzie $\dot{\varepsilon}_{0\varphi}$, $\dot{\varepsilon}_{0\theta}$ oznaczają prędkości odkształcenia punktów w odległości z od powierzchni środkowej powłoki w ruchu podstawowym, a $\gamma_0 = \gamma/2$. Zatem jako metodę rozwiązania problemu stosujemy superpozycję małych perturbacji na ruch nieperturbowany. Rozwiązując równania ruchu nieperturbowanego, a następnie ruchu perturbowanego, można znaleźć takie postacie wybożenia (liczbę pół-fal), dla których funkcje amplitudy mają największe tendencje wzrostu. Przy odpowiednich wartościach impulsu obciążenia i imperfekcjach bardzo mały przyrost którejkolwiek z tych wielkości powoduje duży przyrost przemieszczenia i w konsekwencji utratę stateczności. Kryterium obciążenia w przypadku równań fizycznych (3.2) ma postać

$$(2\dot{\varepsilon}_{0\varphi} + \dot{\varepsilon}_{0\theta}) \dot{\varepsilon}_\varphi + (2\dot{\varepsilon}_{0\theta} + \dot{\varepsilon}_{0\varphi}) \dot{\varepsilon}_\theta > 0.
 \tag{3.3}$$

Odciążenie występuje w chwili, gdy ruch nieperturbowany ustaje; może również wystąpić w trakcie procesu deformacji.

W dalszej części pracy podamy zestawienie podstawowych równań dla szczególnych przypadków parametrów geometrycznych powłok oraz rozwiązanie szczegółowe dla powłoki kulistej.

4. POWŁOKA WALCOWA

Przyjmując w równaniach (2.1) i (2.3) $\varphi = \pi/2$, $r_2 = r_0 = a$, $dx = r_1 d\varphi$, $r_1 \rightarrow \infty$ oraz zmieniając indeks φ na x otrzymujemy dla powłoki walcowej następujące równania:

$$\begin{aligned}
 N'_x + N_\theta w'/a - Q_x w'' + q_x - \rho h \ddot{u} &= 0, \\
 Q'_x + N_\theta/a + N_x w'' + q_z - \rho h \ddot{w} &= 0, \\
 M'_x - Q_x + M_\theta w'/a &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_x^0 = \dot{u}', \quad \dot{\varepsilon}_\theta^0 = -\dot{w}/a, \quad k_x - \dot{w}'', \quad k_\theta = 0, \\
 \dot{\varepsilon}_x = \dot{\varepsilon}_x^0 - z k_x, \quad \dot{\varepsilon}_\theta = \dot{\varepsilon}_\theta^0.
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Przemieszczenia punktów powierzchni środkowej wyrażamy funkcjami $w = w_0(t) + w_p(t, x)$, $u = u_0(t, x) + u_p(t, x)$. Funkcje $w_0(t)$ i $u_0(t, x)$ reprezentują ruch podstawowy (nieperturbowany), a $w_p(t, x)$ i $u_p(t, x)$ są funkcjami perturbowa-

nych przemieszczeń. Możemy teraz z (3.2) wyznaczyć naprężenia, a następnie z (2.2) siły przekrojowe. Otrzymujemy

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{k}{\gamma_0} \left[2(\dot{u}_0 + \dot{u}_p)' - \frac{\dot{w}_0 + \dot{w}_p}{a} - 2z\dot{w}_p'' \right] + \frac{k}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{1/2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(2\dot{u}_0' - \frac{\dot{w}_0}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{\dot{w}_0/a}{\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2} \left[\frac{\dot{w}_0}{a} (\dot{u}_p' - z\dot{w}_p'') - \frac{\dot{u}_0' \dot{w}_p}{a} \right] \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{k}{\gamma_0} \left[(\dot{u}_0 + \dot{u}_p)' - \frac{2(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} - z\dot{w}_p'' \right] + \frac{k}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{1/2}} \times \\ &\quad \times \left\{ \left(\dot{u}_0' - \frac{2\dot{w}_0}{a} \right) + \frac{3}{2} \frac{\dot{u}_0'}{\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2} \left[\frac{\dot{w}_0}{a} (\dot{u}_p' - z\dot{w}_p'') - \frac{\dot{u}_0' \dot{w}_p}{a} \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad \begin{aligned} N_x &= \frac{kh}{\gamma_0} \left[2(\dot{u}_0 + \dot{u}_p)' - \frac{\dot{w}_0 + \dot{w}_p}{a} \right] + \\ &\quad + kh \frac{(\dot{u}_0' - \dot{w}_0/a) + \frac{3}{2} \frac{\dot{w}_0/a}{\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2} \left(\frac{\dot{w}_0}{a} \dot{u}_p' - \dot{u}_0' \frac{\dot{w}_p}{a} \right)}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{1/2}}, \\ N_\theta &= \frac{kh}{\gamma_0} \left[(\dot{u}_0 + \dot{u}_p)' - \frac{2(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} \right] + \\ &\quad + kh \frac{(\dot{u}_0' - 2\dot{w}_0/a) + \frac{3}{2} \frac{\dot{u}_0'}{\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2} \left(\frac{\dot{w}_0}{a} \dot{u}_p' - \dot{u}_0' \frac{\dot{w}_p}{a} \right)}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

$$M_x = -\frac{kh^3}{12} \left[\frac{2}{\gamma_0} + \frac{3}{2} \frac{\dot{w}_0^2/a^2}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{3/2}} \right] \dot{w}_p'',$$

$$M_\theta = -\frac{kh^3}{12} \left[\frac{1}{\gamma_0} + \frac{3}{2} \frac{\dot{u}_0' \dot{w}_0/a}{(\dot{u}_0'^2 - \dot{u}_0' \dot{w}_0/a + \dot{w}_0^2/a^2)^{3/2}} \right] \dot{w}_p''.$$

Przyjmując w (4.3) i (4.4) funkcje perturbowanych przemieszczeń za równe zero, otrzymujemy opis stanu niepertubowanego. Natomiast przyjmując $\gamma = \infty$ dostajemy odpowiednie wyrażenia dla plastyczności idealnej. Proces dynamicznego wyboczenia powłoki cylindrycznej jest opisany przez równania (4.1) i wzory (4.4).

Kryterium obciążenia (3.3) przyjmuje postać

$$(4.5) \quad \left(2\dot{u}_0' - \frac{\dot{w}_0}{a} \right) (\dot{u}_0' + \dot{u}_p' - z\dot{w}_p'') + \left(2\frac{\dot{w}_0}{a} - \dot{u}_0' \right) \left(\frac{\dot{w}_0 + \dot{w}_p}{a} \right) > 0.$$

Jak już wspomniano w pierwszym rozdziale, wpływ warunków brzegowych na postać deformacji ogranicza się do bardzo małego obszaru w pobliżu krawędzi powłoki. W konkretnych przypadkach ułatwia to opis ruchu podstawowego, a tym samym rozwiązanie całego problemu.

5. POWŁOKA STOŻKOWA

Przyjmując w równaniach (2.1) i (2.3) $\varphi = \pi/2 - \beta$, $r_0 = s \sin \varphi$, $r_2 = s \operatorname{tg} \beta$, $ds = r_1 d\varphi$, $r_1 \rightarrow \infty$ oraz zmieniając indeks φ na s , otrzymujemy w granicy następujące równania:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} (sN_s)' - N_\theta + N_\theta w' \operatorname{ctg} \beta - sQ_s w'' + (q_s - \rho h \ddot{u})s &= 0, \\ (sQ_s)' + N_\theta \operatorname{ctg} \beta + sN_s w'' + N_\theta w' + (q_z - \rho h \ddot{w})s &= 0, \\ (sM_s)' - M_\theta - sQ_s + M_\theta w' \operatorname{ctg} \beta &= 0; \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_s^0 &= \dot{u}', & \dot{\varepsilon}_\theta^0 &= \frac{\dot{u} - \dot{w} \operatorname{ctg} \beta}{s}, & k_s &= \dot{w}'', & k_\theta &= \dot{w}'/s, \\ \dot{\varepsilon}_s &= \dot{\varepsilon}_s^0 - z k_s, & \dot{\varepsilon}_\theta &= \dot{\varepsilon}_\theta^0 - z k_\theta, \end{aligned}$$

gdzie β oznacza kąt pomiędzy osią a tworzącą powłoki, s współrzędną liczoną od wierzchołka powłoki. Uwzględniając związki (5.2) w (3.2), można wyrazić stan naprężenia przez prędkości przemieszczeń. Następnie można wyznaczyć siły wypadkowe i podstawić do (5.1), otrzymując równania ruchu. Związki te mają złożoną postać. Ogólny przypadek wyboczenia powłoki stożkowej stanowi skomplikowane zagadnienie matematyczne. Uzyskanie rozwiązania tego problemu nawet w przypadkach szczególnych bez dodatkowych założeń jest złożone i nie będzie tutaj rozpatrywane.

6. POWŁOKA KULISTA

6.1. Przypadek ogólny

Przyjmując $r_1 = r_2 = a$, $r_0 = a \sin \varphi$ w równaniach (2.1) i (2.3), otrzymujemy następujące równania dla kulistej powłoki:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} N'_\varphi + (N_\varphi - N_\theta) \operatorname{ctg} \varphi - Q_\varphi + N_\theta (u/a + w'/a) - Q_\varphi (u'/a + w''/a) + (q_\varphi - \rho h \ddot{u})a &= 0, \\ Q'_\varphi + Q_\varphi \operatorname{ctg} \varphi + N_\varphi + N_\theta + N_\varphi (u'/a + w''/a) + N_\theta (u/a + w'/a) \operatorname{ctg} \varphi + \\ &+ (q_z - \rho h \ddot{w})a = 0, \end{aligned}$$

$$(6.2) \quad \begin{aligned} M'_\varphi + (M_\varphi - M_\theta) \operatorname{ctg} \varphi - Q_\varphi a + M_\theta (u/a + w'/a) &= 0; \\ \dot{\varepsilon}_\varphi^0 &= \frac{\dot{u}' - \dot{w}}{a}, & \dot{\varepsilon}_\theta^0 &= \frac{\dot{u} \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}}{a}, & k_\varphi &= \frac{1}{a} \left(\frac{\dot{u} + \dot{w}'}{a} \right)', & k_\theta &= \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{a} \frac{\dot{u} + \dot{w}'}{a}, \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= \dot{\varepsilon}_\varphi^0 - z k_\varphi, & \dot{\varepsilon}_\theta &= \dot{\varepsilon}_\theta^0 - z k_\theta. \end{aligned}$$

Całkowite przemieszczenia, będące sumą przemieszczeń ruchu nieperturbowanego $w_0(t)$, $u_0 = 0$ (z powodu symetrii) i ruchu perturbowanego $w_p(t, \varphi)$, $u_p(t, \varphi)$, wynoszą: $w(t, \varphi) = w_0(t) + w_p(t, \varphi)$, $u(t, \varphi) = u_p(t, \varphi)$. Naprężenia normalne i siły przekrojowe wyznaczone z (3.2) i (2.2) wynoszą

$$(6.3) \quad \begin{aligned} \sigma_\varphi &= \frac{k}{\gamma_0} \left[\frac{2\dot{u}'_p + \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi - 3(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} - \frac{z}{a} \frac{2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right] + \\ &+ \frac{k}{\sqrt{3} \dot{w}_0/a} \left[-\frac{3\dot{w}_0}{a} + \frac{\dot{u}'_p - \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi}{2a} + \frac{z}{a} \frac{-(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{2a} \right], \end{aligned}$$

$$(6.3) \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\gamma_0} \left[\frac{2\dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi + \dot{u}'_p - 3(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} - \frac{z}{a} \frac{2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p)'}{a} \right] +$$

$$\text{[cd.]} \quad + \frac{k}{\sqrt{3}\dot{w}_0/a} \left[-\frac{3\dot{w}_0}{a} + \frac{-\dot{u}'_p + \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi}{2a} + \frac{z}{a} \frac{(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' - (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{2a} \right];$$

$$N_\varphi = \frac{kh}{\gamma_0} \frac{2\dot{u}'_p + \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi - 3(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} + \frac{kh}{\sqrt{3}\dot{w}_0/a} \times$$

$$\times \left(-\frac{3\dot{w}_0}{a} + \frac{1}{2} \frac{\dot{u}'_p - \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right),$$

$$N_\theta = \frac{kh}{\gamma_0} \frac{2\dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi + \dot{u}'_p - 3(\dot{w}_0 + \dot{w}_p)}{a} + \frac{kh}{\sqrt{3}\dot{w}_0/a} \times$$

$$\times \left(-\frac{3\dot{w}_0}{a} + \frac{1}{2} \frac{-\dot{u}'_p + \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right),$$

(6.4)

$$M_\varphi = -\frac{k}{\gamma_0} \frac{h^3}{12a} \frac{2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{a} + \frac{k}{\sqrt{3}\dot{w}_0/a} \times$$

$$\times \frac{h^3}{24a} \frac{-(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{a},$$

$$M_\theta = -\frac{k}{\gamma_0} \frac{h^3}{12a} \frac{2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p)'}{a} +$$

$$+ \frac{k}{\sqrt{3}\dot{w}_0/a} \frac{h^3}{24a} \frac{(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' - (\dot{u}_p + \dot{w}'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{a}.$$

Odpowiednie wzory dla ruchu niepertubowanego otrzymujemy przyjmując w podanych wyżej wyrażeniach, że funkcje w_p i u_p są równe zero. Natomiast dla $\gamma = \infty$ dostajemy zależności dla plastyczności idealnej. Równania ruchu, opisujące problem dynamicznego wyboczenia powłoki, dostajemy przez podstawienie (6.4) do równań (6.1) po uprzednim wyeliminowaniu z nich siły poprzecznej. Drugie równanie będące sumą dwóch równań, tj. równania ruchu perturbowanego i niepertubowanego, przedstawiamy w rozłącznej postaci. Otrzymujemy mianowicie

$$(6.5) \quad \frac{kh}{\gamma_0 a} \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) [2(\dot{u}'_p + \dot{u}'_p \operatorname{ctg} \varphi) - \dot{u}_p (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi)] - 3\dot{w}'_p + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12a^2} [2(\dot{w}'''_p + \dot{w}''_p \operatorname{ctg} \varphi) - \dot{w}'_p (1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi)] \right\} + \frac{kh}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) \times \right.$$

$$\times [\dot{u}''_p + \dot{u}'_p \operatorname{ctg} \varphi + \dot{u}_p (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi)] + \frac{h^2}{12a^2} [\dot{w}'''_p + \dot{w}''_p \operatorname{ctg} \varphi + \dot{w}'_p (1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi)] \left. \right\} -$$

$$- 3kh \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{u_p + w_p}{a} \right) + a(q_\varphi - \rho h \ddot{u}_p) = 0,$$

$$\frac{h^2}{12a^2} \left\{ \frac{kh}{\gamma_0 a} [-2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)'' - 4(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)'' \operatorname{ctg} \varphi + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' (3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi) + \right.$$

$$(6.5) \quad \begin{aligned} \text{[cd.]} \quad & -(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)(3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg} \varphi + \frac{kh}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} [-(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)''' - 2(\dot{u}_p + \dot{w}'_p)'' \operatorname{ctg} \varphi + \\ & + (\dot{u}_p + \dot{w}'_p)' \operatorname{ctg}^2 \varphi - (\dot{u}_p + \dot{w}'_p)(3 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg} \varphi] + \frac{3kh}{\gamma_0 a} (-2\dot{w}_p + \dot{u}'_p + \dot{u}_p \operatorname{ctg} \varphi) - \\ & - 3kh \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left[\frac{(u_p + w'_p)' + (u_p + w'_p) \operatorname{ctg} \varphi}{a} \right] + a(q_{zp} - \rho h \ddot{w}_p) = 0, \end{aligned}$$

$$(6.6) \quad \ddot{w}_0 + \frac{6k}{\gamma_0 \rho a^2} \dot{w}_0 + \frac{6k}{\sqrt{3} \rho a} - \frac{q_{z0}}{\rho h} = 0,$$

gdzie $q_z(t, \varphi) = q_{z0}(t) + q_{zp}(t, \varphi)$.

Z kolei przekształcimy układ równań (6.5). Sposób postępowania w pierwszym etapie jest taki, jak w przypadku wybożenia sprężystego [17]. Rozpatrujemy przypadek $q_\varphi = 0$, wprowadzamy nową zmienną $u_p = \psi'_p$, operator różniczkowy $H(\dots) = (\dots)'' + (\dots)' \operatorname{ctg} \varphi + 2(\dots)$ i układ (6.5) przedstawimy w postaci

$$(6.7) \quad \begin{aligned} & \frac{2k}{\gamma_0 a} \left\{ \left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) \left[H(\dot{\psi}_p) - \frac{3}{2} \dot{\psi}_p \right] - \frac{3}{2} \dot{w}_p + \frac{h^2}{12a^2} \left[H(\dot{w}_p) - \frac{3}{2} \dot{w}_p \right] \right\} + \\ & + \frac{k}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} \left[\left(1 + \frac{h^2}{12a^2} \right) H(\dot{\psi}_p) + \frac{h^2}{12a^2} H(\dot{w}_p) \right] + \\ & - \frac{3k}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (\psi_p + w_p) - a \rho \ddot{\psi}_p = 0, \\ & \frac{h^2}{12a^2} \left\{ -\frac{2k}{\gamma_0 a} \left[HH(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p) - \frac{7}{2} H(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p) + 3(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p) \right] + \right. \\ & - \frac{k}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} [HH(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p) - 2H(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p)] \left. \right\} + \frac{3k}{\gamma_0 a} [H(\dot{\psi}_p) - 2(\dot{\psi}_p + \dot{w}_p)] + \\ & - \frac{3k}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) [H(\psi_p + w_p) - 2(\psi_p + w_p)] + a \left(\frac{q_{zp}}{h} - \rho \ddot{w}_p \right) = 0. \end{aligned}$$

Zakładamy opis symetrycznej postaci wybożenia i perturbacji obciążenia przez nieskończone szeregi funkcji Legendre'a

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \psi_p &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(t) P_n(\cos \varphi), & w_p &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n(t) P_n(\cos \varphi), \\ q_{zp} &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{zn}(t) P_n(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Wykorzystując zależności $P_n'' + P_n' \operatorname{ctg} \varphi + n(n+1)P_n = 0$, $H(P_n) = -\lambda_n P_n$, $HH(P_n) = -\lambda_n^2 P_n$, gdzie $\lambda_n = n(n+1) - 2$ oraz szeregi (6.8) w równaniach (6.7) (w pierwszym

równaniu układu (6.7) pomijamy $h^2/12a^2$ jako wielkość małą w porównaniu z jedynką) otrzymujemy następujący układ równań amplitud:

$$\begin{aligned}
 (6.9) \quad & \frac{a\rho}{k} \ddot{\psi}_n + \left[\left(\frac{2}{\gamma_0 a} + \frac{1}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} \right) \lambda_n + \frac{3}{\gamma_0 a} \right] \dot{\psi}_n + \frac{3}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \psi_n + \\
 & + \left[\frac{h^2}{12a^2} \left(\frac{2}{\gamma_0 a} + \frac{1}{2\sqrt{3}\dot{w}_0} \right) \lambda_n + \frac{3}{\gamma_0 a} \right] \dot{w}_n + \frac{3}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) w_n = 0, \\
 & \left[\frac{h^2}{6\gamma_0 a^3} \left(\lambda_n^2 + \frac{7}{2} \lambda_n + 3 \right) + \left(\frac{h^2}{24\sqrt{3}a^2\dot{w}_0} \lambda_n + \frac{3}{\gamma_0 a} \right) (\lambda_n + 2) \right] \dot{\psi}_n + \\
 & - \frac{3}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) (\lambda_n + 2) \psi_n + \frac{a\rho}{k} \ddot{w}_n + \left[\frac{h^2}{6\gamma_0 a^3} \left(\lambda_n^2 + \frac{7}{2} \lambda_n + 3 \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{h^2}{24\sqrt{3}a^2\dot{w}_0} \lambda_n (\lambda_n + 2) + \frac{6}{\gamma_0 a} \right] \dot{w}_n - \frac{3}{a} \left(\frac{\dot{w}_0}{\gamma_0 a} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \times \\
 & \times (\lambda_n + 2) w_n - \frac{a}{kh} q_{zn} = 0.
 \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu (6.9) istnieje i jest jednoznaczne. Można go poszukiwać na drodze numerycznej lub analitycznie metodą kolejnych przybliżeń. Warunki początkowe dla równań (6.6) i (6.9) w przypadku konkretnego zadania mogą być łatwo podane.

Kryterium obciążenia (3.3) w przypadku powłoki kulistej ma prostą postać

$$(6.10) \quad 3\dot{\epsilon}_{0\varphi} (\dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_\theta) > 0.$$

6.2. Obciążenie prostokątnym impulsem ciśnienia

W pierwszym przybliżeniu rozwiązania problemu sformułowanego w rozdziale 6.1 przyjmujemy $u_p = 0$. Pominiemy też \dot{w}_p w porównaniu z \dot{w}_0 jako wielkość małą w pierwszym wyrazie wzorów (6.3). Ten szczególny przypadek był rozpatrywany w pracy [3], a przytaczamy go tutaj w skrócie dla ilustracji metody. Równanie problemu lepkoplastycznego wyboczenia ma postać dla $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned}
 (6.11) \quad & \ddot{w}_p + \frac{\sqrt{3}\sigma_0 h^2}{36\gamma_0 \rho a^4} [2\dot{w}_p'''' + 4\dot{w}_p''' \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}_p'' (3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi) + \dot{w}_p' (3 + 2 \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg} \varphi] + \\
 & + \frac{\sigma_0 h^2}{72\rho a^3 \dot{w}_0} [\dot{w}_p'''' + 2\dot{w}_p''' \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}_p'' \operatorname{ctg}^2 \varphi + \dot{w}_p' (3 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg} \varphi] + \\
 & + \frac{\sigma_0}{\rho a^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma_0 a} \dot{w}_0 + 1 \right) (w_p'' + w_p' \operatorname{ctg} \varphi) - \frac{q_{zp}}{\rho h} = 0;
 \end{aligned}$$

dla $t \geq T$ obowiązuje równanie (6.11) z podstawieniem $q_{zp} = 0$.

Ruch nieperturbowany $w_0(t)$ jest określony przez równanie (6.6). Powłoka jest poddana działaniu równomiernie rozłożonego ciśnienia, które jest nagle przyłożone w chwili $t=0$, utrzymywane o stałej intensywności Q wraz z jego małymi perturba-

cyjami przez okres $0 < t < T$ i nagle usunięte w chwili $t = T$. Równanie (6.6) po wykorzystaniu warunków początkowych $w_0(0) = 0$, $\dot{w}_0(0) = 0$ i warunków ciągłości dla $t = T$ ma następujące rozwiązanie:

$$(6.12) \quad w_0 = \frac{1}{\rho c} \left(\frac{2\sigma_0}{a} - \frac{Q}{h} \right) \left[\frac{1}{c} (1 - e^{-ct}) - t \right] \quad \text{dla} \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$w_0 = \frac{2\sigma_0}{\rho a c^2} (1 - ct - e^{-ct}) + \frac{Q}{\rho h c} \left[T + \frac{1}{c} (1 - e^{cT}) e^{-ct} \right] \quad \text{dla} \quad T \leq t \leq t_f,$$

gdzie $c = 2\sqrt{3}\sigma_0/(\gamma_0 \rho a^2)$. Ruch nieperturbowany ustaje w czasie $t = t_f$, kiedy $\dot{w}_0(t_f) = 0$. Stąd określając czas jego trwania otrzymujemy

$$(6.13) \quad t_f = \frac{1}{c} \ln \left[1 - \frac{Qa}{2\sigma_0 h} (1 - e^{cT}) \right].$$

W granicznym przypadku dla plastyczności idealnej ($\gamma = \infty$) powyższe związki przechodzą w następujące:

dla $0 \leq t \leq T$

$$(6.14) \quad \ddot{w}_n + \frac{\sigma_0 h^2}{72\rho a^3 \dot{w}_0} [\dot{w}_p'''' + 2\dot{w}_p''' \operatorname{ctg} \varphi - \dot{w}_p'' \operatorname{ctg}^2 \varphi + \dot{w}_p' (3 + \operatorname{ctg}^2 \varphi) \operatorname{ctg} \varphi] +$$

$$+ \frac{\sigma_0}{\rho a^2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\gamma_0 a} \dot{w}_0 + 1 \right) (w_p'' + w_p' \operatorname{ctg} \varphi) - \frac{q_{zp}}{\rho h} = 0;$$

dla $t \geq T$ obowiązuje (6.14) z podstawieniem $q_{zp} = 0$,

$$(6.15) \quad w_0 = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{\sigma_0}{a} + \frac{Q}{2h} \right) t^2, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$w_0 = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\sigma_0}{a} t^2 + \frac{QT}{h} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right], \quad T \leq t \leq t_f,$$

$$(6.16) \quad t_f = \frac{I}{Q_0},$$

gdzie $I = QT$ jest impulsem obciążenia, a $Q_0 = 2\sigma_0 h/a$ nośnością graniczną.

Równania amplitud (6.9) redukują się do równania o postaci następującej:
dla $0 \leq t \leq T$

$$(6.17) \quad \ddot{w}_n + n(n+1) \frac{ch^2}{72a^2} \left[\frac{n(n+1)-2}{2 \left(1 - \frac{Q}{Q_0} \right) (e^{-ct} - 1)} + 2n(n+1) - 1 \right] \dot{w}_n +$$

$$-n(n+1) \frac{\sigma_0}{\rho a^2} \left[e^{-ct} - \frac{Q}{Q_0} (e^{-ct} - 1) \right] w_n - \frac{b_n Q}{\rho h} = 0,$$

dla $T \leq t \leq t_f$

$$(6.17') \quad \ddot{w}_n + n(n+1) \frac{ch^2}{72a^2} \left[\frac{n(n+1)-2}{2(e^{c(t_f-t)}-1)} + 2n(n+1)-1 \right] \times \\ \times \dot{w}_n - n(n+1) \frac{\sigma_0}{\rho a^2} e^{c(t_f-t)} w_n = 0.$$

W granicznym przypadku $\gamma = \infty$ mamy
dla $0 \leq t \leq T$

$$(6.18) \quad \ddot{w}_n + n(n+1)[n(n+1)-2] \frac{h^2}{72a^2} \frac{1}{2\left(\frac{Q}{Q_0}-1\right)t} \dot{w}_n - n(n+1) \frac{\sigma_0}{\rho a^2} w_n - \frac{b_n Q}{ph} = 0,$$

dla $T \leq t \leq t_f$

$$(6.18') \quad \ddot{w}_n + n(n+1)[n(n+1)-2] \frac{h^2}{72a^2} \frac{1}{2(t_f-t)} \dot{w}_n - n(n+1) \frac{\sigma_0}{\rho a^2} w_n = 0.$$

W równaniach amplitud stosownie do (6.8) przyjęto $q_{zn} = b_n Q$, gdzie b_n jest współczynnikiem perturbacji obciążenia. Zakładając reprezentację początkowej perturbacji przemieszczenia w postaci szeregu

$$(6.19) \quad w_p(\varphi, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \varphi)$$

mamy następujące warunki początkowe powyższych równań amplitud

$$(6.20) \quad w_n(0) = a_n, \quad \dot{w}_n(0) = 0.$$

Analityczne przybliżone rozwiązanie równań różniczkowych amplitud można uzyskać za pomocą szeregów. Łatwiej je jednak rozwiązać metodą numeryczną.

Podane równania problemu dynamicznego wyboczenia obowiązują w procesie obciążenia, tzn. gdy jest spełniona nierówność (6.10). Odciążenie występuje w chwili $t = t_f$, gdy $\dot{w}_0 = 0$. Wskutek rozwoju przemieszczeń ruchu perturbowanego odciążenie w pewnych obszarach powłoki może wystąpić w czasie trwania procesu deformacji. Zajmijmy się teraz tym przypadkiem.

Zgodnie z (6.10) i (6.2) mamy

$$(6.21) \quad \dot{w}_0 + \frac{z}{2a} (\dot{w}_p'' + \dot{w}_p' \operatorname{ctg} \varphi) > 0.$$

Całkując (6.21) i wykorzystując warunki (6.20) otrzymujemy

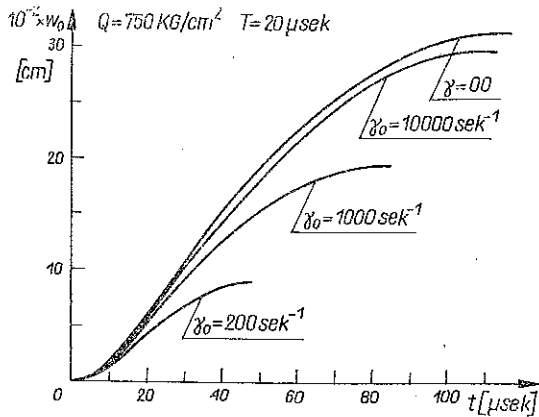
$$(6.22) \quad w_0 - \frac{z}{2a} \bar{n}(\bar{n}+1)(w_n^- - a_n) P_n^- > 0,$$

gdzie \bar{n} jest tą wartością n , dla której funkcja amplitudy ma największe wartości. Jeśli nierówność (6.22) będzie spełniona w miejscach powłoki, gdzie w_n^- ma największe wartości i $z = \pm h/2$, to wówczas będzie spełniona wszędzie. Prowadzi to do nierówności

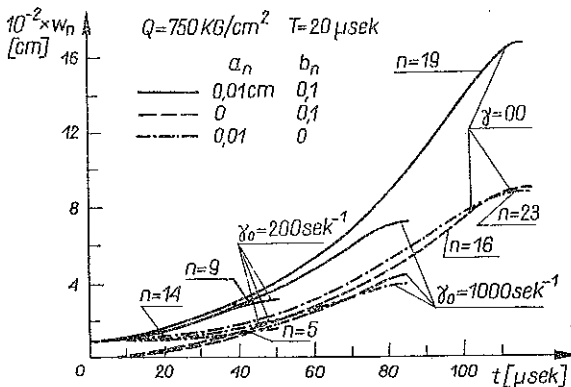
$$(6.23) \quad w_n^- < \frac{w_0}{(h/4a) \bar{n}(\bar{n}+1) |P_n^-|} + a_n.$$

Jeśli nierówność (6.23) staje się równością w pewnym punkcie na powierzchni powłoki, to następuje proces odciążenia, a więc w tym przypadku propagacja strefy sztywnej.

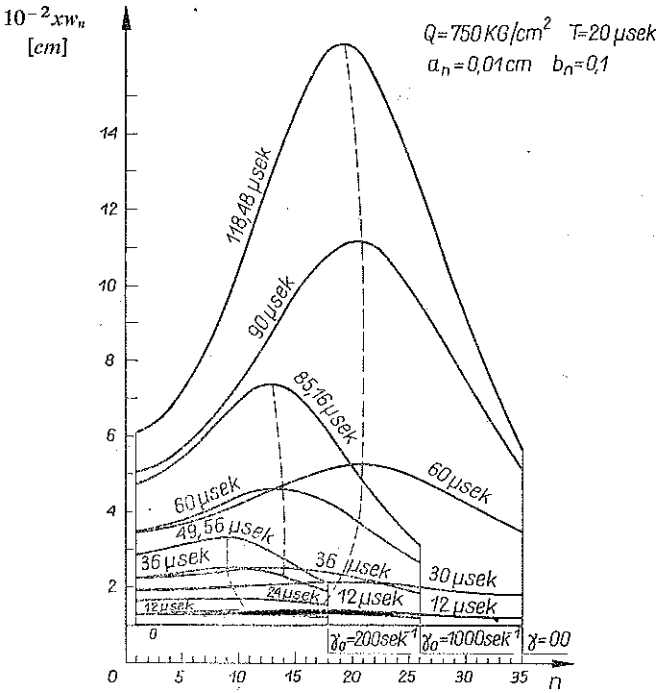
Wyniki numeryczne. Przyjęto powłokę wykonaną z miękkiej stali o następujących parametrach: $\sigma_0 = 2110 \text{ kG/cm}^2$, $\rho = 7,8 \cdot 10^{-6} \text{ kGsec}^2/\text{cm}^4$, $a = 10 \text{ cm}$, $h = 0,3 \text{ cm}$. Wykres funkcji (6.12) opisującej ruch nieperturbowany przykładowo dla $Q = 750 \text{ kG/cm}^2$, $T = 20 \mu \text{ sec}$ i kilku wartości γ przedstawiono na rys. 2. Wykres przemieszczeń w_n w ruchu perturbowanym przedstawiono na rys. 3. Zauważyć można duży wpływ lepkości materiału na wielkość przemieszczeń i czas trwania deformacji. Równania amplitud (6.17) zostały rozwiązane numerycznie metodą Rungego-Kutty piątego rzędu ze zmiennym krokiem na komputerze ODRA 1204. Na rys. 4 przedstawiono typowe wykresy wzrostu funkcji amplitud w czasie dla kolejnych wartości n . Dla pewnej wartości n funkcje amplitud osiągają największe wartości. Wybierając tę wartość n , dla której funkcje mają maksimum, można określić liczbą półfal i ich



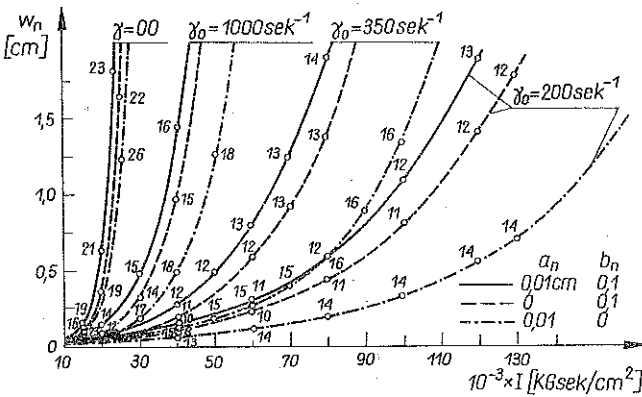
Rys. 2. Przemieszczenia w_0 w ruchu nieperturbowanym dla kilku współczynników lepkości materiału



Rys. 3. Przemieszczenia w_n w ruchu perturbowanym dla kilku współczynników lepkości materiału i kilku współczynników perturbacji przemieszczenia i obciążenia



Rys. 4. Amplituda perturbowanego przemieszczenia w_n jako funkcja liczby półfal n i czasu dla kilku współczynników lepkości materiału



Rys. 5. Amplituda perturbowanego przemieszczenia w_n i liczba półfal jako funkcja impulsu dla kilku współczynników lepkości materiału i kilku współczynników perturbacji przemieszczenia i obciążenia

długość. Zmiana postaci wybooczenia w czasie jest zaznaczona na rysunku linią przerywaną. Zmianę funkcji w_n w zależności od impulsu pokazano na rys. 5. Funkcje te w wąskim zakresie impulsu, szczególnie dla większych wartości γ , osiągają bardzo duże przyrosty. Tę własność można wykorzystać do określenia wielkości impulsu krytycznego związanego z taką wartością odciętej, począwszy od której mały jej

przyrost powoduje duży przyrost amplitudy perturbowanego ugięcia. Liczby przy kropkach wzdłuż krzywych oznaczające teoretyczną postać wybożenia są stałe lub zmieniają się nieznacznie. Zwraća również uwagę duży wpływ współczynników perturbacji początkowego przemieszczenia i obciążenia na wartość impulsu krytycznego. Dla $Q=750 \text{ kG/cm}^2$, $T=20 \mu \text{ sec}$, $\gamma_0=200; 1000 \text{ sec}^{-1}$ warunek obciążenia (6.23) jest spełniony w każdym punkcie na powierzchni powłoki. Natomiast dla większych wartości impulsów i współczynników lepkości wyniki numeryczne przedstawione na rys. 5 mogą być obarczone pewnym błędem wynikającym z niespełnienia warunku (6.23), kiedy amplituda w_n osiąga większe wartości.

7. ZAKOŃCZENIE

W pracy podano podstawowe równania opisujące problem dynamicznego symetrycznego wybożenia powłok obrotowych, metodę rozwiązania oraz przykład. Rozpatrywano powłoki z materiału całkowicie dysypatywnego, w którym drgania nie występują w procesie deformacji. Stosowano liniowe prawo lepkości i związki kinematyczne dla małych przemieszczeń. W procesie deformacji, zwłaszcza w jego początkowym okresie, dominuje ruch spowodowany ściskaniem. Rozwijające się wolniej reakcje momentowe składają się z dwóch części: pierwsza jest wynikiem płynięcia w złożonym stanie naprężenia, a druga wynikiem lepkości własności materiału. Powłoka traci stateczność w procesie płynięcia, gdy impuls obciążenia osiąga pewną wartość krytyczną (rys. 5). Perturbacje znacznie obniżają wielkość krytycznego impulsu. Wpływ ten wzrasta dla mniejszych wartości γ . Lepkość materiału wyraźnie zwiększa odporność powłoki na utratę stateczności. Matematyczne kryterium stateczności i wartość obciążenia krytycznego wiąże się z warunkiem rozwiązalności układu różniczkowych równań amplitud, np. układu (6.9) dla powłoki kulistej. Trudność polega na rozwiązywaniu tego typu układów. Ścisłe zbadanie zakresu stosowalności kryterium stateczności, jak wiadomo, wymaga badania równania, które wiąże impuls krytyczny ze współczynnikami perturbacji oraz parametrami geometrycznymi i materiałowymi. Równanie to przedstawia hiperpowierzchnię graniczną w przestrzeni tych parametrów wyznaczając granice stosowalności kryterium. Ze względu na złożoność matematyczną problemu na ogół całkowanie równań ruchu można przeprowadzić numerycznie, a zatem analityczne określenie zakresu stosowalności kryterium będzie w takich przypadkach nieosiągalne. Nawet w tych szczególnych przypadkach, w których udało się jak dotąd uzyskać analityczne rozwiązanie, to ma ono tak skomplikowaną postać (np. konfluentnych hipergeometrycznych szeregów, funkcji BESSELA [12]), że tylko numerycznie można by wyznaczyć obszary stosowalności kryterium. Dla powłoki kulistej zbadano numerycznie wpływ tylko perturbacji obciążenia i przemieszczenia oraz lepkości na wielkość impulsu krytycznego.

Podane rozwiązania obowiązują w procesie obciążenia, a więc gdy jest spełniona nierówność (3.3). Kryterium to narzuca warunek ograniczoneści amplitud ruchu perturbowanego. To ograniczenie i założenie o symetrycznej postaci wybożenia wymagają, aby powłoka charakteryzowała się dokładnością wykonania, a przyłożony impuls równomiernością rozłożenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. N. GOODIER, I. K. McIVOR, *The elastic cylindrical shell under nearly uniform radial impulse*, J. Appl. Mech., **31**, 2, 1964.
2. H. E. LINDBERG, et al., *Response of reentry vehicle-type shells to blast loads*, Stanford Research Institute, Report AF 04 (694)-655, 1965.
3. W. WOJEWÓDZKI, *Dynamiczne symetryczne wyboczenie lepkoplastycznych i sprężysto-lepkoplastycznych powłok obrotowych*, Wydawnictwa Pol. W-skiej, Budownictwo, **24**, 1973.
4. A. L. FLORENCE, J. N. GOODIER, *Dynamic plastic buckling of cylindrical shells in sustained axial compressive flow*, J. Appl. Mech., **35**, 80-86, 1968.
5. A. L. FLORENCE, *Buckling of viscoplastic cylindrical shells due to impulsive loading*, AIAA Journal, **6**, 4, 532-537, 1968.
6. G. R. ABRAHAMSON, J. N. GOODIER, *Dynamic plastic flow buckling of a cylindrical shell from uniform radial impulse*, Proc. Forth U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., June 1962.
7. H. VAUGHAN, A. L. FLORENCE, *Plastic flow buckling of cylindrical shells due to impulsive loading*, J. Appl. Mech., 171-179, March 1970.
8. H. E. LINDBERG, *Buckling of a very thin cylindrical shell due to an impulsive pressure*, J. Appl. Mech., **31**, 267-272, 1964.
9. D. L. ANDERSON, H. E. LINDBERG, *Dynamic pulse buckling of cylindrical shells under transient lateral pressures*, AIAA Journal, **6**, 4, April 1968.
10. W. C. LYONS, *Elastic and plastic buckling of cylindrical shells subjected to impulsive loads*, 12-th Annual Conference of Solids Mechanics, Poland, Jaszowiec, September 1969.
11. W. WOJEWÓDZKI, *Dynamic buckling of a viscoplastic cylindrical shell subjected to axial impact*, Arch. Mech., **23**, 1, 73-92, 1971.
12. W. WOJEWÓDZKI, *Buckling of short viscoplastic cylindrical shells subjected to radial impulse*, Int. J. Non-Linear Mech., **8**, 325-343, 1973.
13. W. WOJEWÓDZKI, *Buckling of viscoplastic cylindrical shells loaded by radial pressure impulse*, Arch. Mech., **24**, 5-6, 777-792, 1972.
14. W. WOJEWÓDZKI, *Buckling of viscoplastic cylindrical shells subjected to radial impulse and temperature*, 2nd Inter. Conf. on „Structural Mechanics in Reactor Technology”, Berlin, Germany, September 1973.
15. N. FERRONE, *On a simplified method for solving impulsively loaded structures of rate-sensitive materials*, J. Appl. Mech., **32**, 489-492, 1965.
16. N. JONES, D. M. OKAWA, *Dynamic plastic buckling of rings and cylindrical shells*, 3rd Inter. Conf. on „Structural Mechanics in Reactor Technology”, **5**, Part M, London U.K., September 1975.
17. S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York 1961.
18. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321-322, 1963.

Резюме

ДИНАМИЧЕСКОЕ СИММЕТРИЧЕСКОЕ ВЫПУЧИВАНИЕ ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

В работе представлен механизм динамического выпучивания с малых амплитуд для вязкопластических оболочек вращения. Приведены основные уравнения, метод решения и, в качестве примера представлено решение сферической оболочки.

SUMMARY

DYNAMIC SYMMETRIC BUCKLING OF VISCOPLASTIC SHELLS OF REVOLUTION

In the paper the mechanism of dynamic buckling for small amplitudes of rotational by symmetric viscoplastic shells is presented. The basic equations describing the symmetric mode of dynamic buckling, the method of solution and an example of a spherical shell are given.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 27 kwietnia 1977 r.
