

NOWA METODA DOBORU ZASTĘPCZEGO PRZEKROJU WIELOPUNKTOWEGO W ANALIZIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO ZGINANIA

JACEK KR U Ż E L E C K I i WIESŁAW KR Z Y Ś (KRAKÓW)

W pracy podano metodę doboru zastępczego przekroju wielopunktowego w zastosowaniu do zagadnień zginania sprężysto-plastycznego. Na podstawie zaproponowanego przekroju zastępczego, związek $M(\kappa)$ opisany jest równaniami odcinkowo-liniowymi $M(\kappa_z)$ tworzącymi wielobok opisany na zależności ściślejszej. Określono błędy krzywizny $\delta\kappa$ i momentu δM oraz podano sposoby ich minimalizacji. Podano również przykład obrazujący dokładność zaproponowanej metody.

1. WSTĘP

Zagadnienie sprężysto-plastycznego zginania belek liczy już kilkadziesiąt lat, nastrocza jednak nadal wiele trudności obliczeniowych związanych ze skomplikowaną postacią, w jakiej występuje przekrój w równaniu różniczkowym linii ugięcia. Tylko w nielicznych przypadkach równanie to daje się efektywnie scałkować [2, 7 i 8]; nie podano np. jak dotąd efektywnych rozwiązań dla belki o przekroju kołowym.

Dla uniezależnienia się od kształtu przekroju wprowadza się przekroje zastępcze, najczęściej «punktowe» z których najprostszym jest dwupunktowy teoretyczny dwuteownik. Stosują go m.in. P. P. BIJLAARD [1] dla niejednorodnie obciążonej tarczy oraz M. ŻYCKOWSKI [9] i J. HULT [3] przy zagadnieniach wyboczenia pełzającego.

Sprecyzowanie zasady doboru przekrojów wielopunktowych dla belek o przekrojach symetrycznych względem prostej prostopadłej do płaszczyzny zginania znajdujemy w pracach J. ORKISZA [5 i 6]. Polega ona na zastąpieniu przekroju rzeczywistego systemem pól skupionych, których wielkości i położenia określa się z równości momentów geometrycznych połówek przekrojów rzeczywistego i zastępczego, począwszy od momentu zerowego stopnia. Zewnętrzne pola skupione umieszcza się ponadto w skrajnie oddalonych od osi symetrii punktach przekroju rzeczywistego. W metodzie tej otrzymuje się następujące efekty: 1) zgodność pól obu przekrojów wynikająca z równości momentów zerowych, zapewniającą równowartość obu przekrojów ze względu na rozciąganie; 2) zgodność nośności granicznej (plastycznej) dla belek z materiału idealnie sprężysto-plastycznego, wynikająca z równości momentów pierwszego stopnia (momentów statycznych); 3) zgodność krzywizn w zakresie liniowo-sprężystym, wynikająca z równości momentów drugiego stopnia

(momentów bezwładności); 4) zgodność nośności sprężystej uwarunkowaną równością momentów bezwładności i odległościami włókien skrajnych.

Spełnienie powyższych czterech warunków zgodności wymaga stosowania co najmniej czteropunktowych przekrojów zastępczych, przy określaniu których dysponujemy trzema wolnymi parametrami (dla połowy przekroju): dwoma polami i jedną odległością pola od osi symetrii (druga odległość równa jest wysokości przekroju rzeczywistego). W przypadku przekrojów zastępczych o większej liczbie pól skupionych dysponujemy dalszymi wolnymi parametrami, które określa się z równości momentów wyższego rzędu. Odwzorowują one wierniej przekrój rzeczywisty w zagadnieniach, w których interweniuje rozmieszczenie pola względem osi symetrii, a więc także w analizie linii ugięcia, prowadząc w granicy do pełnej zgodności z wynikami otrzymanymi dla rzeczywistego przekroju. Należy jednak zauważyć, że zgodnie z wyjściową koncepcją metody, przekrój zastępczy ma budowę dyskretną, w konsekwencji czego dla poszczególnych przedziałów wartości momentu zginającego otrzymuje się różne związki pomiędzy momentem i krzywizną. W przypadku tym analiza linii ugięcia belki wymaga operowania przedziałami zależnymi od wartości momentu zginającego. Przy zwiększaniu liczby pól skupionych rośnie liczba przedziałów, co zwiększa odpowiednio ilość operacji numerycznych. Często interesują nas rozwiązania przybliżone, eksponujące jakościową stronę zjawiska i otrzymywane przy zastosowaniu oszczędnych procedur numerycznych. Rozwiązanie takie otrzymujemy posługując się przekrojami zastępczymi o niewielkiej liczbie pól skupionych. Chcemy ponadto znać relację między rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym, w szczególności wiedzieć, w jaki sposób otrzymane rozwiązanie przybliża rzeczywistość: z nadmiarem czy niedomiarem. Metoda J. Orkiszka nie daje tej informacji odnośnie krzywizny belki.

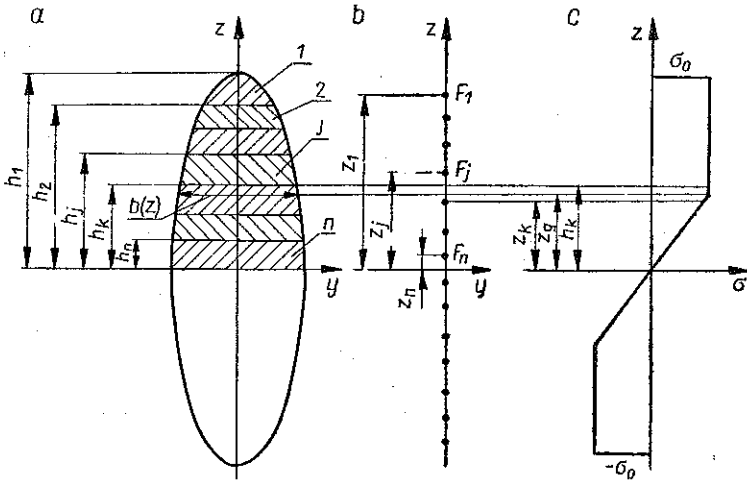
W proponowanej metodzie zastępczy przekrój będzie tak dobierany, aby związek między momentem zginającym i krzywizną był w określonych punktach ścisły, i ażeby poza tymi punktami krzywizna określona była z niedomiarem.

2. PROPONOWANA METODA DOBORU PRZEKROJU ZASTĘPCZEGO

Metoda dotyczy belek o przekrojach symetrycznych względem prostej prostopadłej do płaszczyzn zginania, wykonanych z materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz z materiału z pojedynczym wzmocnieniem liniowym. Proponowana jest do analizy linii ugięcia belek zginanych w zakresie sprężysto-plastycznym.

Korzystając z symetrii przeprowadzamy operacje na połowie przekroju. Przekrój dzielimy dowolnie na n części prostymi równoległymi do osi symetrii (rys. 1a) i przyporządkowujemy każdej z nich odpowiednie pole F_j skupione w odległości z_j , $j=1, 2, \dots, n$, od osi symetrii (rys. 1b). Wartości pól F_j i ich współrzędne z_j określamy dla każdej części oddzielnie z równości momentów statycznych S_j i momentów bezwładności J_j :

$$(2.1) \quad S_j = \int_{h_{j+1}}^{h_j} z dF = F_j z_j,$$



Rys. 1.

$$(2.2) \quad J_j = \int_{h_{j+1}}^{h_j} z^2 dF = F_j z_j^2.$$

Stąd

$$(2.3) \quad z_j = \frac{J_j}{S_j}, \quad F_j = \frac{S_j}{z_j}.$$

Ze wzorów (2.1) i (2.2) wynika równość momentów statycznych połówek przekroju i równość momentów bezwładności,

$$(2.4) \quad S_y = \sum_{j=1}^n F_j z_j, \quad J_y = \sum_{j=1}^n F_j z_j^2,$$

w konsekwencji, podobnie jak w metodzie J. Orkisz, otrzymujemy tę samą wartość nośności granicznej obu przekrojów: rzeczywistego i zastępczego oraz tę samą zależność między krzywizną i momentem zginającym w zakresie liniowo-sprężystym. Różnią się natomiast pola przekrojów i wskaźniki zginania (współrzędna z_1 skrajnego pola skupionego F_1 jest mniejsza od współrzędnej skrajnego punktu przekroju rzeczywistego). Obliczenie tych nieistotnych w analizie linii ugięcia wielkości nie wymaga wprowadzenia zastępczych przekrojów i może być wykonane wprost w nawiązaniu do przekrojów rzeczywistych; przy konsekwentnym posługiwaniu się przekrojem zastępczym należy wprowadzić odpowiednie współczynniki korekcyjne: dla pola przekroju

$$(2.5) \quad \varphi_F = F / \sum_{j=1}^n F_j, \quad F = F_z \varphi_F;$$

dla wskaźnika zginania

$$(2.6) \quad \varphi_W = \frac{z_1}{h_1}, \quad W_\sigma = W_{gz} \varphi_W,$$

Najbardziej interesującą w rozpatrywanym zagadnieniu jest zależność między momentem zginającym i krzywizną belki o przekroju zastępczym oraz relacja tego wzoru do wzoru ścisłego dla belki o przekroju rzeczywistym. Dla zginania w zakresie sprężystym, w przypadku materiału fizycznie liniowego jest to zależność ścisła, co, jak wspomniano, wynika z równości momentów bezwładności obu przekrojów. Rozważmy z kolei tę zależność dla zginania w zakresie sprężysto-plastycznym, rozpatrując w pierwszej kolejności materiał idealnie sprężysto-plastyczny, następnie materiał sprężysto-plastyczny z jednokrotnym wzmocnieniem liniowym.

Wynikające z warunku równowagi wyrażenie na moment zginający

$$(2.7) \quad M = \int_F \sigma z dF$$

przyjmuje dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego (rys. 1) i przekroju symetrycznego znaną postać

$$(2.8) \quad M = 2Ek \int_0^{z_g} z^2 dF + 2\sigma_0 \int_{z_g}^{h_1} z dF, \quad dF = bdz,$$

przy czym między krzywizną belki κ i współrzędną z_g rozgraniczającą strefy sprężystą i plastyczną zachodzi związek

$$(2.9) \quad \kappa = \frac{\sigma_0}{Ez_g}.$$

Zgodnie z przyjętą koncepcją redukcji otrzymujemy na podstawie (2.8) w przedziale $z_k \leq z_g \leq z_{k-1}$ dla zastępczego przekroju punkтового

$$(2.10) \quad M = 2Ek_z \sum_{j=k}^n J_j + 2\sigma_0 \sum_{j=1}^{k-1} S_j.$$

Do tej samej postaci sprowadza się wzór (2.8) dla belki o przekroju rzeczywistym, gdy $z_g = h_k$. Wówczas

$$(2.11) \quad \kappa = \frac{\sigma_0}{Eh_k}, \quad M = 2 \frac{\sigma_0}{h_k} \sum_{j=k}^n J_j + 2\sigma_0 \sum_{j=1}^{k-1} S_j,$$

dla tej wartości momentu belka o przekroju zastępczym posiada taką samą krzywiznę jak belka o przekroju rzeczywistym.

Skrajne wartości zastępczych krzywizn κ_z i momentów zginających, dla których spełniona jest liniowa zależność (2.10) otrzymujemy po podstawieniu do (2.9) $z_g = z_k$ oraz $z_g = z_{k-1}$:

$$(2.12) \quad \kappa_z(z_g = z_k) = \frac{\sigma_0}{Ez_k}, \quad \kappa_z(z_g = z_{k-1}) = \frac{\sigma_0}{Ez_{k-1}},$$

$$(2.13) \quad M(z_g = z_k) = 2 \frac{\sigma_0}{z_k} \sum_{j=k}^n J_j + 2\sigma_0 \sum_{j=1}^{k-1} S_j,$$

$$M(z_g = z_{k-1}) = 2 \frac{\sigma_0}{z_{k-1}} \sum_{j=k}^n J_j + 2\sigma_0 \sum_{j=1}^{k-1} S_j.$$

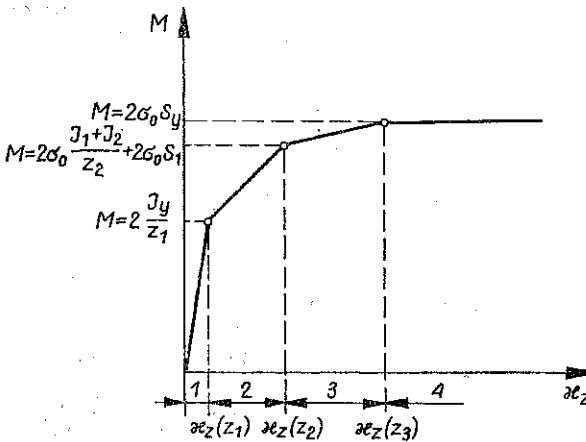
Ponieważ $J_k/z_k = S_k$, przeto można np. pierwsze z równań (2.13) napisać w formie

$$(2.14) \quad M(z_g = z_k) = 2 \frac{\sigma_0}{z_k} \sum_{j=k+1}^n J_j + 2\sigma_0 \sum_{j=1}^k S_j,$$

co wskazuje, że końcowy punkt funkcji $M(\kappa_z)$ w przedziale $z_k \leq z_g \leq z_{k-1}$ jest początkowym dla tej funkcji w sąsiednim przedziale $z_{k+1} \leq z_g \leq z_k$.

Dla $z_g = z_n$ mamy $\kappa_z = \sigma_0/Ez_n$, $M = 2\sigma_0 s_y$; natomiast dla $z_g < z_n$ otrzymujemy $\kappa_z < \sigma_0/Ez_n$, $M = 2\sigma_0 s_y = \text{const.}$

Pełny wykres funkcji $M(\kappa_z)$ jest wielobokiem pokazanym przykładowo dla pola sześciopunktowego ($n=3$) na rys. 2. Przedział (1) odpowiada pracy sprężystej całego zastępczego przekroju, przedziały (2) i (3) — pracy sprężysto-plastycznej przy kolejnym wchodzeniu pól F_1 i F_2 w zakres plastyczny, przedział (4) — pracy w zakresie plastycznym całego przekroju zastępczego.



Rys. 2.

Uwzględniając zależność (2.9) możemy równanie (2.8), obowiązujące dla belki o przekroju rzeczywistym, przekształcić do postaci

$$(2.15) \quad M = 2\sigma_0 \left(\frac{1}{z_g} \int_0^{z_g} z^2 dF + \int_{z_g}^{h_1} z dF \right),$$

z której obliczamy

$$(2.16) \quad \frac{dM}{dz_g} = 2\sigma_0 \left(-\frac{1}{z_g^2} \int_0^{z_g} z^2 dF + \frac{1}{z_g} \frac{d}{dz_g} \int_0^{z_g} z^2 dF + \frac{d}{dz_g} \int_{z_g}^{h_1} z dF \right).$$

Podstawiając $dF = b dz$ (rys. 1) otrzymujemy

$$(2.17) \quad \frac{dM}{dz_g} = 2\sigma_0 \left(-\frac{1}{z_g^2} \int_0^{z_g} z^2 dF + \frac{1}{z_g} z_g^2 b - bz_g \right),$$

$$(2.17) \quad \left[\frac{dM}{dz_g} = - \frac{2\sigma_0}{z_g^2} \int_0^{z_g} z^2 dF. \right.$$

Stąd po uwzględnieniu (2.9)

$$(2.18) \quad \frac{dM}{d\kappa} = 2E \int_0^{z_g} z^2 dF$$

oraz

$$(2.19) \quad \left[\frac{dM}{d\kappa} \right]_{z_g=h_k} = 2E \sum_{j=k}^n J_j.$$

Widać, że krzywa $M=M(\kappa)$ dla belki o przekroju rzeczywistym jest styczna do prostej będącej przybliżonym wykresem funkcji $M(\kappa_z)$ w punkcie wspólnym, tj. dla $z_g=h_k$.

Drugą pochodną momentu względem κ obliczamy korzystając z (2.18):

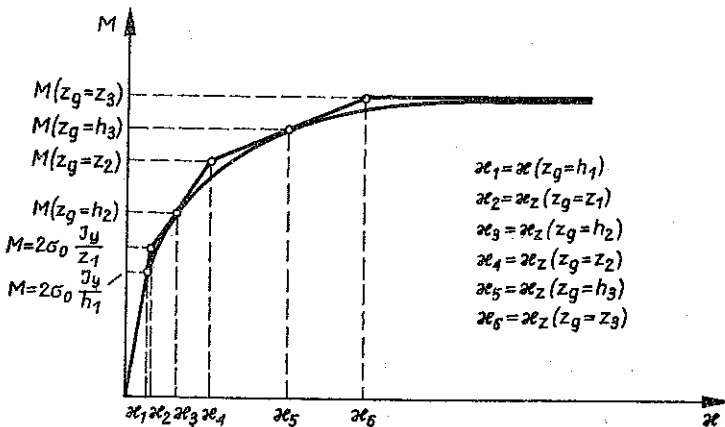
$$(2.20) \quad \frac{d^2 M}{d\kappa^2} = \frac{d}{dz_g} \left(\frac{dM}{d\kappa} \right) \frac{dz_g}{d\kappa};$$

stąd po stosownych podstawieniach otrzymujemy

$$(2.21) \quad \frac{d^2 M}{d\kappa^2} = - \frac{2E^2 b}{\sigma_0} z_g^4 < 0.$$

Krzywa $M=M(\kappa)$ dla zginania sprężysto-plastycznego belki o przekroju rzeczywistym wygięta jest wypukłością ku wzrastającym wartościom momentu zginającego, wobec czego funkcja przybliżona $M(\kappa_z)$ określa wartość $M(\kappa)$ z nadmiarem (w sensie wartości bezwzględnych).

Na rys. 3 pokazano poglądowo wykres odcinkowo-liniowy funkcji $M(\kappa_z)$ dla przekroju zastępczego oraz krzywą dla przekroju rzeczywistego. Jest ona obwiednią



Rys. 3.

rodziny prostych $M(\kappa_z)$. Na rysunku zaznaczono również punkty zgodności obu funkcji.

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym mamy

$$(2.22) \quad \sigma = A + B\varepsilon,$$

i przy założeniu płaskości przekroju

$$(2.23) \quad \varepsilon = \kappa z.$$

W tym przypadku równanie (2.7) przyjmuje postać

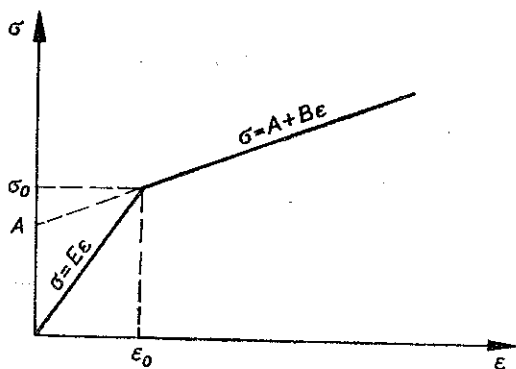
$$(2.24) \quad M = 2E\kappa \int_0^{z_g} z^2 dF + 2 \left(A \int_{z_g}^{h_1} z dF + B\kappa \int_{z_g}^{h_1} z^2 dF \right).$$

Dla zastępczego przekroju punktowego otrzymujemy

$$(2.25) \quad M = 2\kappa_z \left(E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^{k-1} J_j \right) + 2A \sum_{j=1}^{k-1} S_j,$$

$$z_k \leq z_g \leq z_{k-1}.$$

Dla $z_g = h_k$ z (2.24) i (2.25) wynika taka sama wartość krzywizny κ .



Rys. 4.

Na granicy stref (rys. 4)

$$(2.26) \quad A + B\varepsilon_0 = E\varepsilon_0,$$

skąd

$$(2.27) \quad \varepsilon_0 = \frac{A}{E-B}, \quad \sigma_0 = \frac{AE}{E-B},$$

oraz

$$(2.28) \quad E = \frac{\sigma_0 B}{\sigma_0 - A}.$$

Ponadto z prawa fizycznego mamy

$$(2.29) \quad \sigma_0 = A + B\kappa z_g,$$

stąd

$$(2.30) \quad z_g = \frac{\sigma_0 - A}{B\kappa} = \frac{A}{(E - B)\kappa}.$$

Podstawiając (2.28) i (2.30) do (2.24) otrzymujemy

$$(2.31) \quad M = 2 \left(\frac{\sigma_0}{z_g} \int_0^{h_1} z^2 dF - \frac{A}{z_g} \int_{z_g}^{h_1} z^2 dF + A \int_{z_g}^{h_1} z dF \right),$$

$$(2.32) \quad \frac{dM}{dz_g} = \frac{2}{z_g^2} \left(A \int_{z_g}^{h_1} z^2 dF - \sigma_0 \int_0^{h_1} z^2 dF \right),$$

a po uwzględnieniu (2.30)

$$(2.33) \quad \frac{dM}{d\kappa} = \frac{2B}{\sigma_0 - A} \left(\sigma_0 \int_0^{h_1} z^2 dF - A \int_{z_g}^{h_1} z^2 dF \right).$$

Skąd po przekształceniu

$$(2.34) \quad \frac{dM}{d\kappa} = 2 \left(E \int_0^{z_g} z^2 dF + B \int_{z_g}^{h_1} z^2 dF \right).$$

Widać, że dla $z_g = h_k$

$$(2.35) \quad \left[\frac{dM}{d\kappa} \right]_{z_g = h_k} = \left[\frac{dM}{d\kappa} \right]_{z_k \leq z_g \leq z_{k-1}}$$

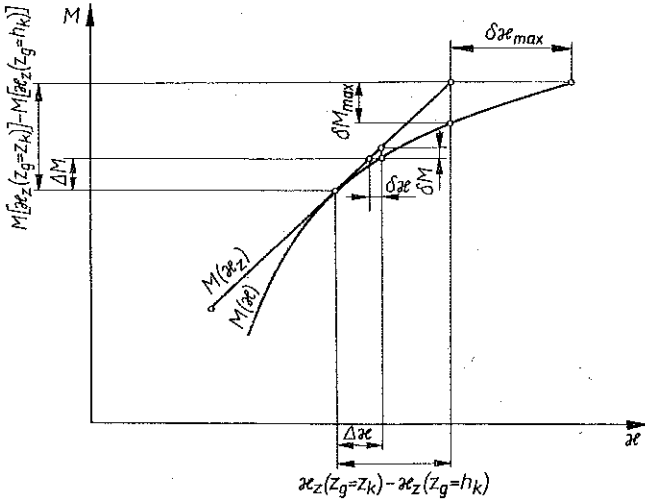
Druga pochodna momentu względem krzywizny przy zastosowaniu formuły (2.20) wynosi

$$(2.36) \quad \frac{d^2 M}{d\kappa^2} = - \frac{2(E^2 - B^2)}{A} b z_g^4 < 0.$$

Widać zatem, że charakter aproksymacji funkcji $M(\kappa)$ wielobokiem $M(\kappa_z)$ w przypadku materiału sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem jest taki sam jak dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego.

3. BŁĄD METODY

Błąd metody ocenić możemy rozwijając w szereg Maclaurina funkcję $M(\kappa)$ w otoczeniu wspólnego punktu obu wykresów i porównując wartości przyrostów momentów dla określonych przyrostów krzywizny κ . Na podstawie wyżej omówionych własności funkcji $M(\kappa_z)$ stwierdzić można, że jest ona pierwszym wyrazem rozwi-



Rys. 5.

nięcia funkcji $M(\kappa)$ w otoczeniu punktu wspólnego dla obu funkcji. Ograniczając się w ocenie błędu do pierwszego przybliżenia, któremu wobec powyższego odpowiada uwzględnienie dwóch pierwszych wyrazów rozwinięcia funkcji $M(\kappa)$, dla przedziału $z_k \leq z_g \leq z_{k-1}$ otrzymujemy błąd (rys. 5)

$$(3.1) \quad \delta M = -\frac{(\Delta \kappa)^2}{2} \frac{d^2 M}{d\kappa^2} \Big|_{\kappa(z_g=h_k)}$$

Analogicznie błąd w określeniu krzywizny wyraża się wzorem

$$(3.2) \quad \delta \kappa = -\frac{(\Delta M)^2}{2} \frac{d^2 \kappa}{dM^2} \Big|_{M(z_g=h_k)}$$

który przekształcamy do postaci

$$(3.3) \quad \delta \kappa = \frac{(\Delta M)^2}{2} \frac{d^2 M}{d\kappa^2} \left(\frac{dM}{d\kappa} \right)^{-3} \Big|_{\kappa(z_g=h_k)}$$

pozwalającej bezpośrednio wykorzystać obliczone wcześniej wielkości.

Na podstawie (2.21) dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego w przedziale $z_k \leq z_g \leq z_{k-1}$ otrzymujemy

$$(3.4) \quad \delta M = \frac{E^2 b}{\sigma_0} h_k^4 (\Delta \kappa)^2$$

oraz

$$(3.5) \quad \delta \kappa = -\frac{bh_k^4}{8 \sigma_0 E \left(\sum_{j=\kappa}^n J_j \right)^3} (\Delta M)^2,$$

dla materiału zaś sprężysto-plastycznego z liniowym wzmocnieniem

$$(3.6) \quad \delta M = \frac{2(E^2 - B^2)b}{A} h_k^4 (\Delta \kappa)^2$$

oraz

$$(3.7) \quad \delta \kappa = - \frac{bh_k^4(E^2 - B^2)}{8A \left(E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^k J_j \right)^3} (\Delta M)^2.$$

Dokładniejsze obliczenie błędu przez uwzględnienie dalszych wyrazów rozwinięcia funkcji $M(\kappa)$ nie nastarcza trudności wobec prostej postaci pochodnej $d^2 M/d\kappa^2$.

Największe bezwzględnie błędy występują w skrajnych punktach odcinka wykresu $M(\kappa_z)$, np. dla k -tego odcinka w punktach odpowiadających $z_g = z_{k-1}$ i $z_g = z_k$. Np. dla $z_g = z_k$ przyrosty krzywizny i momentu wynoszą:

$$(3.8) \quad \Delta \kappa = \frac{\sigma_0}{E} \frac{h_k - z_k}{z_k h_k}, \quad \Delta M = 2\sigma_0 \frac{h_k - z_k}{z_k h_k} \sum_{j=k}^n J_j$$

dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz

$$(3.9) \quad \Delta \kappa = \frac{A}{E-B} \frac{h_k - z_k}{h_k z_k}, \quad \Delta M = \frac{2A}{E-B} \left(B \sum_{j=1}^{k-1} J_j + E \sum_{j=k}^n J_j \right) \frac{h_k - z_k}{z_k h_k}$$

dla materiału ze wzmocnieniem. Odpowiednie błędy wynoszą zatem:

$$(3.10) \quad \delta M = \sigma_0 b \left(\frac{h_k}{z_k} \right)^2 (h_k - z_k)^2,$$

$$\delta \kappa = - \frac{\sigma_0 b}{2E \sum_{j=k}^n J_j} \left(\frac{h_k}{z_k} \right)^2 (h_k - z_k)^2$$

dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz

$$(3.11) \quad \delta M = 2 \frac{E+B}{E-B} Ab \left(\frac{h_k}{z_k} \right)^2 (h_k - z_k)^2,$$

$$\delta \kappa = - \frac{bA(E+B)}{2(E-B) \left(E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^{k-1} J_j \right)} \left(\frac{h_k}{z_k} \right)^2 (h_k - z_k)^2$$

dla materiału ze wzmocnieniem.

4. RÓWNANIA LINII UGIĘCIA

Przy założeniu małych ugięć belki przekształcamy równanie $M(\kappa)$ w jawne równanie linii ugięcia przez podstawienie (umowę co do znaków krzywizny i momentu przyjęto według [4])

$$(4.1) \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\kappa.$$

Postać ścisłej funkcji $M(\kappa)$ w formie (2.8) dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz (2.24) dla materiału sprężysto-plastycznego ze wzmocnieniem liniowym, w którym κ za pośrednictwem z_j występuje w granicach odpowiednich całek, nastrocza poważne trudności rachunkowe. Proste wzory (2.10) lub (2.25) po podstawieniu (4.1) są nieporównanie łatwiejsze do całkowania. Moment określony jest na ogół jako funkcja zmiennej x ; otrzymujemy wówczas równanie różniczkowe o zmiennych rozdzielonych.

Rozwiązując równanie (2.10) lub (2.25) ze względu na κ i podstawiając (4.1) otrzymujemy dla przedziału wartości momentu zginającego $M(z_{k-1}) \leq M \leq M(z_k)$ równanie

$$(4.2) \quad w'' = \frac{d^2 w}{dx^2} = \alpha_k + \beta_k M,$$

gdzie dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego

$$(4.3) \quad \alpha_k = \frac{\sigma_0}{E} \frac{\sum_{j=1}^{k-1} S_j}{\sum_{j=k}^n J_j}, \quad \beta_k = -\frac{1}{2E \sum_{j=k}^n J_j},$$

dla materiału zaś ze wzmocnieniem liniowym

$$(4.4) \quad \alpha_k = \frac{A \sum_{j=1}^{k-1} S_j}{E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^{k-1} S_j}, \quad \beta_k = -\frac{1}{2(E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^{k-1} S_j)}.$$

Podział belki na przedziały wynika z odmiennych postaci funkcji $M(x)$ dla poszczególnych odcinków belki oraz z różnych wartości współczynników α_k i β_k zależnych od wartości momentu zginającego. W przypadku belek statycznie wyznaczalnych, dla których wartości momentu zginającego $M(x)$ są z góry określone, określone są również definitywnie granice przedziałów. Stałe całkowania obliczamy z warunków geometrycznych na w i w' występujących na granicach przedziałów i w punktach podparcia. W przypadku belek statycznie niewyznaczalnych, nierozdzielny układ niewiadomych obejmuje reakcje i stałe całkowania jak w zagadnieniach sprężystych oraz dodatkowo położenia (odcięte x) granic przedziałów wynikające z granicznych wartości momentów zginających. Do ich obliczenia dysponujemy, jak w zagadnieniu sprężystym, warunkami równowagi i warunkami geometrycznymi

na w i w' , a ponadto dodatkowymi warunkami statycznymi na graniczne wartości momentów zginających.

Omówione postępowanie przy wyznaczaniu linii ugięcia wynika z konsekwentnego operowania zastępczym przekrojem punktowym. Jest ono dla takiego przekroju ściste, obarczone jest natomiast błędem w odniesieniu do przekroju rzeczywistego. Błąd ten wynika z przybliżonego charakteru wzoru (2.10) lub (2.25). Przechodząc do innej interpretacji tych wzorów, mianowicie traktując je nie jako wzory dla przekroju zastępczego, lecz jako aproksymację wzorów ścisłych (2.8) lub (2.24), możemy dokładność aproksymacji zwiększyć przez uwzględnienie następnych wyrazów rozwinięcia ścistej funkcji $M(\kappa)$. Uwzględnienie drugiego wyrazu rozwinięcia funkcji $M(\kappa)$ w otoczeniu punktu wspólnego sprowadza się do dodania po prawej stronie równania (4.2) wyrażenia $(-\delta\kappa)$, określonego wzorem (3.5) dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz wzorem (3.7) dla materiału ze wzmocnieniem liniowym.

Po podstawieniu

$$(4.5) \quad \Delta M = M(x) - M(z_g = h_k),$$

czyli

$$(4.6) \quad \Delta M = M(x) - 2\sigma_0 \left(\frac{1}{h_k} \sum_{j=k}^n J_j + \sum_{i=1}^{k-1} S_j \right)$$

dla materiału idealnie sprężysto-plastycznego oraz

$$(4.7) \quad \Delta M = M(x) - 2A \left[\frac{1}{(E-B)h_k} \left(E \sum_{j=k}^n J_j + B \sum_{j=1}^{k-1} J_j \right) + \sum_{j=1}^{k-1} S_j \right],$$

dla materiału ze wzmocnieniem liniowym, otrzymujemy w obu przypadkach równanie linii ugięcia w postaci

$$(4.8) \quad w'' = a_k + b_k M(x) + c_k M^2(x),$$

gdzie a_k , b_k , c_k oznaczają odpowiednie stałe.

Inny rodzaj aproksymacji ścistej funkcji $M(\kappa)$ można otrzymać przeprowadzając przez punkty M, κ dla kolejnych $z_g = h_k$ funkcję ciągłą. Wówczas nie zachodzi potrzeba dzielenia belki na przedziały wynikające z granicznych wartości momentu zginającego.

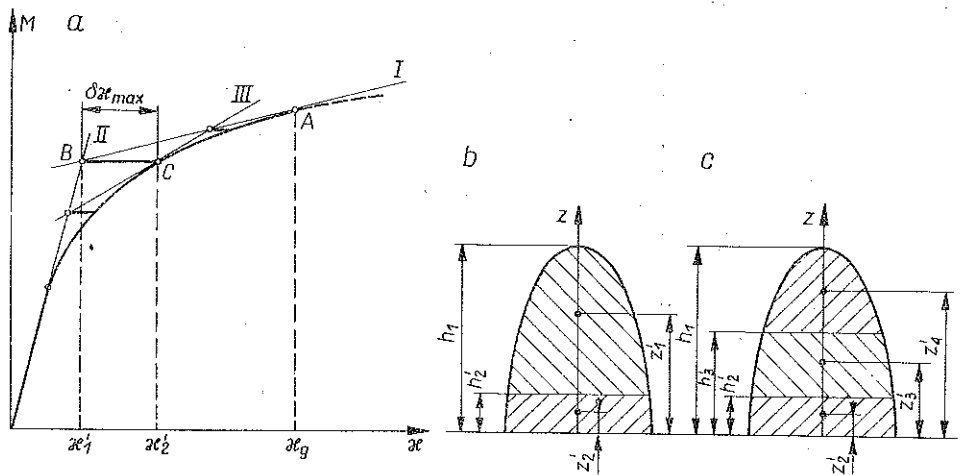
5. DOBÓR WSPÓLRZĘDNYCH h_j DZIELĄCYCH PRZEKRÓJ RZECZYWISTY

Współrzędne h_j , dzielące przekrój rzeczywisty na odpowiednie elementy, nie są sztywno ustalone. Dowolność ta może być istotną zaletą proponowanej metody, gdyż pozwala na stosowny dobór dokładności aproksymacji funkcji ścistej $M(\kappa)$ w zależności od sposobu pracy i spodziewanego zaawansowania stref plastycznych zginanych belek. Przeprowadzenie ogólnej minimalizacji błędu krzywizny, czy też momentu, i z warunków tych wyznaczenie wielkości h_j , nie jest łatwe, a w pewnych przypadkach może przynieść nie najlepsze rezultaty.

Dobór h_j można przeprowadzić stosując minimalizację etapową błędu. Polegać będzie ona na kolejnym zerowaniu maksymalnych błędów krzywizny, czy też momentu, i z warunków tych określanie najlepszych wielkości h_j .

Jako pierwsza podana zostanie metoda doboru h_j oparta na zerowaniu maksymalnych błędów krzywizny.

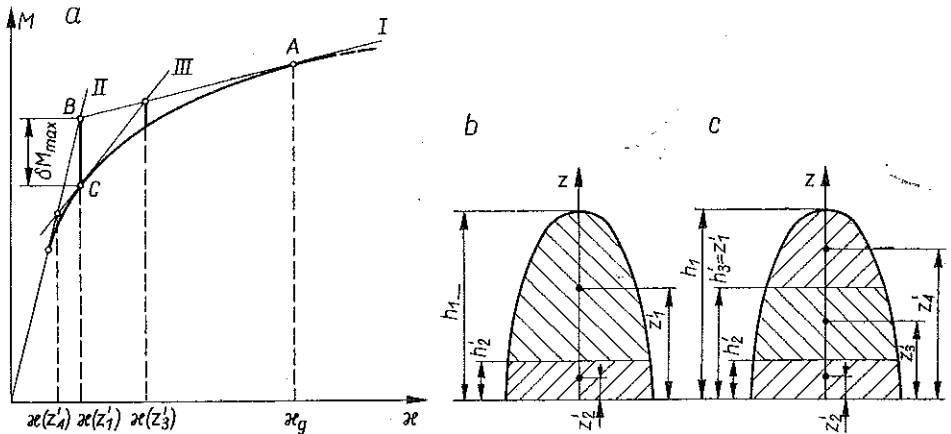
Rozpatrując zagadnienie zginania na gruncie teorii małych ugięć należy ograniczyć maksymalną krzywiznę obraną wielkością κ_g . Odpowiada to punktowi A (rys. 6a), który można osiągnąć podczas zginania. Zakładając, że w punkcie tym wartości krzywizn uzyskane z równania ścisłego i przybliżonego mają być takie same, musimy przez punkt A przeprowadzić stycznie odcinek aproksymacyjny $M(\kappa_z)$. Jest to równoznaczne z dokonaniem podziału przekroju rzeczywistego współrzędną $h'_2 = \sigma_0 / E\kappa_g$ (rys. 6b). Dla tak podzielonego przekroju ze wzoru (2.3) obliczamy położenia z'_1 i z'_2 pól skupionych. Na rys. 6a pokazano odcinkami I i II aproksymację uzyskaną dzięki podziałowi przekroju rzeczywistego prostą o współrzędnej h'_2 .



Rys. 6.

Punkt B przecięcia odcinków I i II odpowiada krzywiznie $\kappa'_1 = \sigma_0 / Ez'_1$, a popełniony błąd $\delta\kappa'$ określimy ze wzoru (3.10). Następny odcinek III styczny do krzywej $M(\kappa)$ przeprowadzamy przez punkt C o współrzędnej $\kappa'_2 = \kappa'_1 - \delta\kappa'$, zerując tym samym maksymalny błąd krzywizny. Odpowiada to następnemu podziałowi przekroju rzeczywistego prostą o współrzędnej $h'_3 = \sigma_0 / E(\kappa'_1 - \delta\kappa')$ (rys. 6c) i jest pierwszym etapem minimalizacji błędu. Powstałe nowo wydzielone pola skupione mają współrzędne z'_3 i z'_4 . Punktom przecięcia się odcinków I, III oraz II, III odpowiadają ponownie błędy maksymalne (mniejsze od poprzednich), których wielkości obliczyć można z równania (3.10). Jeżeli obliczone błędy będą mniejsze od założonych, po odpowiednim przenumerowaniu pól skupionych oraz współrzędnych, podział przekroju uważamy za zakończony. W przeciwnym przypadku przeprowadzamy następny etap minimalizacji jednego lub obu błędów, dzieląc przekrój wg zasady podanej powyżej.

Podobną zasadę etapowej minimalizacji można przyjąć w stosunku do błędu momentu. Pierwszy podział przekroju rzeczywistego przeprowadzamy jak poprzednio, tzn. prostą o współrzędnej h'_2 . Błąd maksymalny momentu $\delta M'$ powstaje w punkcie przecięcia się odcinków I i II (rys. 7a) o współrzędnej $\kappa(z'_1)$. W celu wyeliminowania błędu maksymalnego $\delta M'$ należy przeprowadzić przez punkt C odcinek styczny III do krzywej $M(\kappa)$. Odpowiada to podziałowi przekroju rzeczywistego linią o współrzędnej $h'_3 = z'_1$ (rys. 7c) i jest pierwszym etapem minimalizacji błędu. Punktom o współrzędnych $\kappa(z'_3)$ i $\kappa(z'_4)$ przecięcia się odcinków I, III oraz II, III odpowiadają nowe, zmniejszone błędy. Następne podziały przekroju, o ile są konieczne, przeprowadzamy liniami o współrzędnych $h'_4 = z'_3$ i $h'_5 = z'_4$. Innymi słowy, przy przyjęciu zasady zerowania maksymalnego błędu momentu nowe linie podziału przechodzą przez uprzednio obliczone współrzędne z'_k .



Rys. 7.

Innym, nie opartym na minimalizacji błędu, sposobem podziału przekroju rzeczywistego na wielopunktowy jest przyjęcie stałego przyrostu krzywizny między punktami wspólnymi krzywej $M = M(\kappa)$ i odcinkami $M(\kappa_s)$. Począwszy od punktu $\kappa_s = \sigma_0/Eh_1$ z założonym przyrostem krzywizny $\Delta\kappa$, możemy obliczyć współrzędne

$$h_j: h_2 = \sigma_0/E(\kappa_s + \Delta\kappa), \quad h_j = \sigma_0/E[\kappa_s + \Delta\kappa \sum_{i=1}^j (i-1)].$$

6. PRZYKŁAD

Obliczenia przeprowadzono na przykładzie belki swobodnie podpartej o długości 21 i przekroju prostokątnym $b \times 2h$ obciążonej siłą P w środku i wykonanej z materiału idealnie sprężysto-plastycznego. Przyjęto następujące dane wyjściowe:

$$\begin{aligned} b &= 2 \text{ cm} & , & & \sigma_0 &= 2,1 \cdot 10^3 \text{ kG/cm}^2, \\ h &= 2,5 \text{ cm} & , & & E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2, \\ l &= 100 \text{ cm} & , & & P &= 500 \text{ kG}. \end{aligned}$$

Przekrój prostokątny zamieniono na 6-cio punktowy, raz opierając się na zasadzie zerowania maksymalnego błędu krzywizny i ponownie przy zastosowaniu kryterium zerowania maksymalnego błędu momentu. W obu przypadkach ograniczenie maksymalnej krzywizny wynosiło $\kappa_g = 5\sigma_0/Eh$, co odpowiada $z_g = h/5$. W przypadku pierwszym wielkości charakteryzujące przekrój zastępczy wyniosły:

$$\begin{aligned} F_1 &= 2,1757 \text{ cm}^2, & F_2 &= 1,7733 \text{ cm}^2, & F_3 &= 0,7762 \text{ cm}^2, \\ z_1 &= 2,0105 \text{ cm}, & z_2 &= 1,0349 \text{ cm}, & z_3 &= 0,3333 \text{ cm}, \\ h_2 &= 1,4224 \text{ cm}, & h_3 &= 0,5000 \text{ cm}, \end{aligned}$$

natomiast w drugim przypadku

$$\begin{aligned} F_1 &= 1,5919 \text{ cm}^2, & F_2 &= 2,2981 \text{ cm}^2, & F_3 &= 0,7762 \text{ cm}^2, \\ z_1 &= 2,1345 \text{ cm}, & z_2 &= 1,2331 \text{ cm}, & z_3 &= 0,3333 \text{ cm}, \\ h_2 &= 1,7222 \text{ cm}, & h_3 &= 0,5000 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Przy tak przyjętych danych w przekroju najbardziej obciążonym strefa plastyczna nie przekroczyła współrzędnej z_2 ; tak więc zakres plastyczny mógł być opisany jednym równaniem różniczkowym. Jako miarę dokładności przyjęto ugięcie belki pod siłą P , a obliczone na podstawie rozwiązania ścisłego [4] wynosi $f_0 = 1,9992 \text{ cm}$. Przypadek pierwszy doboru przekroju zastępczego prowadzi do wyniku $f_{01} = 1,9687 \text{ cm}$, co stanowi 98,47% rozwiązania ścisłego, natomiast przypadek drugi $f_{02} = 1,9644 \text{ cm}$ stanowi 98,26% wyniku ścisłego.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. P. P. BILLAARD, *Buckling of plates under non-homogeneous stress*, J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1293-31, July 1957.
2. P. G. HODGE, *Plastic analysis of structures*, McGraw-Hill, New York 1959.
3. J. A. H. HULT, *Creep buckling*, Instn. Halfasthetslära Kungl. Tekniska Högskolan, 111, Stockholm 1955.
4. W. KRZYŚ, M. ŻYCZKOWSKI, *Sprężystość i plastyczność, Wybór zadań i przykładów*, PWN, Warszawa 1962.
5. J. ORKISZ, *Zasady doboru zastępczych przekrojów wielopunktowych dla belek zginanych w zakresie sprężysto-plastycznym*, Czas. Techn., 49, 3, 9-12, 1962.
6. J. ORKISZ, *Małe ugięcia sprężysto-plastyczne belek o dowolnym przekroju*, Rozpr. Inż., 11, 4, 1963.
7. A. PHILLIPS, *Introduction to plasticity*, Rounld Press Co., New York 1956.
8. M. ŻYCZKOWSKI, *Teoria skończonych ugięć belek sprężysto-plastycznych*, Czas. Tech., 62, 3, 1-4, 1957.
9. M. ŻYCZKOWSKI, *Geometrically non-linear creep buckling of bars*, Arch. Mech. Stos., 12, 3, 379-411, 1960.

Резюме

НОВЫЙ МЕТОД ОТБОРА МНОГОТОЧЕЧНОГО ПРИВЕДЕННОГО СЕЧЕНИЯ К АНАЛИЗУ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА

В работе приведен метод отбора многоточечного приведенного сечения для проблем упруго-пластического изгиба. Опираясь на предложенное приведенное сечение, значение $M(\kappa)$ описано линейно кусочными уравнениями $M(\kappa_z)$, создающими многоугольник опи-

санный на точной зависимости. Определены погрешности кривизны $\delta\kappa$ и момента δM и приведены методы их минимализации. Приведен тоже пример, указывающий на точность предложенного метода.

SUMMARY

A NEW METHOD OF CHOOSING A MULTI POINT EQUIVALENT CROSS-SECTION IN ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC BENDING

In the paper the method of choosing a multi-point equivalent cross-section in application to problems of elastic-plastic bending is proposed. Based on the equivalent cross-section, the relation $M(\kappa)$ is described by segment-linear equations $M(\kappa_z)$ which form the polygon circumscribed on the exact relation. The errors of curvature $\delta\kappa$ and of bending moment δM are evaluated and the method of their minimalization is given. The accuracy of proposed method is illustrated by a simple example.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 lutego 1977 r.
