

## METODA KAUSTYK — NOWĄ METODĄ DOŚWIADCZALNĄ BADANIA OSOBLIWOŚCI POLA NAPRĘŻENIA

P. S. THEOCARIS (ATENY)

W pracy opisane są podstawy nowej metody, zwanej metodą kaustyk służącej do analizy osobliwych pól naprężeń. Podane są też przykłady zastosowań. W metodzie tej promień światła pada na powierzchnię próbki w otoczeniu osobliwości pola naprężeń. Przepuszczone lub odbite promienie świetlne, wskutek gwałtownych zmian grubości płytki oraz zmian współczynnika załamania, ulegają rozproszeniu. Po zrzutowaniu na odpowiedni ekran skupiają się one wzdłuż pewnej krzywej osobliwej. Krzywa ta, zwana kaustyką zawiera istotne informacje o osobliwości pola naprężeń. W ten sposób osobliwość pola naprężeń zostaje przekształcona w osobliwość optyczną, która może być zbadana na ekranie. Pomiar geometrycznych parametrów kaustyki pozwala wyznaczyć parametry osobliwego pola naprężeń. Podano szereg zastosowań metody do rozwiązywania zagadnień dotyczących: 1) pęknięć, 2) obciążeń skupionych i rozłożonych, 3) osobliwości w wierzchołkach kompozytów (wielokątów). Otrzymane w powyższy sposób wyniki doświadczalne dobrze zgadzają się z analizą teoretyczną.

### I. WSTĘP

Wyznaczenie osobliwych pól naprężeń sprężystych znanymi metodami doświadczalnymi wiąże się z dużymi trudnościami i dlatego spotyka się z nieufnością ze strony wielu badaczy. Trudności wynikają przede wszystkim stąd, że istotny dla analizy osobliwości obszar w pobliżu punktu osobliwego jest zazwyczaj nieduży i dlatego metody doświadczalne takie jak elastooptyka, metody mory, tensometry czy też interferometria klasyczna i holograficzna dostarczają tylko uśrednionych wartości składowych naprężenia i odkształcenia panującego w tym obszarze.

Asymptotyczne zachowanie się pola naprężeń w pobliżu punktu osobliwego opisuje funkcja, której rząd wielkości jest  $O(r^{-1+\lambda})$ , przy czym  $\lambda$  jest w ogólności liczbą zespoloną. Z definicji wykładnika  $\lambda$  wynika, że jego znajomość ma pierwszorzędne znaczenie w opisie osobliwego pola naprężeń. Są trzy różne przyczyny powstawania osobliwości:

- 1) nieciągłości geometryczne takie jak różnego rodzaju pęknięcia, otwory i karby;
- 2) obciążenia zewnętrzne, przede wszystkim w postaci sił skupionych, choć również w pewnych warunkach w postaci sił rozłożonych;
- 3) niejednorodności własności mechanicznych w narożach kompozytów; tu osobliwości są zależne zarówno od geometrii jak i własności materiału naroża.

We wszystkich tych przypadkach osobliwość pola scharakteryzowana jest przez rząd osobliwości, wyrażony przez wprowadzony wyżej wykładnik  $\lambda$ . Zależnie od wartości  $\lambda$  pola osobliwe można podzielić na dwie następujące kategorie:

1) te, w których wykładnik  $\lambda$  jest liczbą rzeczywistą,  $\lambda = \lambda_1$ , a więc pole naprężeń ma postać  $O(r^{-1+\lambda_1})$ ,

2) te, w których wykładnik  $\lambda$  jest liczbą zespoloną,  $\lambda_1 = \lambda + i\lambda_2$ ; wtedy pole naprężeń ma postać  $O(r^{-1+\lambda_1} \cos(\lambda_2 \ln r))$  lub  $O(r^{-1+\lambda_1} \sin(\lambda_2 \ln r))$ .

Dodajmy, że jeśli równanie charakterystyczne, z którego otrzymujemy wartość  $\lambda$ , ma więcej niż jeden pierwiastek, zatrzymujemy tylko wartość  $\lambda$  z najmniejszą częścią rzeczywistą, bo taka wartość  $\lambda$  rozstrzyga o rzędzie osobliwości pola.

Niniejszym przedstawimy nową metodę, nazwaną metodą kaustyk, przeznaczoną właśnie do analizy osobliwości pól naprężeń. Zgodnie z tą metodą osobliwość pola naprężeń zostaje przekształcona w osobliwość optyczną, według zasad optyki geometrycznej. Przekształcenie to można osiągnąć następująco. Rzucamy wiązkę światła spójnego na badaną próbkę i obserwujemy na ekranie bądź wiązkę odbitą od poprzedniej lub tylnej ścianki próbki, bądź wiązkę, która przez próbkę przeszła. Promienie świetlne odbite lub załamane przez obszar próbki zawierający osobliwość, a więc obszar, w którym następują silne zmiany grubości oraz współczynnika załamania, koncentrują się wzdłuż krzywej osobliwej, zwanej kaustyką.

Samą kaustykę można powiększyć przez odpowiednie ustawienie układu optycznego, np. przez zwiększenie odległości między badaną próbką a ekranem albo przez zwiększenie rozbieżności wiązki. Parametry powiększonej w ten sposób kaustyki mogą być dokładniej zmierzone, a ponieważ wiążą się one ściśle z parametrami charakteryzującymi osobliwe pole naprężeń, to jest ze współczynnikiem intensywności naprężeń oraz rzędem osobliwości, więc znajomość parametrów kaustyki pozwala wyznaczyć parametry osobliwości pola naprężeń.

Prostota i dokładność należą do zalet tej metody, która stanowi efektywne narzędzie analizy pól osobliwych. W dalszym ciągu nakreślimy ogólne zasady metody oraz podamy szereg przykładów jej zastosowań, obrazując jej możliwości i zakres. Przykłady są wybrane z rozmaitych dziedzin, dotyczą zarówno naprężeń sprężystych jak i plastycznych, i przedstawiają różne typy osobliwości. Aby pokazać wielostronność metody zostaną również podane przykłady zastosowań w zakresie nieosobliwych pól sprężystych.

Poniższe studium oparte jest na serii ostatnich publikacji autora i jego współpracowników, o tematyce rozwiniętej na Wydziale Mechaniki Politechniki Ateńskiej.

## 2. OPTYCZNA METODA KAUSTYK

### 2.1. Ogólna teoria metody kaustyk [1]

Rozważmy powierzchnię, opisaną równaniem

$$(2.1) \quad z = f(x, y),$$

na którą pada równoległa wiązka światła (rys. 1). W ogólności promienie po odbiciu przestają być równoległe. Przypuśćmy, że promienie te padają na ekran

ustawiony równoległe do płaszczyzny  $Oxy$ , względem której opisaliśmy powyżej powierzchnię (2.1). Jeśli odległość ekranu od płaszczyzny  $Oxy$  wynosi  $z_0$ , wtedy odchylenie  $w$  na ekranie promienia odbitego od punktu  $P(x, y)$  powierzchni (2.1), dane jest, zgodnie z prawem odbicia Snelliusa wzorem (rys. 1)

$$(2.2) \quad w = w_x i + w_y j,$$

przy czym

$$(2.3) \quad w_x = (z - z_0) \operatorname{tg} 2\alpha, \quad w_y = (z - z_0) \operatorname{tg} 2\beta,$$

$$(2.4) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

zaś  $i$  i  $j$  są wersorami osi układu kartezjańskiego współrzędnych  $O'x'y'$ , będącego rzutem układu  $Oxy$  na ekran.

Zatem na ekranie obraz dowolnego punktu  $P(x, y)$  należącego do powierzchni (2.1) opisany jest wektorem  $w$ ; w układzie  $O'x'y'$  obraz ten opisany wektorem

$$(2.5) \quad W = W_x i + W_y j$$

o składowych

$$(2.6) \quad W_x = x + [f(x, y) - z_0] \frac{2 \partial f(x, y) / \partial x}{1 - (\partial f(x, y) / \partial x)^2},$$

$$W_y = y + [f(x, y) - z_0] \frac{2 \partial f(x, y) / \partial y}{1 - (\partial f(x, y) / \partial y)^2}.$$

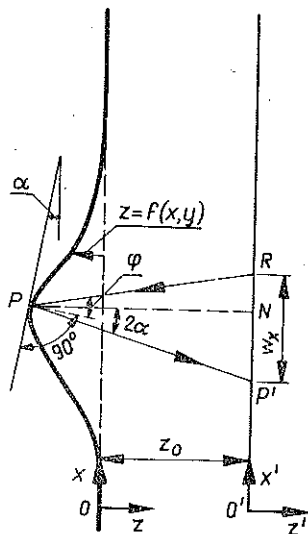
Związki (2.6) odwzorowują każdy punkt  $P(x, y)$  powierzchni  $z = f(x, y)$  na punkt  $P'(W_x, W_y)$  ekranu. Koniecznym i dostatecznym warunkiem, by punkty  $P'$  na ekranie tworzyły krzywą, jest znikanie jacobianu przekształcenia (2.6)

$$(2.7) \quad J = \frac{\partial (W_x, W_y)}{\partial (x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial W_x}{\partial x} & \frac{\partial W_x}{\partial y} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} & \frac{\partial W_y}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Równanie (2.7) określa krzywą na powierzchni  $z = f(x, y)$ , zwaną krzywą początkową, układ zaś równań (2.6) i (2.7) określa odpowiadającą jej na ekranie kaustykę.

Jeśli nachylenia powierzchni  $z = f(x, y)$  są tak małe, że można zaniedbać w porównaniu z jednością kwadraty pochodnych funkcji  $f(x, y)$ , a ponadto, jeśli wartości funkcji  $z = f(x, y)$  są małe wobec  $z_0$ , otrzymujemy ze wzorów (2.6)

$$(2.8) \quad W_x = x - 2z_0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad W_y = y - 2z_0 \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}.$$



Rys. 1. Utworzenie kaustyki przez wiązkę światła (równoległą lub rozbieżną) po odbiciu od powierzchni

Jeśli padająca w punkcie  $P(x, y)$  wiązka świetlna tworzy kąt  $\varphi$  z normalną do ekranu, powinniśmy zastąpić w wyrażeniach na składowe wektora odchylenia w kąty  $2\alpha$  i  $2\beta$  odpowiednio przez  $(2\alpha + \varphi)$  i  $(2\beta + \varphi)$ , (rys. 1).

Jeśli korzystamy z punktowego źródła światła, odległego o  $z_0$  od powierzchni, dostajemy przy niewielkich nachyleniach powierzchni następujące wyrażenie na składowe  $W_{x, y}$ :

$$(2.9) \quad W_{x, y} = x, y + f(x, y) - z_0 \operatorname{tg}(2\alpha, \beta + \varphi)$$

lub

$$W_{x, y} \approx x, y - z_0 (2\operatorname{tg} \alpha, \beta + \operatorname{tg} \varphi),$$

co można przepisać w postaci

$$(2.10) \quad W_{x, y} = \lambda_m x, y + w_{x, y},$$

gdzie  $\lambda_m$  oznacza powiększenie zdefiniowane wzorem

$$(2.11) \quad \lambda_m = \frac{z_0 + z_l}{z_l}.$$

Przy tym punktowe źródło światła oświetlające powierzchnię leży na osi  $z$ .

## 2.2. Zastosowanie do płaskich zagadnień sprężystości [2-7]

W płaskim zagadnieniu sprężystości zdefiniowana powyżej powierzchnia  $z = f(x, y)$  przedstawia wywołaną obciążeniem zmianę połowy grubości  $t$  dwuwymiarowej próbki (tarczy). Zmiana grubości  $\Delta t$  takiej próbki, zgodnie z definicją liczby Poissona, dana jest przez

$$(2.12) \quad \Delta t = -\frac{\nu t}{2E} (\sigma_1 + \sigma_2),$$

gdzie  $\nu$  i  $E$  przedstawiają odpowiednio liczbę Poissona i moduł sprężystości, zaś  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  dwa naprężenia główne.

W zakresie sprężystego obciążenia, grubości tarczy są małe wobec samej grubości i bez straty dokładności możemy skorzystać ze wzoru (2.10) zamiast z (2.9). W ten sposób dostajemy dla wektora  $\mathbf{W} = (W_x, W_y)$ :

$$(2.13) \quad \mathbf{W} = \lambda_m \mathbf{r} + z_0 \frac{\nu t}{E} \operatorname{grad}(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Wyrażenie (2.13) przedstawia wektor odchylenia promienia świetlnego odbitego od przedniej powierzchni próbki. Jeśli wiązka światła odbija się od tylnej powierzchni próbki albo jeśli przechodzi przez próbkę, to należy wziąć również pod uwagę zmianę drogi optycznej odpowiedniego promienia świetlnego, powstałą na skutek obciążenia.

Zmiana drogi optycznej promienia świetlnego, czy to odbitego od tylnej powierzchni próbki,  $\Delta s_r$ , czy też przechodzącego przez próbkę  $\Delta s_t$ , jest, jak to pokazano w pracy [2], następująca

$$(2.14) \quad \begin{aligned} s_{r1,2} &= 2tc_r [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_r (\sigma_1 - \sigma_2)], \\ s_{t1,2} &= tc_t [(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \xi_t (\sigma_1 - \sigma_2)], \end{aligned}$$

przy czym wskaźniki 1 i 2 odnoszą się do dwu kierunków naprężeń głównych (wskaźnikowi 1 odpowiada znak +, wskaźnikowi 2 znak -), a stałe elastoptyczne  $c_r$ ,  $c_t$ ,  $\xi_r$ ,  $\xi_t$  są dane przez wyrażenia

$$(2.15) \quad \begin{aligned} c_r &= \frac{\alpha_r + \beta_r}{2}, & c_t &= \frac{\alpha_t + \beta_t}{2}, \\ \xi_r &= \frac{\alpha_r - \beta_r}{\alpha_t + \beta_r}, & \xi_t &= \frac{\alpha_t - \beta_t}{\alpha_t + \beta_t}, \end{aligned}$$

w których

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \alpha_r &= \frac{1}{E} \left[ b_1 - 2\nu b_2 - \nu \left( n - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \beta_r &= \frac{1}{E} \left[ b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu \left( n - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \alpha_t &= \frac{1}{E} [b_1 - 2\nu b_2 - \nu(n-1)], \\ \beta_t &= \frac{1}{E} [b_2 - \nu(b_1 + b_2) - \nu(n-1)]. \end{aligned}$$

We wzorach tych  $n$  oznacza współczynnik załamania nieobciążonego ośrodka, a  $b_1$  i  $b_2$  są to dwie stałe wiążące. Wynikłą z obciążenia zmianę  $\Delta n_{1,2}$  współczynnika załamania  $n$  wzdłuż dwu kierunków naprężeń głównych z wartościami odkształceń głównych  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$ , znajdziemy zgodnie z elastoptycznym prawem Neumanna

$$(2.17) \quad \Delta n_{1,2} = b_1 \varepsilon_{1,2} + b_2 (\varepsilon_{2,1} + \varepsilon_3).$$

Wprowadzając prawe strony (2.14) do wzoru (2.13) możemy dla materiału nieczułego optycznie,  $\xi_r$ ,  $\xi_t = 0$ , opisać wektor  $\mathbf{W}$  odchylenia promienia świetlnego albo odbitego od poprzedniej lub tylnej powierzchni próbki albo przepuszczonego przez próbkę, następującym ogólnym wzorem

$$(2.18) \quad \mathbf{W} = \lambda_m \mathbf{r} + C \operatorname{grad} (\sigma_1 + \sigma_2),$$

gdzie stała  $C$  przyjmuje wartość  $C_f$  dla promienia odbitego od poprzedniej powierzchni próbki ( $f$  od ang. *front*), wartość  $C_r$  dla promienia odbitego od tylnej powierzchni ( $r$  od ang. *rear*) oraz wartość  $C_t$  dla promienia przepuszczonego przez próbkę ( $t$  od ang. *transmitted*). Przy tym

$$\begin{aligned} C_f &= -z_0 tc_f, & c_f &= \nu/E, \\ C_r &= -2z_0 tc_r, \\ C_t &= -z_0 tc_t. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy sumę naprężeń głównych  $(\sigma_1 + \sigma_2)$  można wyrazić przez funkcję analityczną  $\Phi(z)$  w postaci

$$(2.19) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 4\operatorname{Re} \Phi(z),$$

gdzie  $\operatorname{Re}$  oznacza część rzeczywistą funkcji  $\Phi(z)$ , równania (2.18) i (2.7), opisujące odpowiednio kaustykę i jej krzywą początkową, przyjmują następującą postać:

$$(2.20) \quad W = \lambda_m z + 4C \frac{d\Phi(z)}{dz},$$

$$(2.21) \quad \frac{4C}{\lambda_m} \left| \frac{d^2 \Phi(z)}{dz^2} \right| = 1.$$

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIEŃ PĘKANIA METODĄ KAUSTYK

#### 3.1. Pojedyncze pęknięcie skośne w rozciąganej płycie [8-16]

W przypadku pęknięcia w nieskończonej płycie tworzącej kąt  $\beta$  z osią obciążenia, zespolona funkcja naprężeń  $\Phi(z)$  w najbliższym otoczeniu wierzchołka szczeliny wyraża się wzorem

$$(3.1) \quad \Phi(z) = \frac{K^*}{2(2\pi z)^{1/2}},$$

przy czym  $K^*$  jest zespolonym współczynnikiem intensywności naprężeń, który można przedstawić

$$(3.2) \quad K^* = K_I - iK_{II},$$

gdzie  $K_I$  oraz  $K_{II}$  są to współczynniki intensywności naprężeń odpowiadające rozwarciu szczeliny (*opening mode*) i podłużnemu poślizgowi szczeliny (*sliding mode*).

Po podstawieniu równania (3.1) do związków (2.20) i (2.21) otrzymujemy dla krzywej początkowej i odpowiadającej jej kaustyki równania

$$(3.3) \quad r = r_0 \equiv \left| \frac{3C K^*}{2\sqrt{2\pi} \lambda_m} \right|^{2/5},$$

$$(3.4) \quad W = \lambda_m r_0 \left( e^{i\theta} \pm \frac{2}{3} e^{i(3\theta/2 + \omega)} \right),$$

gdzie  $\lambda_m$  jest powiększeniem układu optycznego.

Wprowadzenie znaku minus do wyrażenia (3.4) pozwala na zmniejszenie okresu epicykloidy z  $4\pi$  do  $2\pi$ . Mianowicie wtedy dla każdego punktu krzywej początkowej określone są dwa punkty samej epicykloidy.

Z równania (3.3) wynika, że krzywa początkowa jest kołem o promieniu  $r_0$ , odpowiadająca zaś jej kaustyka uogólnioną epicykloidą. W równaniach tych  $\theta$  jest

zmienną kątową w układzie biegunowym współrzędnych, którego początek znajduje się w wierzchołku, a ponadto

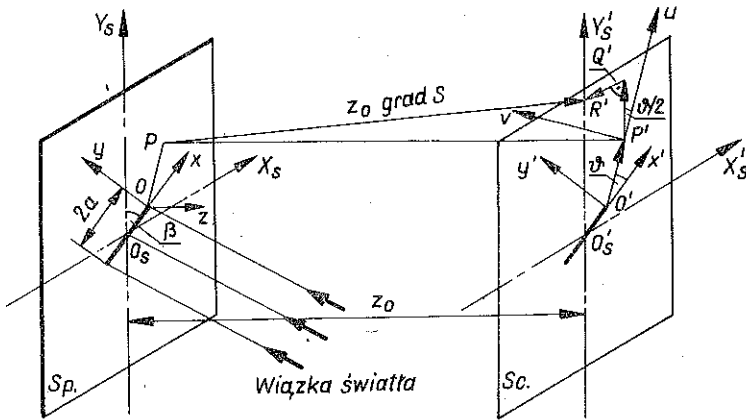
$$(3.5) \quad K^* = |K^*| e^{-i\omega}, \quad \operatorname{tg} \omega = \frac{K_{II}}{K_I} = \mu.$$

Równanie można napisać w postaci parametrycznej:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} X &= \lambda_m r_0 \left[ \cos \vartheta + \frac{2}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} \cos \frac{3\vartheta}{2} - \frac{2}{3} \mu (1 + \mu^2)^{-1/2} \sin \frac{3\vartheta}{2} \right], \\ Y &= \lambda_m r_0 \left[ \sin \vartheta + \frac{2}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} \sin \frac{3\vartheta}{2} + \frac{2}{3} \mu (1 + \mu^2)^{-1/2} \cos \frac{3\vartheta}{2} \right], \end{aligned}$$

przy czym  $r_0$  jest dane przez (3.3).

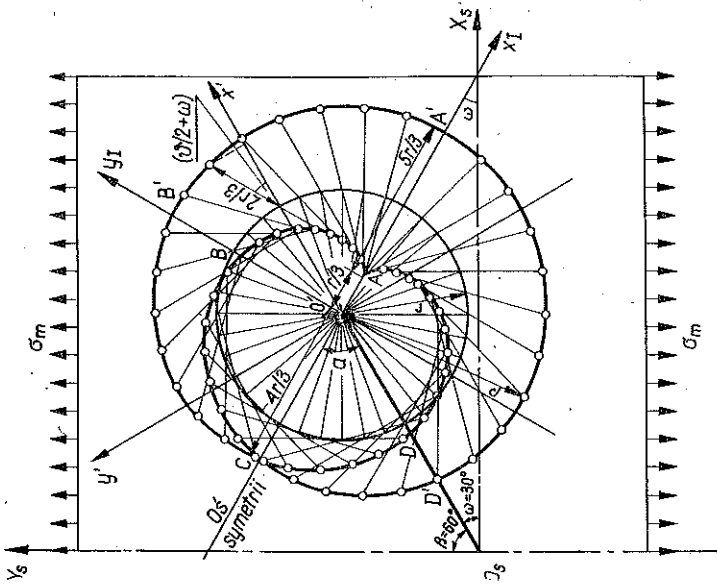
Rys. 2 przedstawia powstawanie kaustyki dla wiązki świetlnej padającej na rozciągniętą płytę zawierającą pęknięcie.



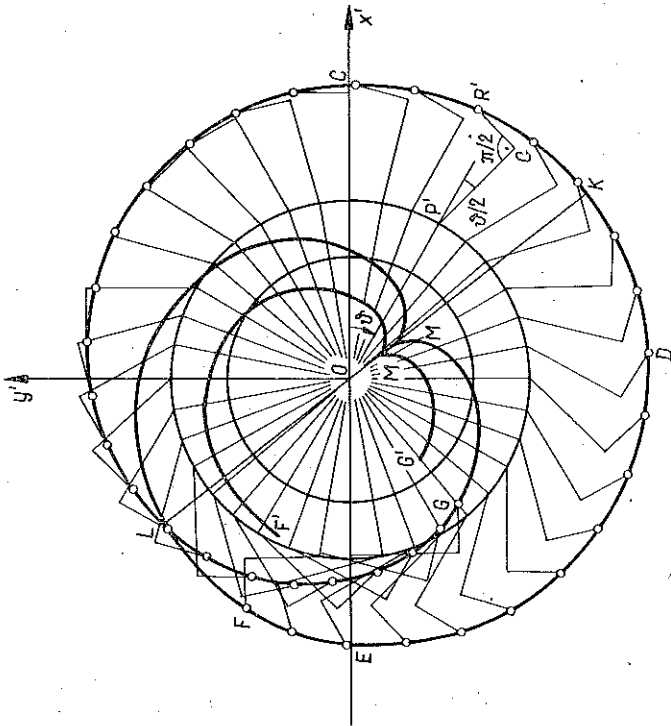
Rys. 2. Geometria pękniętej płyty i względne położenie próbki oraz ekranu

Zdefiniowana powyżej wartość  $r_0$  odpowiada krzywej początkowej głównej, związanej z kaustyką główną. Prócz tej wartości  $r_0$  są jeszcze inne wartości  $r$ , z których tworzą się kaustyki poboczne. Te wartości  $r$  możemy również określić z zależności (3.3) wprowadzając właściwą wartość  $C$ . Wszystkie kaustyki poboczne leżą na zewnątrz kaustyki głównej, która jak to pokazano w [14], zawiera powierzchnię o polu minimalnym.

Aby wykreślić rodziny uogólnionych epicykloid opisane równaniem (3.6) dla różnych wartości parametru  $r$ , należy z każdego punktu  $r$ ,  $\vartheta$  obwodu koła o środku położonym w początku układu współrzędnych  $O' x' y'$  (rys. 3) narysować wektor  $P' Q'$  o wielkości  $\frac{2}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} r$ , tworzący kąt  $3\vartheta/2$  z osią  $x'$ . Z końca tego wektora należy narysować prostopadłe do niego, w kierunku przeciwnym do biegu wskazówek zegara drugi wektor  $Q' R'$  o wielkości  $\frac{2}{3} (1 + \mu^2)^{-1/2} r$ . Spośród



Rys. 3b. Położenie kaustyki względem osi pęknięcia  $O_s O_s'$  oraz względem osi obciążenia płyty  $O_s Y_s$



Rys. 3a. Schemat konstrukcji kaustyki, utworzonej przez światło odbitej od tylnej ścianki próbki, na podstawie krzywej początkowej o promieniu  $r_{0,r}$  (kółka) oraz kaustyki utworzonej przez światło odbite od przedniej ścianki próbki na podstawie krzywej początkowej o promieniu  $r_{0,r}$  (linia pogrubiona). Badana próbka pęknięta jest w środku pod kątem  $45^\circ$  do kierunku jednoosiowego rozciągania. Przyjęto parametry szluzne dla plexiglasu:  $2\sigma_r/(v/E) = 2,68$



wszystkich krzywych narysowanych w ten sposób dla różnych wartości  $r$ , epicykloida odpowiadająca wartości  $r=r_0$  jest obwiednią główną (która obejmuje obszar o minimalnej powierzchni).

Jeżeli odniesiemy epicykloidę do nowego układu współrzędnych o tym samym co poprzednio początku, ale którego oś początkowa obrócona jest o kąt  $(-2\omega)$ , to otrzymamy parametryczne równania epicykloidy w postaci

$$(3.7) \quad \begin{aligned} X' &= r_0 \left[ \cos(\vartheta + 2\omega) \pm \frac{2}{3} \cos 3 \left( \frac{\vartheta}{2} + \omega \right) \right], \\ Y' &= r_0 \left[ \sin(\vartheta + 2\omega) \pm \frac{2}{3} \sin 3 \left( \frac{\vartheta}{2} + \omega \right) \right]. \end{aligned}$$

Podstawiając  $(\vartheta + 2\omega) = \varphi$  do równań (3.7) dostajemy

$$(3.8) \quad \begin{aligned} X' &= r_0 \left( \cos \varphi + \frac{2}{3} \cos \frac{3\varphi}{2} \right), \\ Y' &= r_0 \left( \sin \varphi + \frac{2}{3} \sin \frac{3\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Z dwu ostatnich równań wynika, że epicykloida jest krzywą symetryczną względem osi tworzącej kąt  $(-2\omega)$  z kierunkiem osi pęknięcia. Jeżeli oś pęknięcia płyty poddanej prostemu rozciąganiu tworzy kąt  $\beta$  z osią obciążenia, to  $K_I$  i  $K_{II}$  wynoszą

$$(3.9) \quad K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta, \quad K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta \cos \beta,$$

tak więc ze związków (3.5) otrzymujemy

$$\frac{K_{II}}{K_I} = \operatorname{ctg} \beta = \operatorname{tg} \omega.$$

Widać stąd, że kąt  $\omega$  równa się kątowi nachylenia osi pęknięcia do osi poprzedniej płyty; por. rys. 3a. Dlatego dla płyt poddanych prostemu rozciąganiu oś symetrii kaustyki i oś pęknięcia są do siebie symetryczne; przy tym osią ich symetrii jest oś obciążenia płyty.

Z równań (3.8) otrzymujemy wartość promienia biegunowego kaustyki:

$$(3.10) \quad \rho = (X'^2 + Y'^2)^{1/2} = \left( \frac{13}{9} + \frac{4}{3} \cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2}.$$

Ze wzoru tego wynika, że promień biegunowy  $\rho$  osiąga ekstremum dla kątów  $\varphi = 0, 2\pi, \dots$ , dla których spełniony jest związek

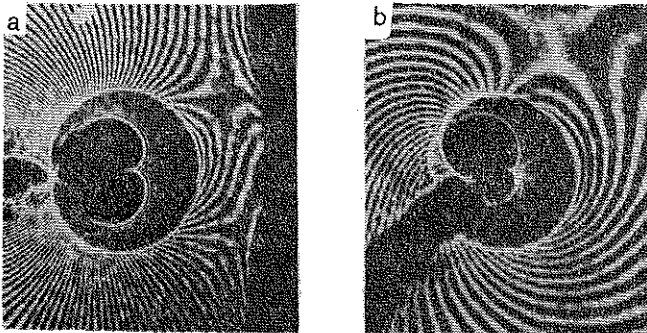
$$(3.11) \quad \rho_{\max} = \frac{5}{3} r_0 \quad \text{i} \quad \rho_{\min} = \frac{r_0}{3}.$$

Można dalej pokazać, że średnica kaustyki wzdłuż jej osi symetrii wynosi  $D_1 = 3r_0$ , podczas gdy średnica poprzeczna kaustyki równa  $D_t = 3,163 r_0$ .

Rys. 3b przedstawia kaustykę i jej konstrukcję geometryczną dla pęknięcia, tworzącego kąt  $\beta=45^\circ$  z osią przyłożonych w nieskończoności naprężeń  $\sigma$ . Zewnętrzna część kaustyki (krzywa *EDKCBLAG*), której konstrukcję pokazano na tym rysunku powstaje wskutek odbić od tylnej powierzchni płyty i odpowiada wartości  $C_r = -2z_r dc_r$ . Część tego odbicia od krawędzi szczeliny stanowią punkty *F, G* na rys. 3. Wewnętrzna część kaustyki (krzywa *GMLF*) powstaje wskutek odbić od poprzedniej powierzchni płyty z  $C_f = -z_f (v/E) d$ . Jeśli  $C_f = C_r$ , to obie części kaustyki mają dwa punkty wspólne, jeśli zaś  $C_f \neq C_r$ , to między tymi dwiema częściami występuje nieciągłość. Rys. 3 przedstawia względne położenie dwu części kaustyki utworzonej w wyniku odbić od płyty plexiglasu zawierającej pęknięcie wewnętrzne. Stosunek promieni odpowiednich krzywych początkowych obu części odbitych kaustyk wynosi:

$$(3.12) \quad \frac{r_r}{r_f} = 1,48.$$

Rys. 4 przedstawia otrzymaną doświadczalnie kaustykę dla przypadku pokazanego na rys. 3, a rys. 4a — kaustykę wywołaną przez pęknięcie prostopadłe do osi obciążenia. Na rys. 5 przedstawiono cztery rodzaje uogólnionych epicykloid odpowiadających



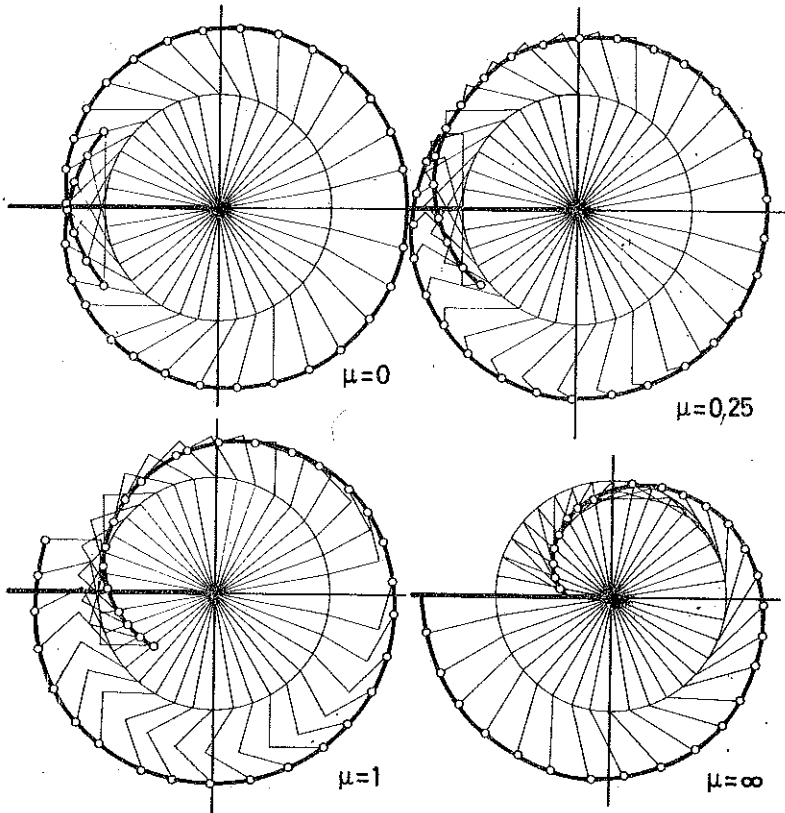
Rys. 4. Obrazy interferencyjne obszarów odkształconych wokół pęknięć dla  $\beta=45^\circ$  oraz  $90^\circ$

wiadających  $\mu=0, 0,25; 1,0$  i  $\mu \rightarrow \infty$ , a na rys. 6 zmiany różnicy średnic podłużnych uogólnionych epicykloid  $D_1^{\max} - D_1^{\min}$ , znormalizowanych do maksymalnej podłużnej średnicy  $D_1^{\max}$  w funkcji zmian współczynnika  $\mu = K_{II}/K_I$ . Przez pomiar tej wielkości z doświadczalnie otrzymanej kaustyki można wyznaczyć wartość  $\mu$ . Wtedy wartości  $K_I$  i  $K_{II}$  można określić z następujących wzorów, które dają się wyprowadzić z równań (3.6):

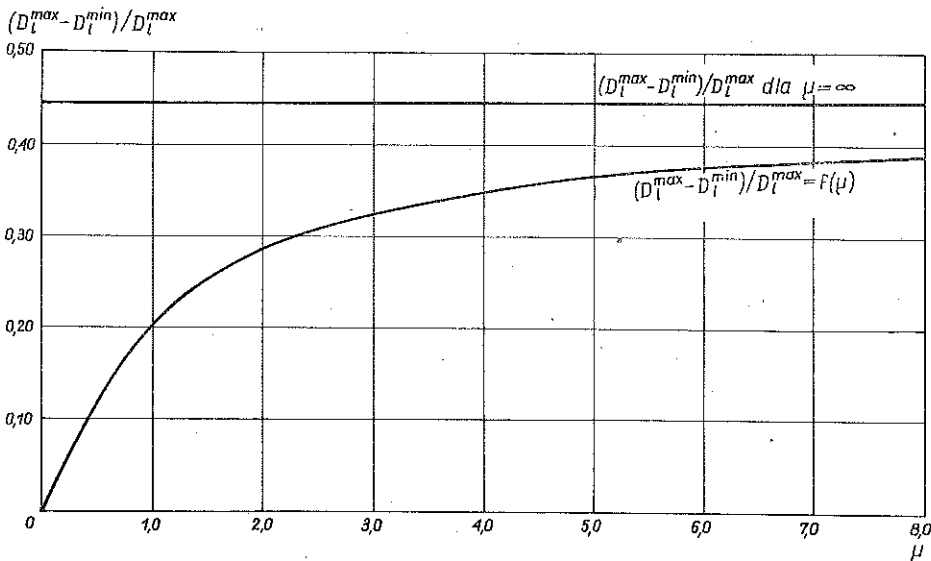
$$(3.13) \quad K_I = \frac{\sqrt{2\pi} r_0^{5/2}}{z_0 t c \sqrt{1+\mu^2}},$$

$$K_{II} = \mu K_I.$$

Rys. 7 obrazuje powstawanie kaustyki na ekranie położonym w pewnej odległości od płyty dla przypadku płyty rozciąganej, pękającej od krawędzi. Kaustyka powstaje z bardzo małej krzywej początkowej *S* na powierzchni próbki. Kaustyka jest znacznie większa od krzywej początkowej i jej rozmiary rosną w miarę oddalenia się ekranu

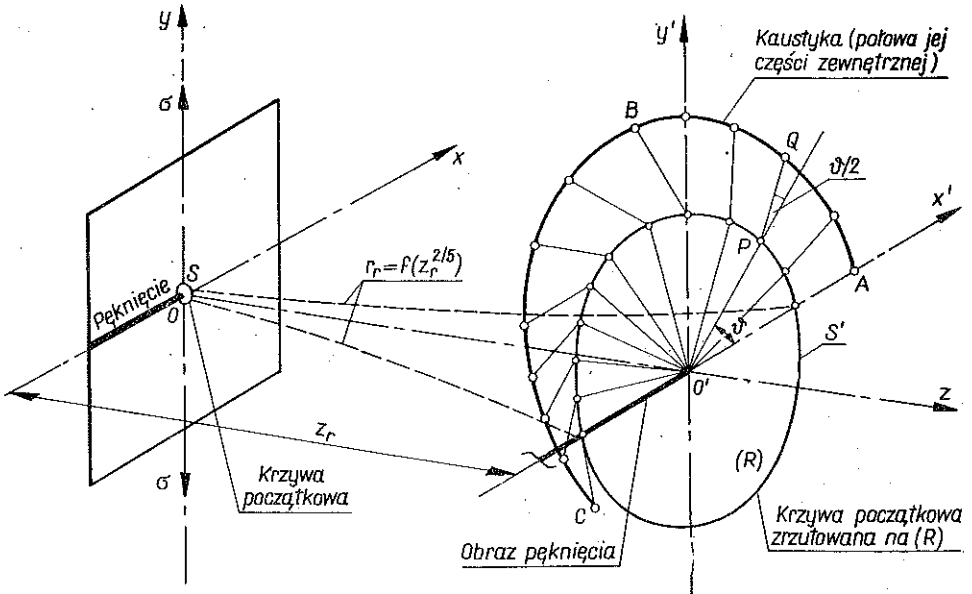


Rys. 5. Uogólnione epicykloidy dla pęknięcia wewnętrznego, dla  $\mu=0, 0,25, 1,0$  oraz  $\mu \rightarrow \infty$



Rys. 6. Różnice podłużnych średnic uogólnionej epicykloidy  $(D_l^{\max} - D_l^{\min})$  znormalizowane do maksymalnej średnicy podłużnej  $D_l^{\max}$  jako funkcji stosunku  $\mu = K_{II} / K_I$

od próbki. Powiększenie kaustyki wywołane jest silną zmianą grubości współczynnika załamania próbki w pobliżu wierzchołka szczeliny, wskutek czego odbite promienie świetlne ulegają znacznemu odchyleniu. Dodatkowe powiększenie kaustyki wywołane jest też powiększeniem układu optycznego.



Rys. 7. Schemat powstawania kaustyki w odległości  $z_r$  od pękniętej płyty

Strumień światła padający na powierzchnię próbki może być równoległy, zbieżny lub rozbieżny. Ze związków (3.3) i (3.4) można łatwo wywnioskować że, gdy padający strumień światła jest zbieżny lub rozbieżny, krzywa początkowa jest mniejsza niż w przypadku równoległej wiązki światła, natomiast kaustyka jest wówczas większa, ponieważ zachodzi dodatkowe powiększenie wywołane rozbieżnością promieni światła. Zatem, gdy padająca wiązka światła nie jest równoległa, krzywa początkowa, będąc bardzo małą, zawiera informacje z obszarów bardzo bliskich wierzchołka pęknięcia. Jest to szczególnie ważne i świadczy o wyższości i użyteczności metody kaustyk przy rozwiązywaniu zagadnień pęknięcia nad konwencjonalnymi metodami eksperymentalnej analizy naprężeń.

Z rys. 4a i 4b można zauważyć, że kaustyka utworzona przez odbicie od otoczenia wierzchołka pęknięcia składa się z dwu części. Część zewnętrzna utworzona jest przez promienie światła odbite od jednej powierzchni próbki, a część wewnętrzna przez odbicie od drugiej powierzchni. Te dwie części kaustyk nie są ciągłe wskutek różnych wartości optycznych odpowiadających odbiciom od przedniej i tylnej powierzchni próbki, jak również wskutek powstałej wcześniej przerwy między ściankami odkształconej szczeliny czy też pęknięcia. Można łatwo wykazać, że kiedy ognisko padającej wiązki światła znajduje się przed próbką (rozbieżna wiązka światła) to — jeżeli pole naprężeń jest rozciągające — zewnętrzna część kaustyki tworzy się wskutek odbicia od tylnej strony próbki, podczas gdy wewnętrzna część kaustyki

tworzy się wskutek odbicia od przedniej strony próbki. W przypadku ściskającego pola naprężeń powyższa kolejność jest odwrócona, tzn. kaustyka wewnętrzna jest utworzona przez odbicie od tylnej strony, a kaustyka zewnętrzna przez odbicie od przedniej strony próbki. Gdy ognisko padającego strumienia światła jest z tyłu próbki kolejność kaustyk powstałych wskutek odbicia od przedniej i tylnej strony próbki jest odwrócona.

3.1.1. *Przypadek ośrodka lepkosprężystego* [17, 18]. Powyżej przytoczone związki pomiędzy kaustyką a jej krzywą początkową pozostają poprawne także wtedy, gdy materiał, z którego wykonana jest pękająca płyta zachowuje się w sposób lepkosprężysty, pod warunkiem, że odpowiednie stałe mechaniczne lub optyczne zostaną zastąpione wielkościami zależnymi od czasu. Ze zmian kształtu i wielkości kaustyki w czasie możliwe jest wyznaczenie w różnych warunkach obciążenia, czasowych zmian takich charakterystyk pękającej płyty jak współczynnik intensywności naprężeń, szybkość uwalniania się energii sprężystej, wielkości rozwarcia szczeliny (*crack opening displacement C.O.D.*) itd.

Jako przykład lepkosprężystego zachowania się polimeru w pracach [17, 18] podano przebieg zmian czasowych własności mechanicznych oraz optycznych w temperaturze pokojowej dla poliwęglanu PCBA. Wstawiając te zmienne, będące funkcjami czasu wartości do równań kaustyk, otrzymujemy kaustykę o wielkości zmieniającej się w czasie.

3.1.2. *Przypadek materiału dwójłomnego* [19]. Do opisu zmian drogi optycznej promienia świetlnego odbitego od tylnej powierzchni próbki albo przechodzącego przez próbkę dla materiału wykazującego efekt dwójłomności wymuszonej, musimy stosować równania (2.14) z parametrami  $\xi (= \xi_r, \xi_t) \neq 0$ . W tym przypadku otrzymujemy następujące równania parametryczne kaustyki i jej krzywej początkowej

$$(3.14) \quad \begin{aligned} X'_t &= \left(\frac{3C}{2}\right)^{2/5} \left\{ A^{2/5} \cos \vartheta + \frac{3}{2} A^{-3/5} \left[ \cos \frac{3\vartheta}{2} + \frac{3\xi}{4} \sin 2\vartheta \right] \right\}, \\ Y'_t &= \left(\frac{3C}{2}\right)^{2/5} \left\{ A^{2/5} \sin \vartheta + \frac{3}{2} A^{-3/5} \left[ \sin \frac{3\vartheta}{2} - \frac{\xi}{4} (1 + 3 \cos 2\vartheta) \right] \right\}, \end{aligned}$$

przy czym

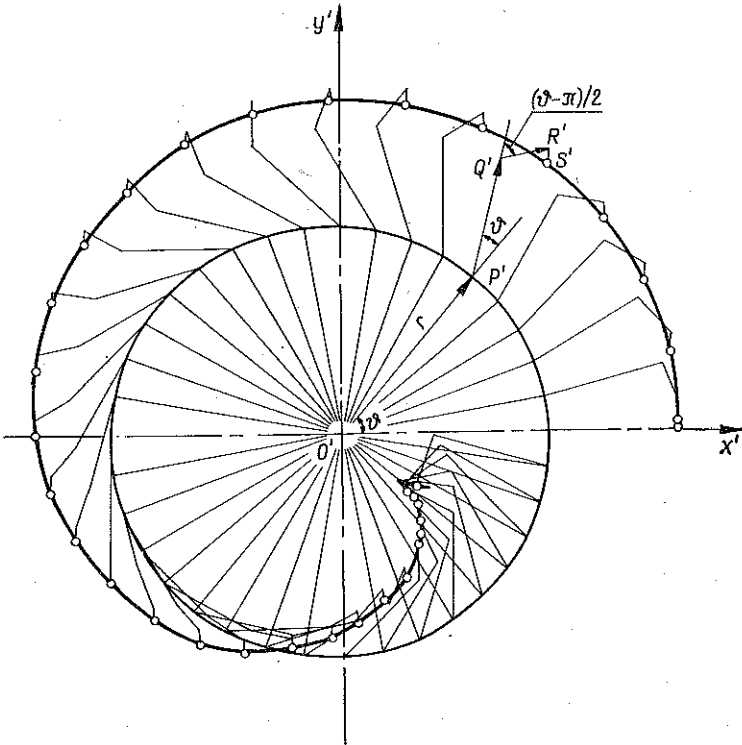
$$(3.15) \quad A = -\frac{\xi}{4} \sin \vartheta + \left[ 1 + \frac{\xi}{4} \left( 7 \sin \frac{3\vartheta}{2} - \sin \frac{3\vartheta}{2} \right) + \frac{\xi^2}{32} (25 + 9 \cos 2\vartheta) \right]^{1/2},$$

$$(3.16) \quad r = r_0 = \left( \frac{3C}{2} A \right)^{2/5}.$$

Równanie (3.16) opisuje krzywą początkową — obwiednię rozważanego obszaru. Widać, że dla materiału dwójłomnego jest ona krzywą, której promień zmienia się z kątem  $\vartheta$ . Promień zależy ponadto od współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$ , odległości  $z_0$ , własności ośrodka płyty opisanych współczynnikiem  $C$  i pośrednio (por. związek (3.9)) od długości pęknięcia  $\alpha$ . Odbieganie kształtu krzywej od koła

wywołane jest dwójłomnością materiału i opisane przez współczynnik  $A$ , zależny od współczynnika elastooptycznego  $\xi$  jak i od kąta  $\vartheta$ . Dla  $\xi=0$ ,  $A=1$  i krzywa staje się kołem, jak wykazano już poprzednio.

Gdy krzywa początkowa (3.16) zostaje zrzutowana optycznie na ekran  $Sc$ , równoległy do płaszczyzny środkowej płyty, jej rzut opisany jest równaniami (3.14) przedstawiającymi podobnie jak w p. 3.1 uogólnioną epicykloidę. Rys. 8 przedstawia krzywą początkową dla pękniętej w poprzek płyty szklanej, której wartość  $\mu=0.52$ . Na tym samym rysunku wykreślono odpowiadającą krzywej początkowej uogól-



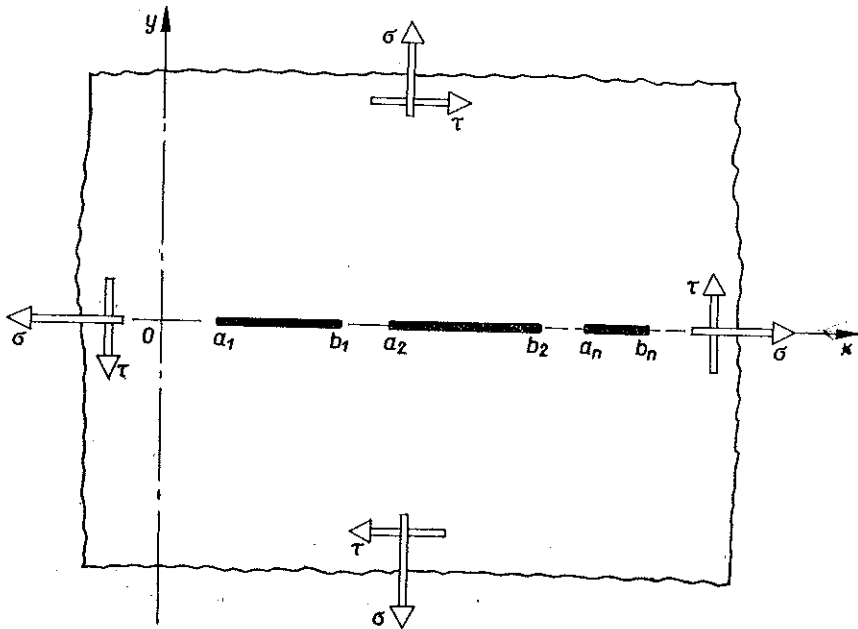
Rys. 8. Kształt krzywej początkowej dla  $\mu=0,52$  (szkło) i sposób powstawania głównej epicykloidy

nioną epicykloidę. Wektor  $O'P'$  przedstawia promień  $r$  krzywej początkowej, która może być przybliżona okręgiem,  $P'Q'$  jest wektorem o module  $Cr^{-3/2}$ , tworzącym kąt  $3\vartheta/2$  z osią  $O'x'$ .  $Q'R'$  jest wektorem o długości  $(3\xi/4)Cr^{-3/2}$ , tworzącym kąt  $(2\vartheta - \pi/2)$  z osią  $O'x'$ , zaś  $R'S'$  jest składową wektora  $Q'R'$ , normalną do osi  $O'x'$  i mającą długość  $(\xi/4)Cr^{-3/2}$ . Wypadkowy wektor  $O'S'$  jest wektorem  $W_r$ . Połowa epicykloidy wykreślona na tym rysunku odpowiada wartości  $\xi=|\xi|$ , tzn.  $\xi > 0$ . Krzywa ta nie wykazuje już symetrii ani względem osi  $O'x'$  ani względem  $O'y'$ . W ten sposób uwidacznia się wpływ dwójłomności materiału płyty na odchylenie promienia świetlnego. Podczas gdy dla materiału nie wykazującego dwójłomności,  $\xi=0$ , uogólniona epicykloida jest symetryczna względem osi  $O'x'$ , to dla materiału dwójłomnego,  $\xi \neq 0$ , następuje taka zmiana kształtu epicykloidy, że już ani jej maximum ani promienie środkowe nie leżą dłużej na osi  $O'x'$ .

3.2. *Periodyczny układ równych oraz nierównych pęknięć [20-22]*

W przypadku występowania periodycznego układu równych pęknięć w płycie poddanej w nieskończoności działaniu jednorodnych naprężeń rozciągających  $\sigma$  i ścinających  $\tau$  (rys. 9), zespolona funkcja naprężeń  $\Phi(z)$  wynosi:

$$(3.17) \quad \Phi(z) = \frac{\sigma - i\tau}{2} \frac{\sin(\pi z/2b)}{[\sin^2(\pi z/2b) - \sin^2(\pi z/2a)]^{1/2}}$$



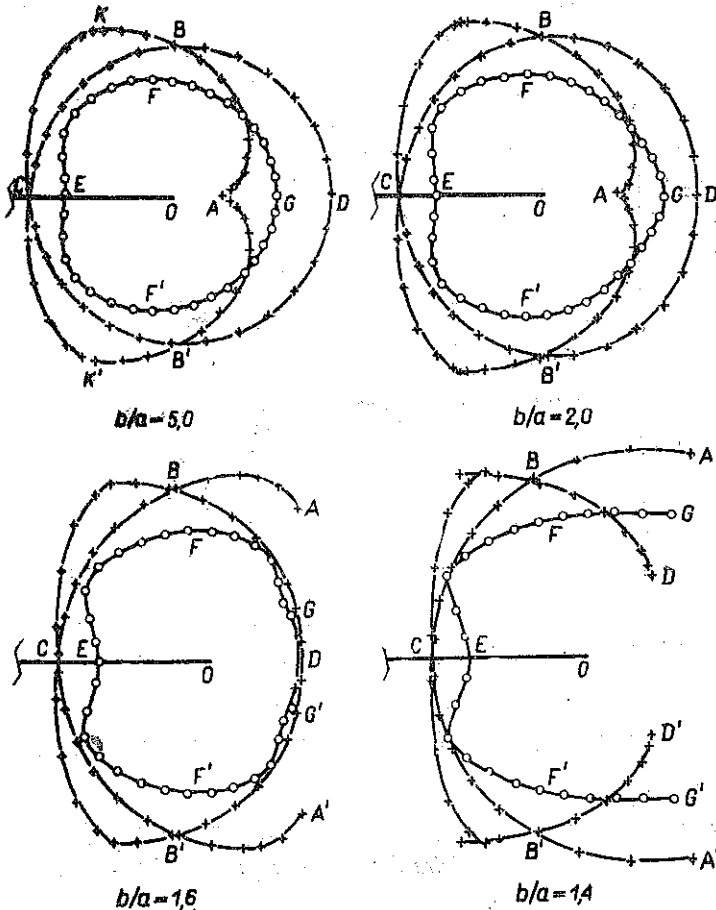
Rys. 9. Położenie układu współrzędnych przyjętego dla jednakowych szczelin

Z powyższej funkcji można wyprowadzić równania krzywej początkowej i kaustyki. Postać tych równań *explicite* dana jest w pracach [20—22], por. związki (34) oraz (38a, b) w pracy [21].

Z równań tych, za pomocą cyfrowej maszyny matematycznej, otrzymano kaustyki dla różnych konfiguracji pęknięć i różnych obciążeń. Rys. 10 przedstawia kształty krzywych początkowych ( $GFEF'G$ ) i odpowiadające im epicykloidy ( $ABCB'DBCB'A$ ) dla  $\tau=0$ ,  $C\sigma=0,5$  i  $b/a=5,0$ ;  $2,0$ ;  $1,6$  i  $1,4$ . Widać, że dla  $b/a \geq 5,0$  krzywa początkowa i epicykloidy niewiele się różnią od odpowiednich krzywych dla przypadku pojedynczego pęknięcia. Oznacza to, że wzajemny wpływ kolejnych pęknięć na siebie, dla  $b/a \geq 5,0$  jest niewielki. Dla wartości stosunku  $b/a < 5,0$  krzywe początkowe i kaustyki są wyraźnie zniekształcone. Rys. 11 przedstawia kaustyki powstałe wokół wierzchołków pęknięcia dla trzech różnych obciążeń rozciągających. Podczas, gdy na rys. 11 zewnętrzne epicykloidy są od siebie oddzielone, to na rys. 11 epicykloidy

te stykają się ze sobą, a na rys. 11c się przecinają. Kształty tych epicykloid pokrywają się ze kształtem epicykloid wyznaczonych na podstawie rozważań teoretycznych.

W zupełnie podobny sposób rozpatrzono przypadek szeregu nierównych pęknięć. Rys. 12 przedstawia kaustyki wokół wierzchołków dwu współosiowych i symetrycznych pęknięć wewnętrznych, odpowiadające trzem stopniom obciążenia. Kaustyki



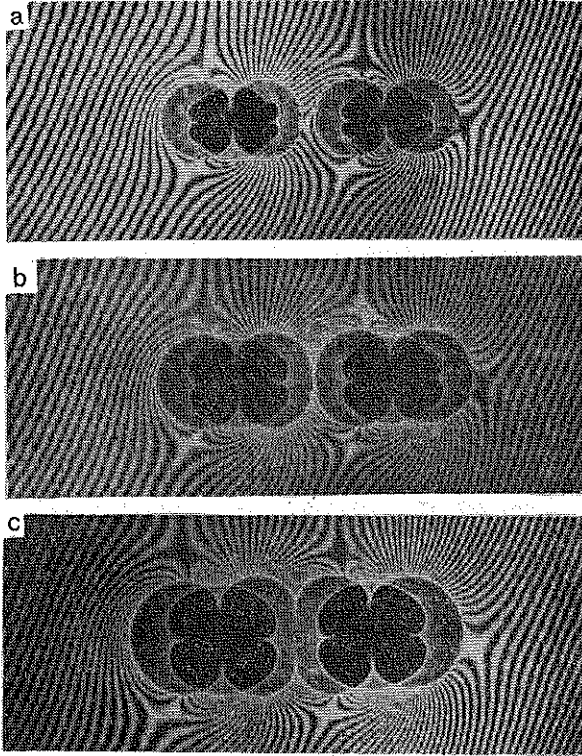
Rys. 10. Cztery rodzaje uogólnionych epicykloid wokół wierzchołków układu jednakowych szczelin dla typowych wartości stosunku  $b/a$ ; o, krzywa początkowa; +, uogólnione epicykloidy

przedstawione na rys. 12a nie wpływają na siebie, natomiast kaustyki na rys. 12a i 12c utworzone w dwu sąsiadujących wewnętrznych wierzchołkach szczelin, ulegają coraz większemu zniekształceniu wraz ze wzrostem obciążenia.

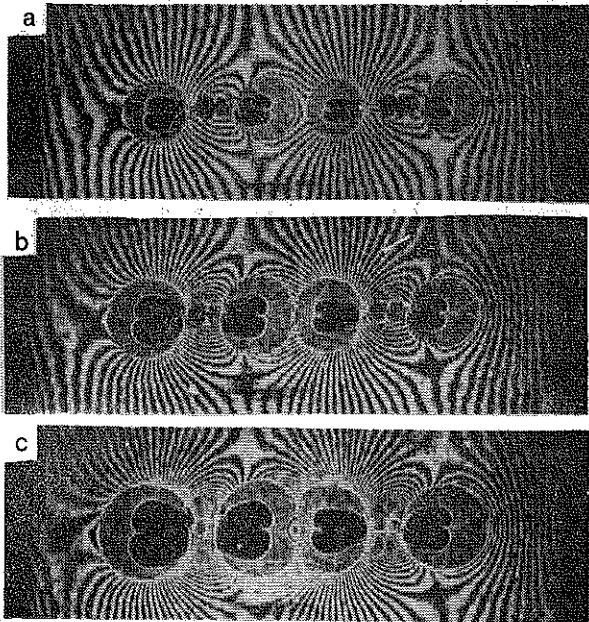
### 3.3. Pęknięcie rozgałęzione symetrycznie i niesymetrycznie

Symetryczny i niesymetryczny model pęknięcia rozgałęzionego jest bardzo ważny w zastosowaniach praktycznych, a w szczególności w badaniach pęknięć



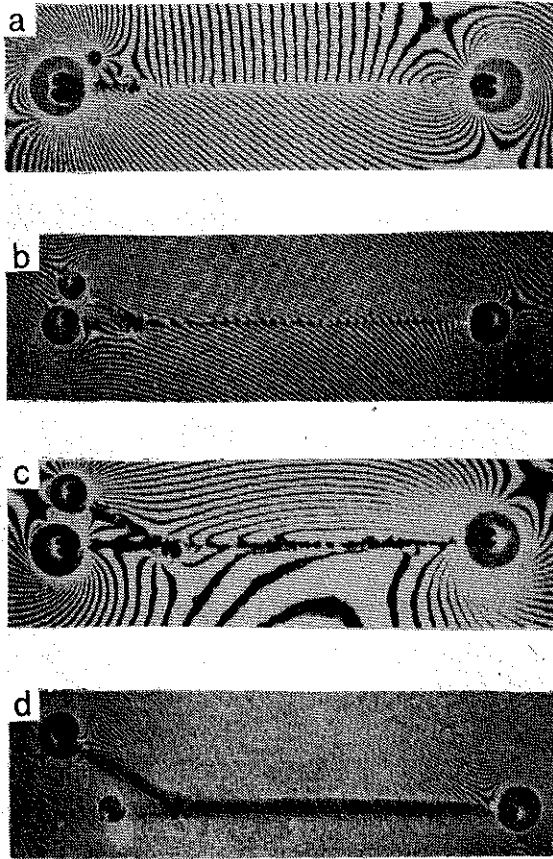


Rys. 11. Interferogramy i kaustyki obszarów odkształconych wokół podwójnego wewnętrznego i poprzecznego pęknięcia dla różnych stopni obciążenia



Rys. 12. Obszary odkształcone wokół wierzchołków pęknięcia w paśmie zawierającym dwa wspólniowe i symetryczne pęknięcia o stosunku  $b/d=2$

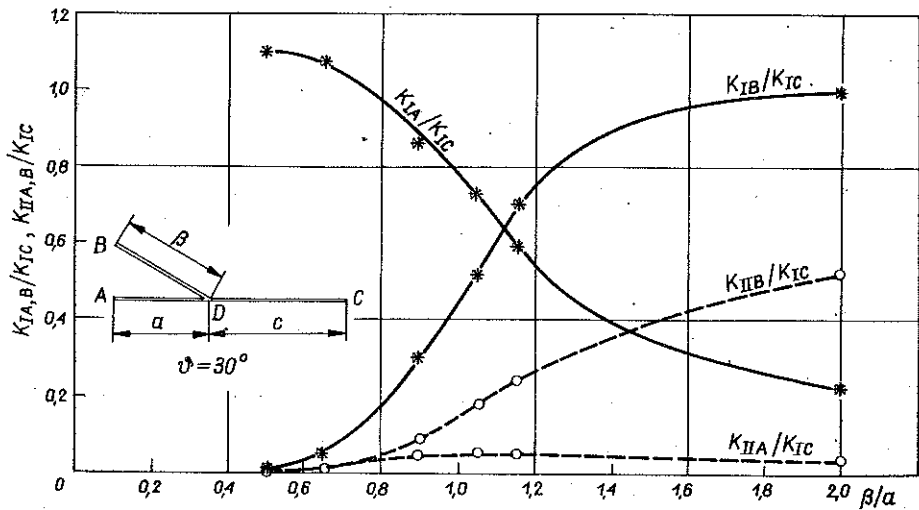
propagujących się dynamicznie, w których dla pewnych obciążeń następuje rozgałęzienie pęknięcia. Przy tym ważna jest przede wszystkim znajomość współczynników intensywności naprężeń w wierzchołku szczeliny. Metoda doświadczalnego wyznaczenia współczynników  $I.N.$  jest tym bardziej godna uwagi, że do niedawna nie znano (\*) wyników teoretycznej analizy rozpatrywanego przypadku.



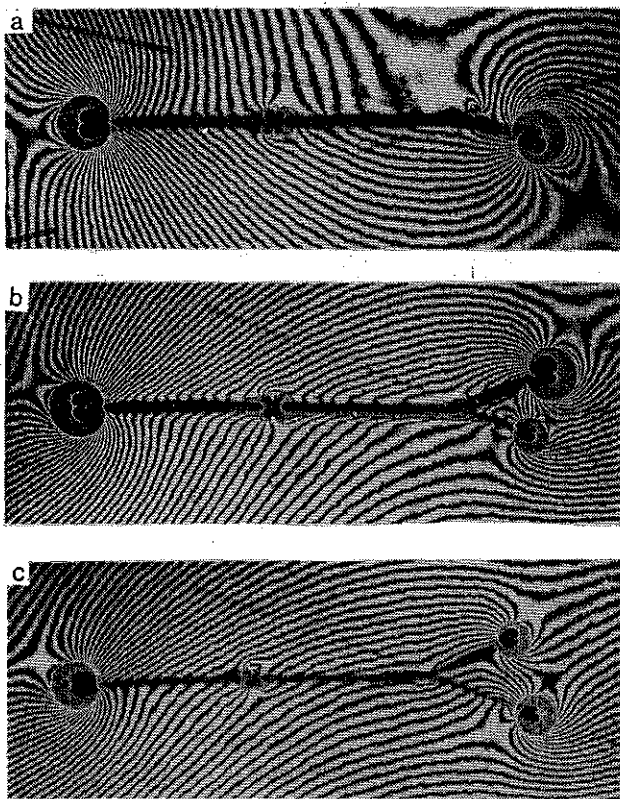
Rys. 13. Interferogramy i kaustyki obszarów odkształconych wokół rozdwojonego pęknięcia dla  $\beta=30^\circ$  oraz różnych stosunków długości pęknięcia  $b/a$

Metodę kaustyk można z powodzeniem zastosować do wyznaczenia współczynników  $I.N.$  również w tym zagadnieniu. Rys. 13 przedstawia obrazy optyczne otrzymane dla różnych niesymetrycznie rozgałęzionych konfiguracji pęknięć. Współczynniki  $I.N.$  można wyznaczyć z kaustyk utworzonych wokół wierzchołków pęknięcia. Rys. 14 przedstawia zmiany współczynnika  $I.N.$  w wierzchołku pęknięcia roz-

(\*) Ostatnio autor znalazł teoretyczne rozwiązanie zagadnienia symetrycznie rozgałęzionego pęknięcia [25, 26], oparte na osobliwych równaniach całkowych, które rozwiązano numerycznie metodą Gaussa-Lobatta [27].



Rys. 14. Zmiany stosunków współczynników intensywności naprężeń  $K_{IA}/K_{IC}$  i  $K_{IIA,B}/K_{IC}$  wraz ze zmianą stosunku długości pęknięcia  $b/a$  dla kąta rozdwojenia  $\varphi=30^\circ$



Rys. 15. Interferogramy i kaustyki obszarów wokół rozdwojonych pęknięć dla  $\varphi=22^\circ 30'$  i różnych stosunków długości pęknięć  $b/a$

widłonego, znormalizowane względem współczynnika  $IN$ , w wierzchołku nierozgałęzionego głównego pęknięcia, jako funkcji stosunku długości rozgałęzionych pęknięć, dla kąta rozgałęzienia równego  $\vartheta = 30^\circ$ . Natomiast na rys. 15 przedstawiono kaustyki pochodzące z wierzchołków symetrycznie rozgałęzionych pęknięć, o różnych długościach i kątach. Odpowiednie wartości współczynników  $IN$ , podano w pracach [24, 26].

### 3.4. Pęknięcie powłok cylindrycznych pod wpływem rozciągania [28, 29]

Metoda kaustyk może być również wykorzystana do wyznaczania współczynnika intensywności naprężeń oraz rzędu osobliwości w wierzchołku pęknięcia powłoki. Sytuacja w tym przypadku jest trudniejsza przez to, że na kształt i rozmiary kaustyki wpływa, oprócz mikroskopowych zmian krzywizny powierzchni otaczającej wierzchołek pęknięcia, również makroskopowa krzywizna powłoki. Również kierunki pęknięcia powłoki wpływają w istotnym stopniu na współczynnik  $IN$  w wierzchołku pęknięcia. Rozważamy dwa krańcowe przypadki: pęknięcia obwodowego oraz pęknięcia osiowego, różniące się wpływem krzywizny powłoki.

Ograniczmy się do rozpatrzenia przypadku powłoki o powierzchni cylindrycznej wykonanej z materiału dwójtomnego ze szczeliną obwodową o długości  $2a$ , poddanej rozciąganiu osiowemu i oświetlonej zbieżną wiązką światła. Po przeprowadzeniu dosyć długich obliczeń można wykazać, że kaustyki utworzone w wierzchołkach wyrażają się następującymi równaniami:

$$(3.18) \quad W_x = r \left\{ \left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right) \cos \vartheta \pm \frac{2\lambda_m}{3} \frac{\left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right) \left( \cos \frac{3\vartheta}{2} + \frac{3\xi}{4} \sin 2\vartheta \right)}{A + B^{1/2}} \right\},$$

$$W_y = r \left\{ \lambda_m \sin \vartheta \pm \frac{2\lambda_m}{3} \frac{\left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right) \left[ \sin \frac{3\vartheta}{2} - \frac{\xi}{4} (1 + 3 \cos 2\vartheta) \right]}{A + B^{1/2}} \right\};$$

$$r = \left[ \frac{3C}{2\lambda_m} \left| \frac{A + B^{1/2}}{(\lambda_m + 2z_0/R)} \right| \right]^{2/5},$$

$$A = -\frac{z_0}{R} \cos \frac{5\vartheta}{2} - \frac{\xi}{8} \left[ 2\lambda_m \sin \vartheta + \frac{z_0}{R} (7 \sin 3\vartheta + 3 \sin \vartheta) \right],$$

$$B = B_1 + B_2 + B_3 + B_4,$$

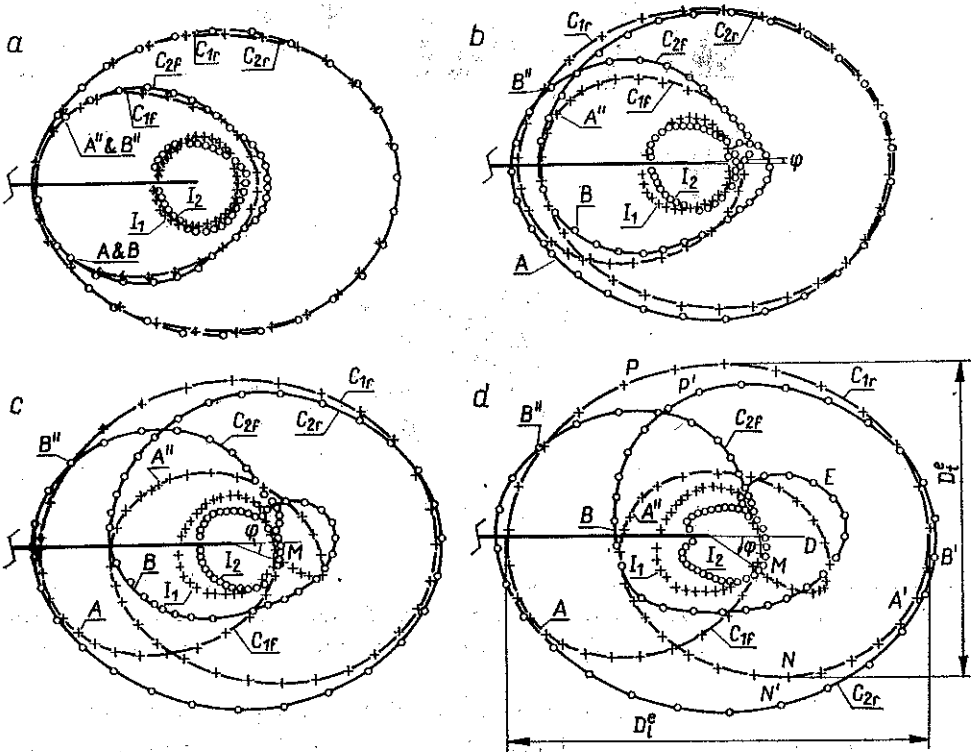
$$(3.19) \quad B_1 = \lambda_m \left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right),$$

$$B_2 = \left( \frac{z_0}{R} \cos \frac{5\vartheta}{2} \right)^2,$$

$$B_3 = -\frac{\xi}{4} \lambda_m \left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right) \left( \sin \frac{3\vartheta}{2} - 7 \sin \frac{\vartheta}{2} \right) + \frac{z_0}{R} \cos \frac{5\vartheta}{2} \times \left[ 2\lambda_m \sin \vartheta + \frac{z_0}{R} (7 \sin 3\vartheta + 3 \sin \vartheta) \right],$$

$$B_4 = \frac{\xi^2}{64} \left[ 4\lambda_m^2 \sin^2 \vartheta + \left( \frac{z_0}{R} \right)^2 (7 \sin 3\vartheta + 3 \sin \vartheta)^2 + 4\lambda_m \frac{z_0}{R} \sin \vartheta \times (7 \sin 3\vartheta + 3 \sin \vartheta) + 16\lambda_m \left( \lambda_m + \frac{2z_0}{R} \right) (3 + \cos 2\vartheta) \right].$$

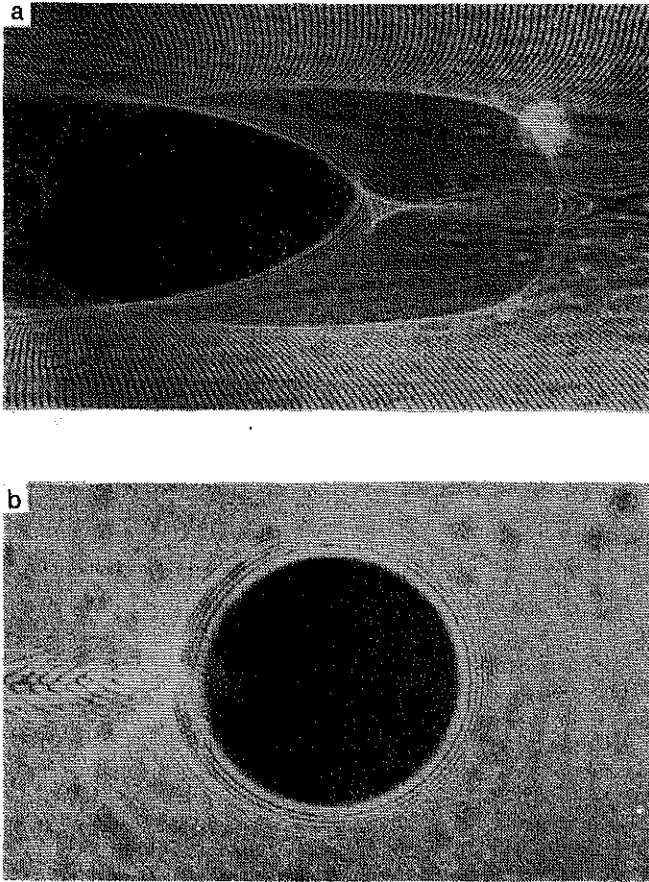
Rys. 16 pokazuje ewolucję kaustyk odpowiadających różnym krzywiznom powłoki. Można zauważyć, że ze wzrostem krzywizny powłoki odpowiednie kaustyki wydłużają się coraz bardziej w kierunku osi szczeliny. Kształt części kaustyki wewnętrznej jest trójkątny, co spowodowane jest wpływem krzywizny powłoki.



Rys. 16. Kaustyki i ich krzywe początkowe dla:  $z_0/R=0,5$ ;  $\lambda_m=2$  i  $\xi=0$  (a), 0,2 (b); 0,6 (c) i 1,0 (d). Narysowano dwie krzywe początkowe, opisane przez  $I_{1,2}$  i odpowiadające  $\xi > 0$  oraz  $\xi < 0$ . Każdej krzywej początkowej odpowiadają dwie kaustyki opisane przez  $C_{i,r}$  ( $i=1,2$ )

Na rys. 17 przedstawiono otrzymane doświadczalnie kaustyki dla promieni światła odbitego i przechodzącego. Widać, że krzywizna powłoki wpływa wyłącznie na kaustykę utworzoną przez promień światła odbitego, podczas gdy kaustyka

utworzona przez promienie przechodzące ma typowy kształt kaustyki otrzymanej dla płaskiej pękniętej płyty. Wynika to stąd, że na bieg promieni przechodzących nie wpływa krzywizna bocznej powierzchni płyty, jeśli nie brać pod uwagę nieistotnego równoległego przesunięcia. Współczynniki  $I.N.$  można wyznaczyć z pokazanych



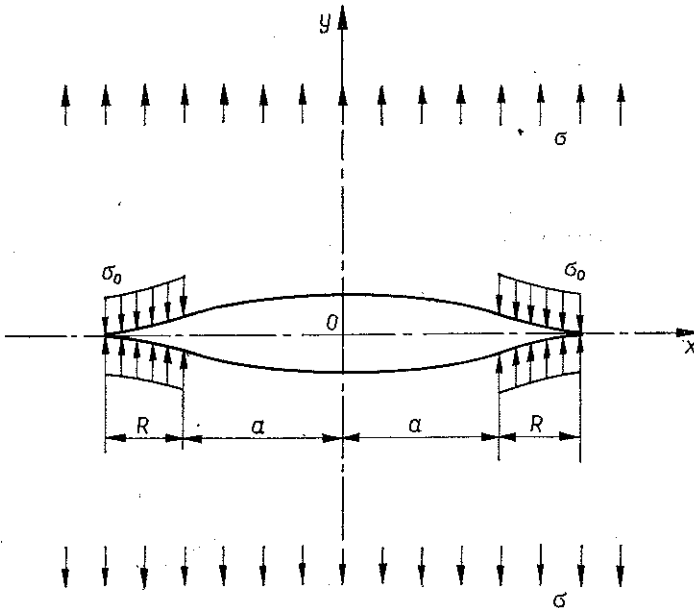
Rys. 17. Kaustyki powstałe po oświetleniu rozciąganej, walcowej powłoki z leksanu dla:  $\sigma = 93,0 \text{ Kp/cm}$ ,  $z_0/R = 12,09$ ,  $\lambda_m = 4,87$ . Kaustyka na rys. 15a utworzona jest przez światło odbite od przedniej i tylnej ścianki powłoki, a na rys. 17b przez światło, które przeszło przez powłokę

kaustyk posługując się specjalnymi nomogramami. Wykresy przedstawiające zmianę współczynnika  $I.N.$ : a) jako funkcji przyłożonego obciążenia  $p$  oraz b) jako funkcji kształtu pękniętej powłoki opisanego parametrem  $\lambda$  podano w pracy [29].

### 3.5. Pęknięcia przy plastycznych oraz lepkoplastycznych polach naprężeń [30–33]

Zagadnienie pęknięcia w polach naprężeń plastycznych albo lepkosprężystych nie doczekało się jeszcze pełnego rozwiązania. Wygodna metoda rozwiązania tego zagadnienia opiera się na pewnym prostym modelu zwanym modelem Dugdale'a-

Barenblatta (D-B) (rys. 18). Zgodnie z tym modelem zakłada się, że uplastycznienie ograniczone jest do wąskiej strefy utworzonej na przedłużeniu wierzchołka pęknięcia. Zbadano model, w którym założono, że pęknięcie wydłuża się dzięki płynięciu w strefie plastycznej. Strefę plastyczną określamy jako obszar, w którym znoszą się osobliwości naprężeń wytworzonych przez przyłożone zewnętrzne pola naprężeń z polami sił kohezji w wierzchołku pęknięcia. Dzięki temu, na zewnątrz wierzchołka panuje ograniczone (nieosobliwe) pole naprężeń. W ten sposób rozwiązanie problemu plastycznego zostaje przekształcone na rozwiązanie problemu sprężystego. Powyższy model jest jednak poprawny tylko dla prostego rodzaju ośrodka: sprężystego — doskonale plastycznego, który stanowi tylko małą część materiałów kon-



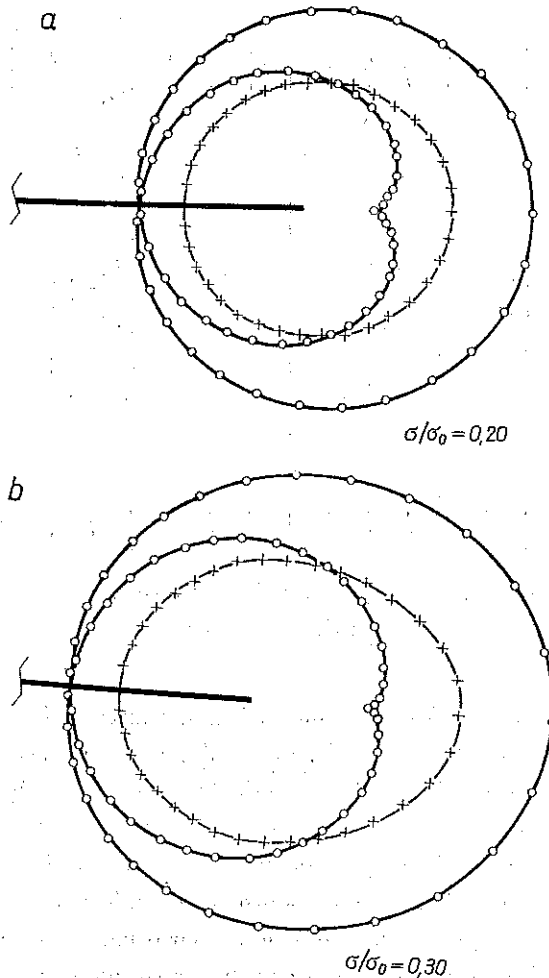
Rys. 18. Model Dougdale'a-Barenblatta dla pęknięcia wewnętrznego w ośrodku sprężysto-doskonale plastycznym

strukcyjnych, ponieważ w większości materiałów w zakresie plastycznym występuje po efekcie płynięcia efekt wzmocnienia. Materiały, wzmacniające się pod wpływem odkształcenia, można opisać rozszerzając model D-B tak, by uwzględnić różne stopnie wzmocnienia odkształceniowego w obszarze plastycznym. Uzupełniony w ten sposób model, który daje się dopasować do wszystkich materiałów konstrukcyjnych, można badać z powodzeniem metodą kaustyk. Kształt kaustyk obserwowanych doświadczalnie można wystarczająco dokładnie porównać z odpowiednimi kaustykami teoretycznymi otrzymanymi z różnych wersji ulepszonego modelu D-B, co pozwala określić już wszystkie charakterystyczne cechy pęknięcia badanego materiału.

Równanie kaustyk wynikające z dość ogólnego modelu D-B można otrzymać wstawiając do równań (2.10) i (2.21) zespolone funkcje naprężeń  $\Phi(z)$  w postaci

$$(3.20) \quad \Phi(z) = \frac{\sigma_0}{\pi} \left\{ \operatorname{arc\,ctg} \left( \frac{[z^2 - (a+R)^2]^{1/2}}{[(1+R/a)^2 - 1]^{1/2}} \right) + \frac{\lambda}{10} \sum_m \operatorname{arc\,ctg} \left( \frac{(1+mR/a)[z^2 - (a+R)^2]^{1/2}}{z[(1+R/a)^2 - (1+mR/a)^2]^{1/2}} \right) - \frac{\lambda}{10} \sum_n \operatorname{arc\,ctg} \left( \frac{(1+nR/a)[z^2 - (a+R)^2]^{1/2}}{z[(1+R/a)^2 - (1+nR/a)^2]^{1/2}} \right) \right\}$$

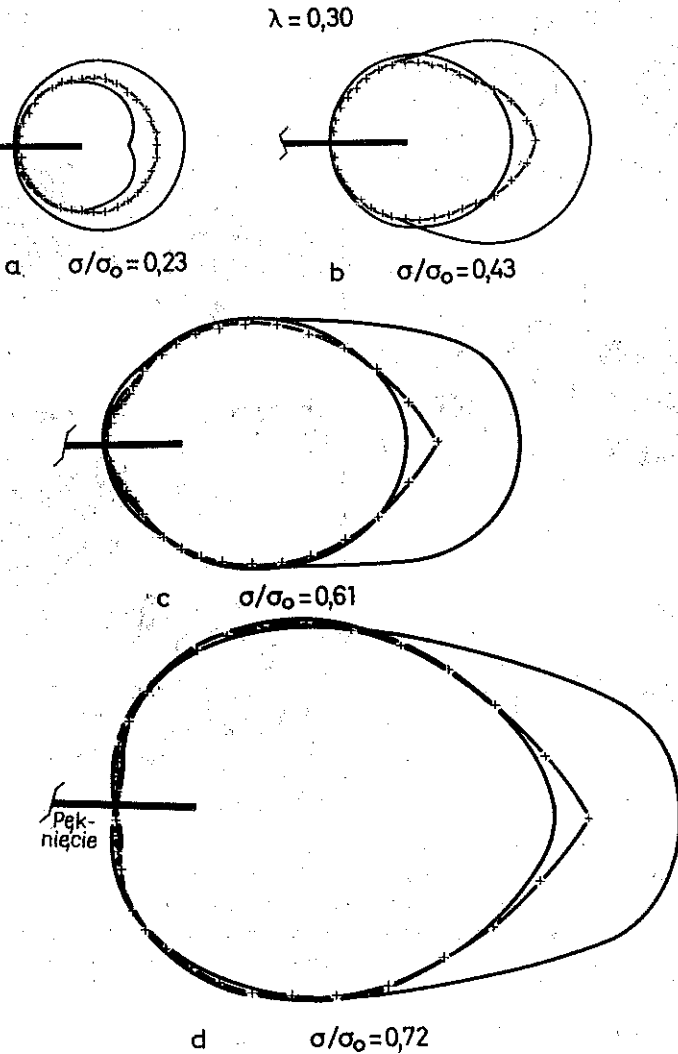
gdzie  $\sigma_0$  oznacza naprężenie płynięcia ośrodka, a jest połową długości szczeliny (pęknięcia),  $R$  jest długością strefy plastycznej, zaś  $\lambda$ ,  $m$  i  $n$  określają rozkład naprężeń kohezyjnych wewnątrz strefy plastycznej.



Rys. 19. Kaustyki powstałe wokół poprzecznego pęknięcia krawędziowego dla wartości stosunku  $\sigma/\sigma_0 = 0,20$ ;  $0,30$ ;  $0,40$  i  $0,42$ . Widać, że dla tego modelu, dla małych wartości stosunku  $\sigma/\sigma_0$  kaustyka jest pojedyncza

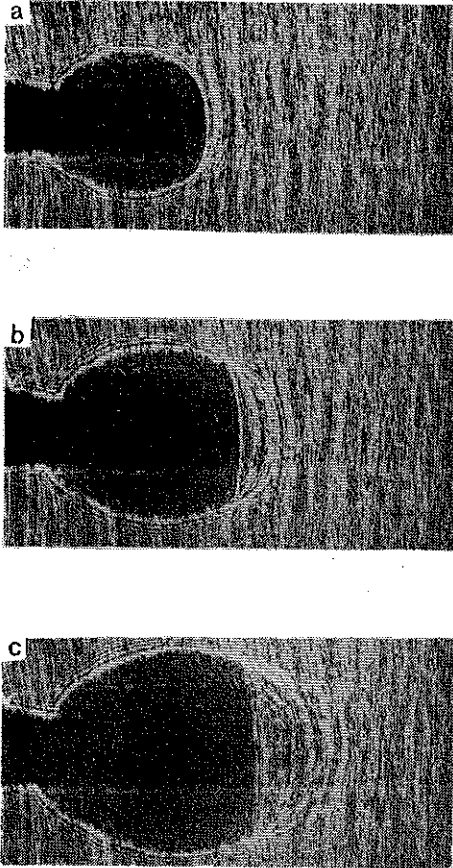


Posługując się maszyną cyfrową określono na podstawie tych równań postacie kaustyk wynikające z różnych wersji ulepszonego modelu D-B. Rys. 19 przedstawia zmianę kształtu kaustyk wywołaną obciążeniem zewnętrznym dla prostego modelu D-B, zaś rys. 20 przedstawia kaustyki dla różnych wersji ulepszonego modelu D-B.

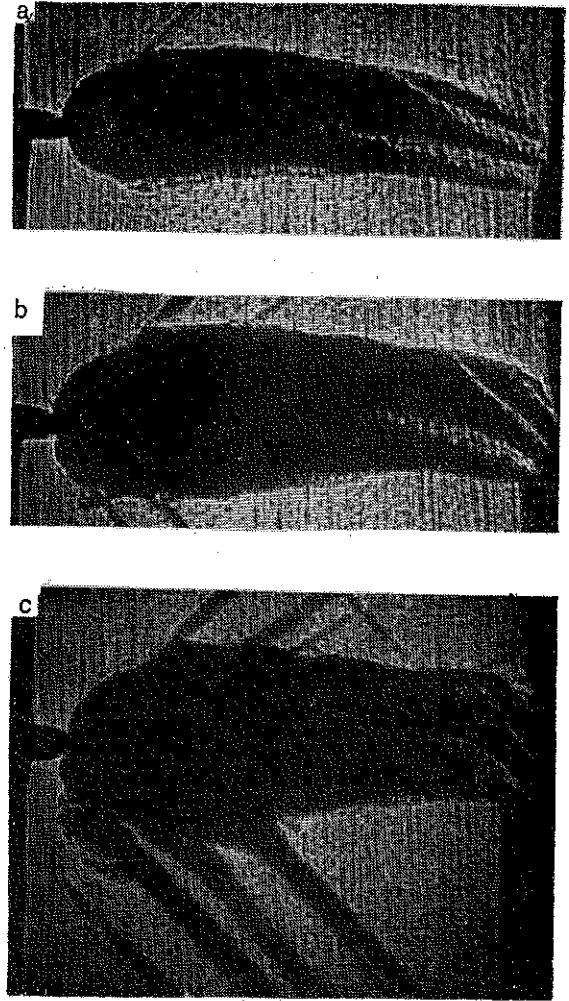


Rys. 20. Kaustyki (linie ciągłe) i ich krzywe początkowe (krzyżki) dla profilu naprężeń wewnętrznych II ( $\lambda=0,30$ ), [32], dla wartości stosunku naprężenia przyłożonego  $\sigma$  do naprężenia płynięcia  $\sigma_0$ ,  $\sigma/\sigma_0=0,23; 0,43; 0,61$  i  $0,72$

Łatwo widać, że wraz ze wzrostem obciążenia kaustyki stają się coraz bardziej wydłużone w kierunku osi pęknięcia. Ta zmiana kształtu kaustyk jest dobrym wskaźnikiem wielkości uplastycznienia powstałego w pobliżu pęknięcia. Na rys. 21 i 22 pokazano kaustyki otrzymane doświadczalnie dla stali o wysokiej wytrzymałości



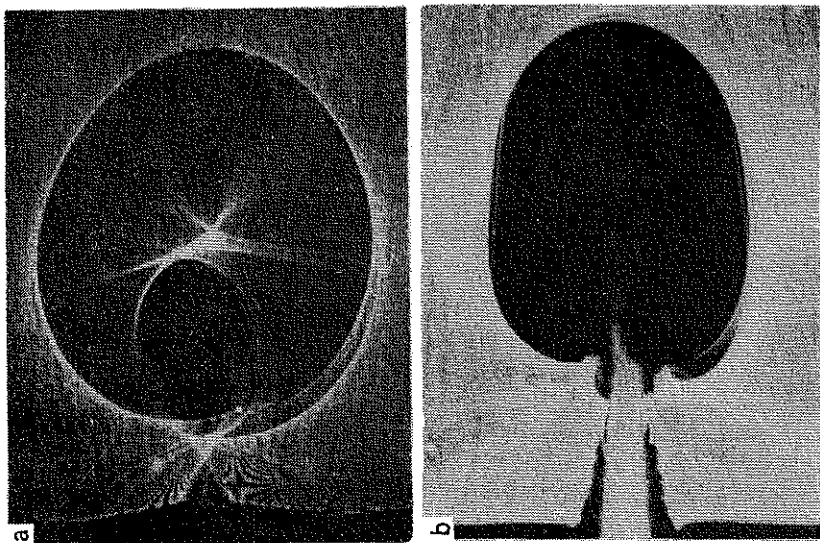
Rys. 21. Kaustyki utworzone wokół wierzchołka pęknięcia poprzecznego dla różnych stopni obciążenia, dla płyty stalowej US Steel T1 obciążonej powyżej granicy plastyczności



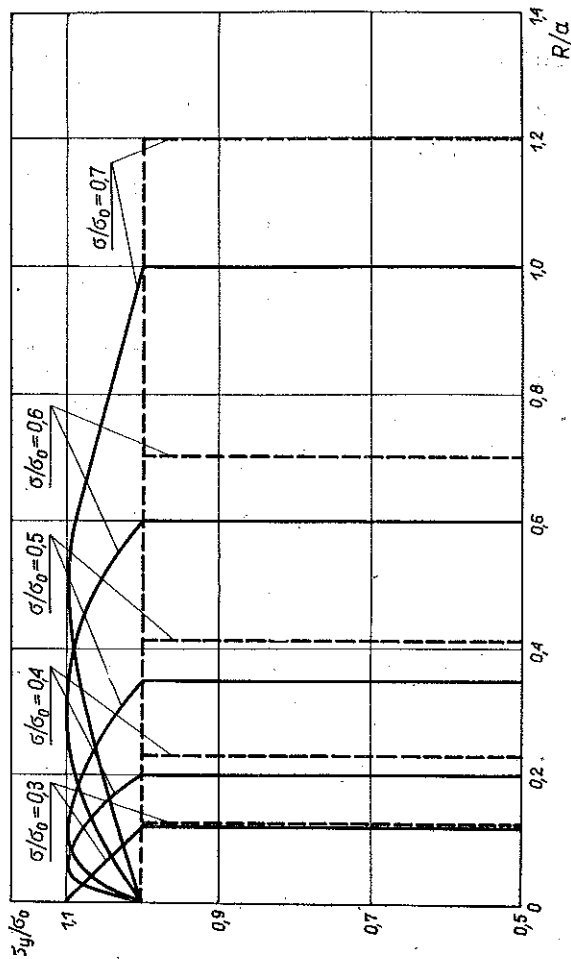
Rys. 22. Kaustyki silnie zdeformowanych obszarów wokół wierzchołków poprzecznego pęknięcia krawędziowego stali DIN St. 37. Wszystkie przypadki dotyczą obszaru plastycznego. Na topografii widać również wychodzące z kaustyk pasma poślizgu

(USS-T1) i stali miękkiej (DIN St. 37). Porównując kształty obu grup kaustyk, doświadczalnych i teoretycznych, można dobrać odpowiedni model D-B poprawny dla danego obciążenia i dla danego rodzaju stali (por. [31, 32]). Na rys. 23 przedstawiono różne postacie zmodyfikowanego modelu D-B dla stali USS-T1 przy różnych wartościach obciążenia.

Z powyższym wiąże się badania rozciąganej próbki z poliwęglanu, który jak wiadomo wykazuje zachowanie silnie lepkosprężyste. Na rys. 24 widzimy kaustyki powstałe w obszarze uplastycznienia w otoczeniu pęknięcia krawędziowego. Kaustyki na rys. 24a zostały uzyskane za pomocą wiązki świetlnej odbitej od przedniej



Rys. 24. Kausytki powstałe w wierzchołku poprzecznego pęknięcia krawędziowego w świetle odbitym a) i poprzecznym b) dla takiej wartości obciążenia przyłożonego do próbki, które odpowiada obciążeniu plastycznemu przed pęknięciem

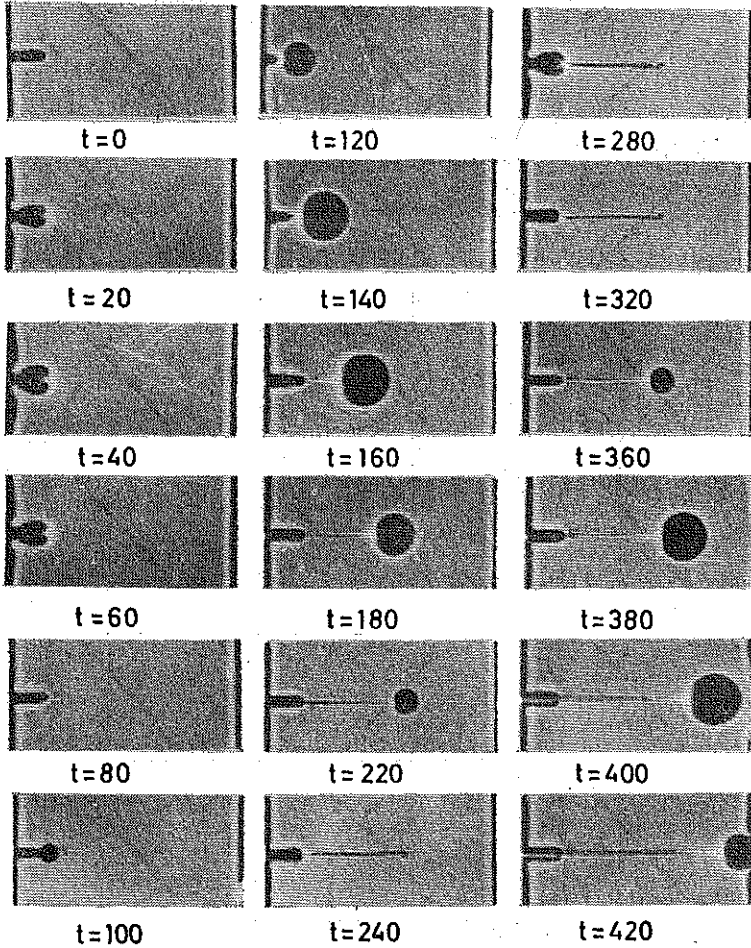


Rys. 23. Rozkład naprężeń w obszarze strefy plastycznej (linia ciągła) i odpowiednie wartości wynikające z modelu DB (linia kreskowana) dla stali USS T1

i tylnej ścianki próbki, na rys. 24b zaś za pomocą wiązki przepuszczonej. Odpowiednie postacie ulepszanego modelu D-B, słuszne dla każdego etapu obciążenia, mogą być łatwo dobrane.

### 3.7. Zjawiska propagacji pęknięć [34–36]

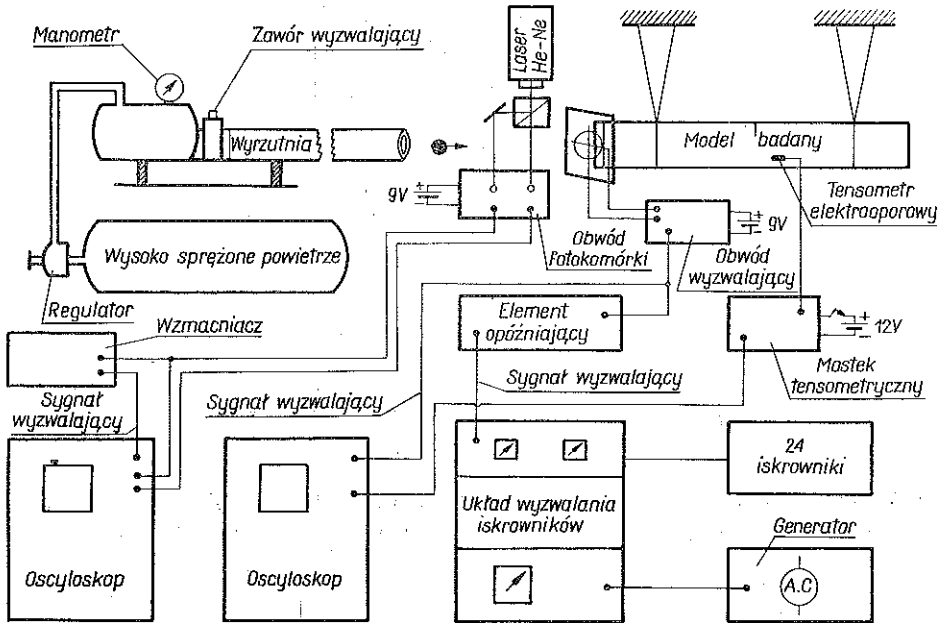
Pole naprężeń otaczające wierzchołek rozchodzącego się pęknięcia można badać rejestrując kaustyki szybką kamerą filmową. Analizując otrzymane w ten sposób, w kolejnych chwilach czasu kaustyki, dostajemy zależność czasową współczynnika intensywności naprężenia w wierzchołku pęknięcia. Rys. 25 pokazuje ciąg 18 foto-



Rys. 25. Obrazy optyczne dla naciętej płytki z plexiglasu, wywołane obciążeniem impulsowym.

grafii kaustyk powstałych przy rozchodzeniu się impulsu naprężenia w płytce z plexiglasu z nadciętym karbem. Sam układ doświadczalny widzimy na rys. 26. Na pierwszych pięciu fotografiach rys. 25 widać powstanie tylko wewnętrznej części kaustyki, o charakterystycznym sercowatym kształcie, co oznacza, że w próbce rozchodzi się fala ściskająca. W tym czasie pęknięcie się nie powiększa. Na następnych sześciu

fotografiach postać kaustyk ulega zmianie. Tutaj widzimy powstanie tylko zewnętrznej części kaustyki o kształcie kołowym. Kołowy kształt wskazuje na to, że pole naprężeń w wierzchołku pęknięcia jest rozciągające, co wiąże się z rozchodzeniem w płytce impulsu rozciągającego obciążenia, w jaki po odbiciu od przeciwnej, poprzecznej, krawędzi próbki zamienił się impuls początkowo ściskających naprężeń.

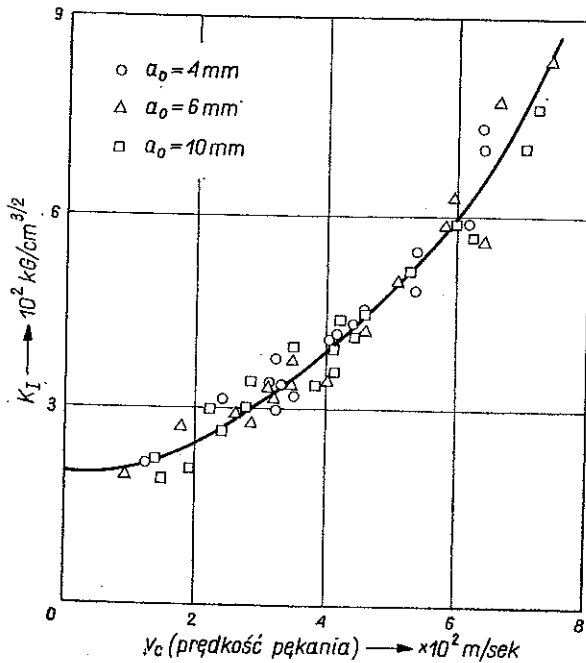


Rys. 26. Schemat urządzenia do badań dynamicznych metodą kaustyk

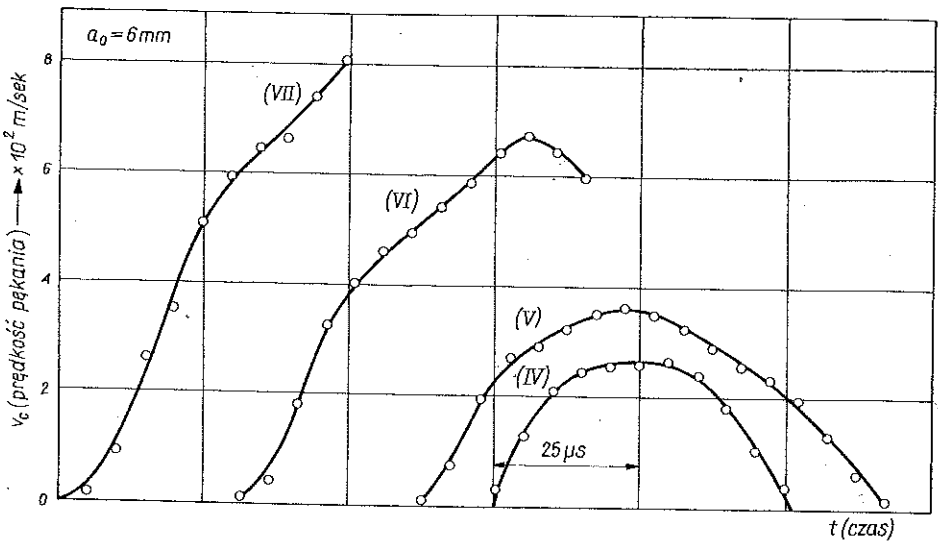
Z ciągu tych wszystkich fotografii łatwo wynika, że pęknięcie rozprzestrzenia się tylko w czasie przejścia impulsu naprężeń rozciągających.

Fotografie następne przedstawiają próbkę poddaną znowu impulsowi naprężeń ściskających, powstałemu wskutek odbicia impulsu naprężeń rozciągających od przedniej krawędzi próbki (tej, do której przyłożono impuls pierwotny). W próbce rozchodzi się zatem ponownie impuls naprężeń ściskających. W wierzchołku pęknięcia, które teraz przestaje się propagować, nie pojawia się żadna kaustyka. Wewnętrzna szpiczasta część kaustyki tworzy się natomiast znów w wierzchołku karbu pierwotnego. Zatem rzeczywiste pęknięcie w odróżnieniu od karbu, nie ma wpływu na rozkład ściskającego pola naprężeń w płytce (próbce). Wynika to oczywiście stąd, że krawędzie karbu, niezależnie od tego czy pole naprężeń jest ściskające czy rozciągające, pozostają stale od siebie rozdzielone.

W przeciwieństwie do tego zjawiska, w występującym z kolei polu rozciągającym zarówno pęknięcie jak i karb początkowy działają na pole naprężeń w podobny sposób, co przejawiają się tym, że zarówno wokół pęknięcia jak i wokół karbu powstają kaustyki kołowe. Ostatnie cztery z ciągu fotografii odpowiadają rozciągającemu polu naprężeń, które prowadzi do pęknięcia próbki.



Rys. 27. Zmiana współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  w funkcji szybkości pęknięcia  $v_c$  dla naciętych próbek z plexiglasu o długości początkowej nacięcia  $a_0=4$ ; 6 i 10 mm



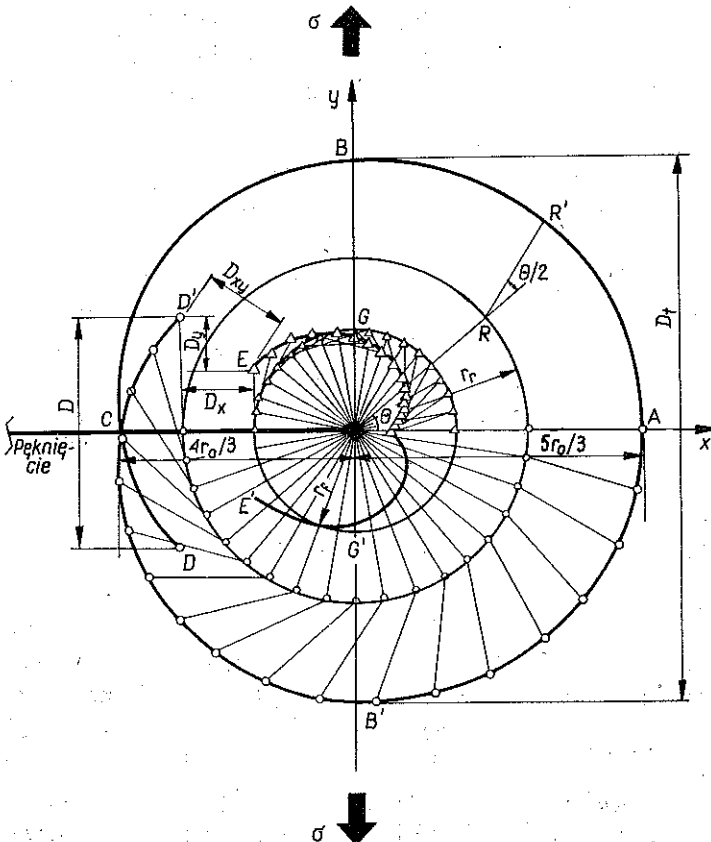
Rys. 28. Zmiana szybkości pęknięcia  $v_c$  w funkcji czasu  $t$  dla różnych impulsów obciążenia dla naciętej próbki z plexiglasu o długości nacięcia początkowego  $a_0=6$  mm

Z fotografii tych wyznaczono współczynnik  $I.N.$  w wierzchołku propagującego się pęknięcia oraz prędkości propagacji pęknięcia. Rys. 27 przedstawia zmianę współczynnika  $I.N.$  jako funkcję prędkości pęknięcia dla różnych początkowych długości

pęknięcia. Z kolei rys. 28 pokazuje zmianę prędkości pęknięcia jako funkcję czasu, przy różnych impulsach obciążenia dla próbki z naciętym brzegiem, wykonanej z plexiglasu. Nacięcie miało długość  $a=6$  mm.

3.8. Wyznaczenie metodą kaustyk wartości C.O.D. [37]

Metodą kaustyk można również wyznaczyć wartość C.O.D. tzn. odległość między krawędziami pęknięcia powstałą wskutek obciążenia, która jest ważnym parametrem mechaniki zniszczeń. Jest to możliwe dzięki temu, że skutkiem rozsunęcia się krawędzi szczeliny występuje zawsze przerwa między gałęzią zewnętrzną i wewnętrzną kaustyki. Ponadto ponieważ zewnętrzna część kaustyki powstaje wskutek odbicia promieni od tylnej płaszczyzny próbki (w razie rozciągania i zastosowania rozbieżnej wiązki światła), wewnętrzna zaś wskutek odbicia promieni od poprzedniej ścianki, to stałe optyczne  $C_r$  i  $C_f$  są różne, a stąd jedna gałąź kaustyki jest przesunięta względem drugiej. A więc w przypadku, gdy próbka jest przezroczysta i można otrzymać kaustyki utworzone zarówno przez odbicie od tylnej jak i przedniej ścianki, pomiar przerwy między dwiema kaustykami udziela dodatkowej informacji o wartości C.O.D.



Rys. 29. Kształt głównej epicykloidy i schemat jej powstania dla  $(\nu/E)/c_r=0,25$

Rys. 29 przedstawia oba rodzaje kaustyk utworzone wskutek odbicia promieni świetlnych od pękniętej próbki plexiglasu. Przerwa między tymi kaustykami powstała skutkiem różnych stałych optycznych dla promieni odbitych od przedniej i tylnej ścianki. Odpowiednie nomogramy pozwalające na pomiar C.O.D. przy różnych wartościach stosunku obu stałych optycznych, odpowiadających promieniom świetlnym odbitym od przedniej i tylnej ścianki próbki, podane są w pracy [37]. Z nomogramów tych, znając wielkość brakującego wycinka kaustyki, możemy wyznaczyć wartość C.O.D.

#### 4. ROZETY OPTYCZNE DO POMIARU NAPRĘŻEŃ OTRZYMANE Z KAUSTYK [38]

Kaustyki nadają się nie tylko do badania stanu naprężenia w otoczeniu osłabłości, lecz mogą być również zastosowane do badania każdego spiętrzenia naprężeń, ponieważ spiętrzenia takie, zgodnie z efektem Poissona, wywołują zawsze poprzeczną deformację próbki. W związku z tym rozwinęliśmy metodę badania spiętrzeń naprężeń, którą nazwaliśmy metodą rozet optycznych (optical stress rosette). Metoda ta pozwala wyznaczyć bezpośrednio kierunki oraz różnice naprężeń głównych, a więc zastępuje niejako metodę elastooptyki. Działanie rozety opiera się na pojawieniu kaustyk wokół otworka wywierconego w tarczy, w której występuje dwuwymiarowe pole naprężeń sprężystych. Można dowieść, że kierunki główne naprężeń pokrywają się z osiami symetrii kaustyk, różnica zaś naprężeń głównych wiąże się z poprzeczną średnicą  $D$  kaustyki związkem:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{3^3}{2^{10}} \frac{D^4}{CR^2},$$

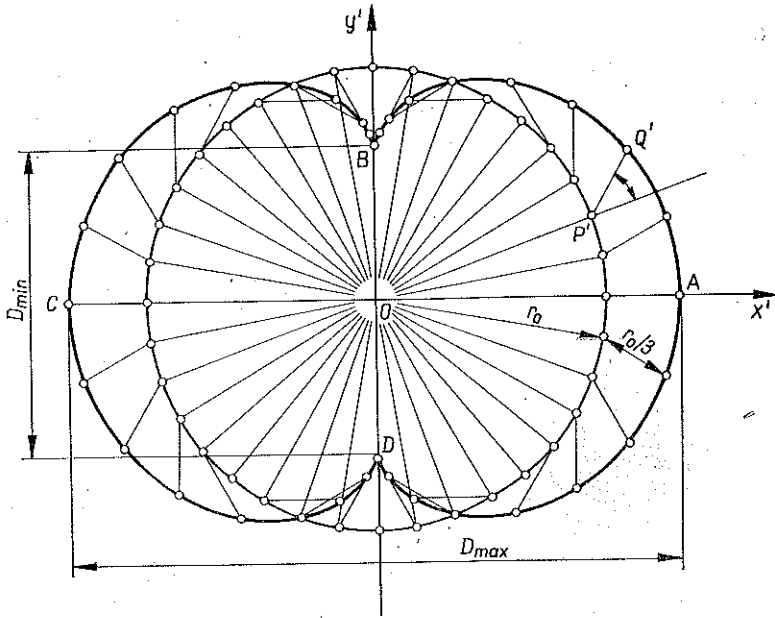
gdzie  $R$  jest promieniem otworka.

Na rys. 30 pokazany jest teoretyczny kształt kaustyk utworzonych przez promienie odbite od dwu ścianek próbki z plexiglasu z wywierconym otworkiem. Na rys. 31 widzimy odpowiednie kaustyki doświadczalne.

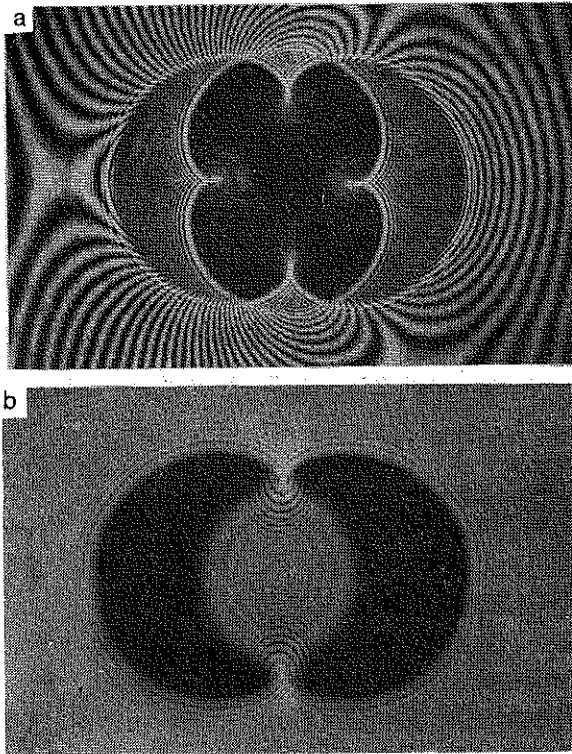
Metodę wykorzystano do wyznaczenia stanu naprężenia wokół otworu kołowego w rozciąganej próbce. Rys. 32 pokazuje obraz otrzymany po oświetleniu próbki z otworem kołowym, poddanej rozciąganiu. W próbce w węzłach sieci kwadratowej wywiercono małe otworki. Kaustyki powstałe wokół tych otworków wykorzystano do określenia kierunków oraz różnicy naprężeń głównych. Wyniki zgodne były z teorią.

Godne uwagi w tym zastosowaniu jest to, że na krawędzi otworków nie ma osłabłości pola naprężeń. Spiętrzenie naprężeń wokół otworków wywołuje jednak na tyle znaczne zmiany grubości, że możliwe jest powstanie podwójnej kaustyki (o kształcie nerkowym). Warto zauważyć, że dla kaustyk tych albo istnieje krzywa początkowa, która jest kołem współśrodkowym z otworkiem wykonanym wewnątrz płyty albo też krawędź otworka odgrywa rolę krzywej początkowej. Zależy to od obciążenia przyłożonego do płyty i od jej geometrii. Jednakże w drugim wypadku, gdy krawędź odkształconej płyty pełni rolę krzywej początkowej utworzona kaustyka



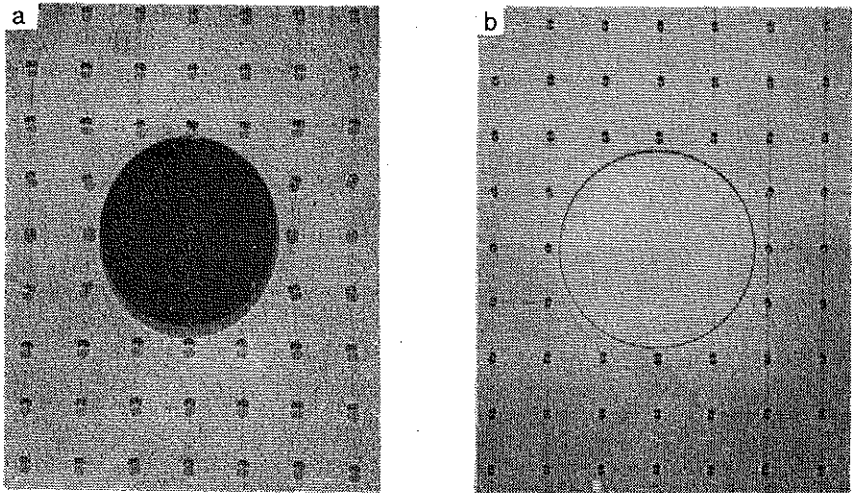


Rys. 30. Kształt i względne położenie krzywej początkowej oraz odpowiedniej epicykloidy uogólnionej wokół małego otwarka dla uogólnionego płaskiego stanu naprężenia



Rys. 31. Interferogram i kaustyki utworzone: a) przez promienie odbite od przedniej i tylnej ścianki płyty, b) promienie przechodzące przez płytę w otoczeniu małego otwarka

nie jest kaustyką rzeczywistą. Kaustyka rzeczywista rozdziela bowiem obszar ekranu na część, w której koncentrują się promienie odbite od obu stron odpowiedniej krzywej początkowej i na część, która pozostaje ciemna. Natomiast w drugim wypadku powstanie kaustyki wynika po prostu z faktu, że obszar zdeformowanej krawędzi jest na ekranie krzywą koncentracji promieni odbitych od otoczenia tej



Rys. 32. Pole naprężeń w płycie zawierającej pośrodku symetryczny otwór, poddanej rozciąganiu, uwidocznione przez układ rozet optycznych a) w świetle odbitym, b) w świetle przechodzącym

krawędzi (ponieważ poza krawędzią nie ma ośrodka materialnego i część wiązki nie zostaje odbita). Ta krzywa graniczna, zwana pseudokaustyką pozwala zbadać rozkład naprężeń w otoczeniu krawędzi w podobny sposób jak kaustyka rzeczywista w otoczeniu punktu osobliwego.

## 5. BADANIE METODĄ KAUSTYK OSOBLIWOŚCI NAPRĘŻEŃ WYWOŁANYCH OBCIĄŻENIEM

Metodę kaustyk można zastosować do badania osobliwości naprężeń oraz spiętrzenia naprężeń w punktach przyłożenia obciążeń skupiających lub rozłożonych. Zbadamy te dwa przypadki oddzielnie.

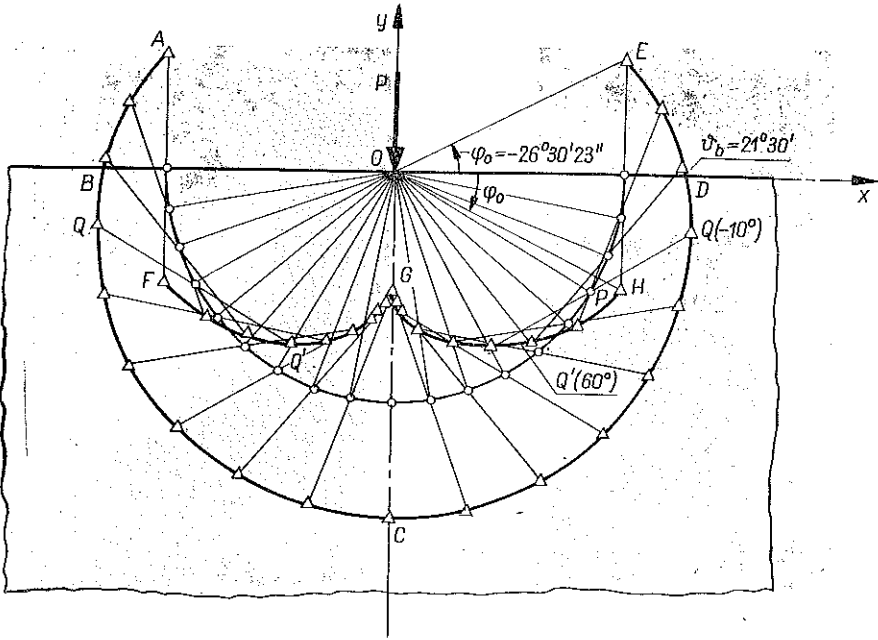
### 5.1. Osobliwości naprężeń dla sił skupionych [39]

Rozważmy przykładowo ośrodek sprężysty wypełniający półpłaszczyznę, obciążony na krawędzi skupioną siłą skierowaną pod kątem  $\varphi$ . Funkcja naprężeń dla takiego obciążenia dana jest wzorem

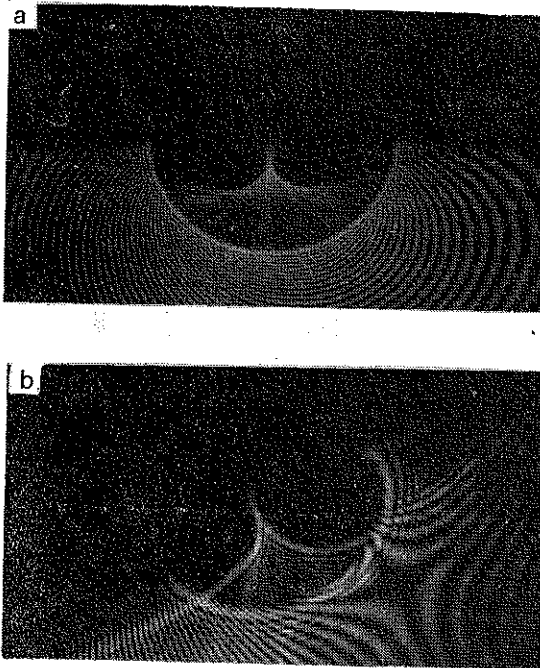
$$(5.1) \quad \Phi(z) = \frac{P}{2\pi z} e^{i\varphi}.$$

Ze związku tego otrzymamy następujące parametryczne równania kaustyki:

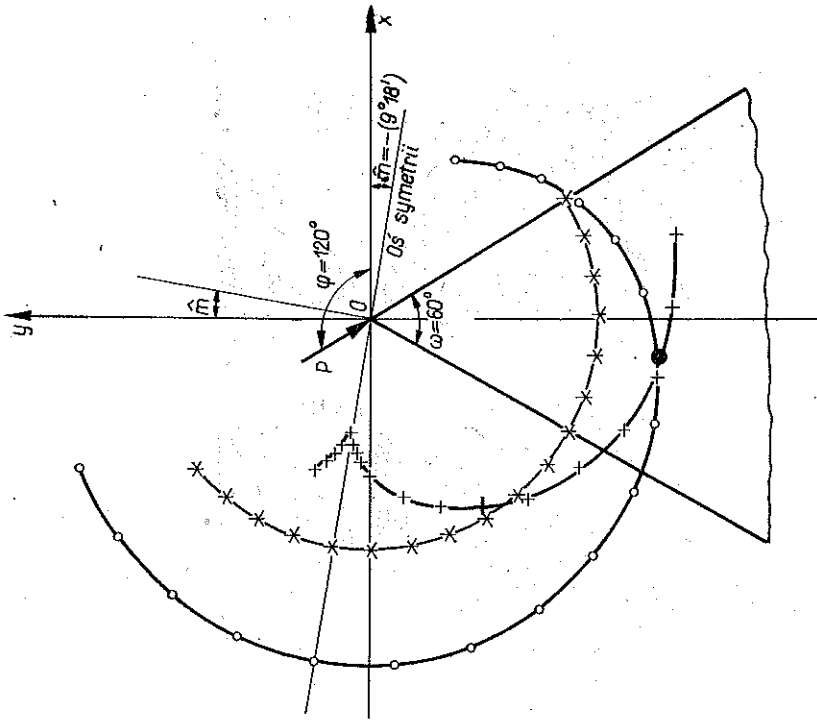
$$(5.2) \quad X = r_0 \left( \cos \vartheta \pm \cos \frac{2\vartheta + \varphi}{2} \right), \quad Y = -r_0 \left( \sin \vartheta \pm \sin \frac{2\vartheta + \varphi}{2} \right),$$



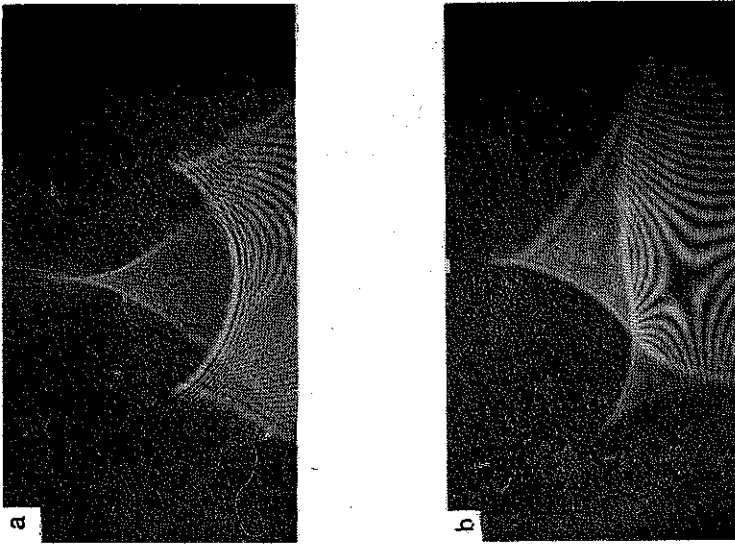
Rys. 33. Kształt i względne położenie krzywej początkowej i odpowiedniej epicykloidy uogólnionej dla półpłaszczyzny obciążonej siłą skupioną. Przyjęto tu, że  $c_r = c_f$



Rys. 34. Interferogram i kaustyki utworzone przez promienie odbite od przedniej i tylnej ścianki płyty z PMMA modelującej półpłaszczyznę, poddanej obciążeniu skupionemu a) o kierunku normalnym, b) pod kątem  $30^{\circ}$



Rys. 35. Geometria sprężystego klina o kącie  $\omega_0$  obciążonego skośnie i dwie gałęzie epicykloid dla  $\varphi = 2\pi/3$  i  $\omega_0 = \pi/3$ . Kółeczka oznaczają kaustykę od przedniej ścianki, krzyżyki od tylnej ścianki. Krzywa początkowa dla obu tych kaustyk jest ta sama



Rys. 36. Interferogram i kaustyki utworzone przez promienie odbite od przedniej i tylnej ścianki płyty PMMA w kształcie klina o kącie  $60^\circ$ , poddanej sile skupionej działającej: a) wzdłuż osi klina, b) pod kątem  $30^\circ$

oraz równanie krzywej początkowej:

$$(5.3) \quad r_0 = \left( \frac{C^* P}{\pi} \right)^{1/3}$$

Teoretyczny kształt kaustyki oraz krzywej początkowej utworzonej w punkcie położenia siły o kierunku normalnym do półpłaszczyzny ( $\varphi=0$ ) pokazany jest na rys. 33. Kształt doświadczalny kaustyki podaje rys. 34a, zaś rys. 34b pokazuje kaustykę powstałą przy obciążeniu skośnym. Wreszcie rys. 35 i 36 pokazują zgodność kształtu kaustyki teoretycznych i doświadczalnych powstałych w wierzchołku klina o kącie  $\omega=60^\circ$  pod wpływem działania ukośnych sił skupionych.

### 5.2. Osobliwości naprężeń dla sił rozłożonych [40, 41]

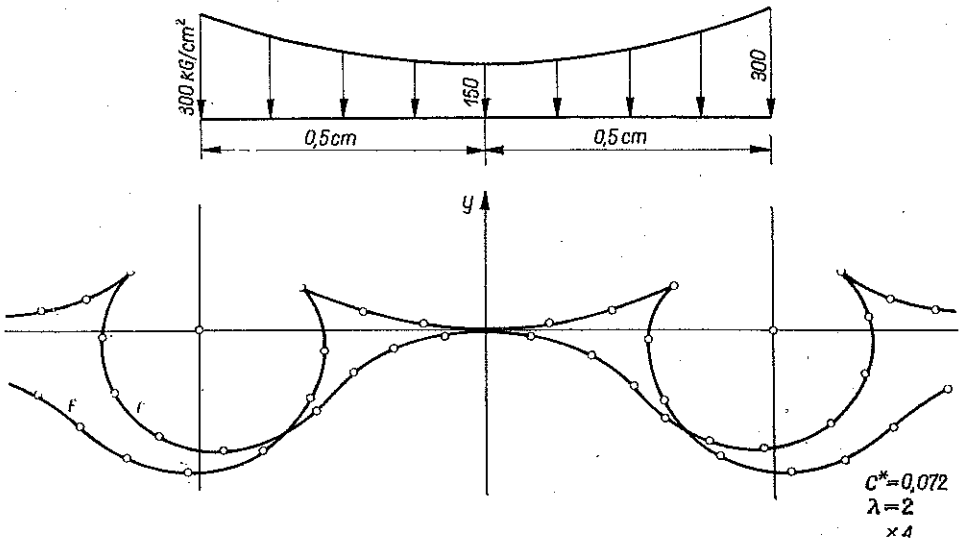
Dowolne obciążenie  $P(t)$  rozłożone wzdłuż prostej krawędzi półpłaszczyzny można przedstawić w postaci szeregu potęgowego następująco

$$(5.4) \quad P(t) = \sum_{k=0}^m S_k t^k.$$

Odpowiednia funkcja naprężeń  $\Phi(z)$  opisana jest przez

$$(5.5) \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{m+1} S_{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[ \frac{z^{i-1}}{n-1} (a^{n-1} - (-a)^{n-1}) \right] + z^{n-1} \ln \frac{z-a}{z+a} \right\}.$$

Wstawiając tę postać  $\Phi(z)$  do równań (2.20) i (2.21) otrzymujemy równanie kaustyki.



Rys. 37. Kaustyki i pseudokaustyki otrzymane na drodze teoretycznej dla półpłaszczyzny podanej obciążeniu parabolicznemu

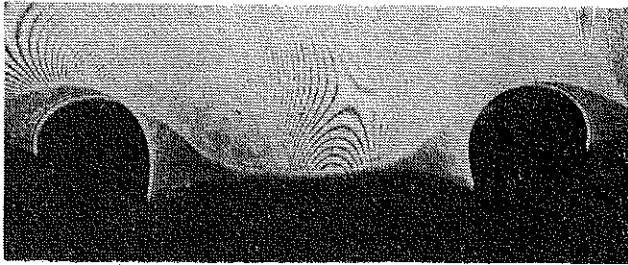
Oprócz kaustyk powstałych na krańcach obciążenia, sama odkształcona krawędź półpłaszczyzny tworzy pseudokaustykę:

$$(5.6) \quad W = \lambda_m + 4C\overline{\Phi'(z)},$$

przy czym krzywa początkowa ma postać

$$(5.7) \quad \zeta = x + iv(x),$$

gdzie  $v(x)$  oznacza przemieszczenie pionowe rozważanej krawędzi, której odkształcenie tworzy kaustykę. Wyrażenie (5.7) poprawne jest tylko dla normalnych obciążeń brzegowych i dlatego mamy tylko jedną składową przemieszczenia  $v(x)$ , normalną do krawędzi. Gdy do krawędzi półpłaszczyzny przyłożone są obciążenia ścinające wtedy występuje również przemieszczenie  $u(x)$  równoległe do krawędzi.



Rys. 38. Kaustyki doświadczalne dla przypadku z rys. 37

Rys. 37 przedstawia kaustyki teoretyczne powstałe na krańcach obciążenia o rozkładzie parabolicznym oraz odpowiednią pseudokaustykę powstałą wskutek odkształcenia krawędzi, a rys. 38 przedstawia kaustyki doświadczalne. Pseudokaustyki można wykorzystać do określenia rozkładu naprężeń wzdłuż krawędzi półpłaszczyzny. Opracowano do tego technikę obliczeniową, którą zastosowano z powodzeniem [41]. Jest to ważne w zagadnieniach kontaktowych, gdyż pozwala określić rozkład naprężeń wzdłuż stykających się powierzchni.

## 6. BADANIE OSOBLIWOŚCI NAPRĘŻEŃ W SWOBODNYCH WIERZCHOŁKACH WIELOKLIŃA [42, 43]

W nieobciążonym wierzchołku wielokłina pojawiają się na ogół osobliwości pola naprężeń zależne od kształtu i własności mechanicznych poszczególnych klinów składowych. Rodzaj i rząd tych osobliwości można badać metodą kaustyk. Najbardziej ogólne pole naprężeń w wierzchołku wielokłina opisane jest przez funkcję

$$\Phi_i(z) = K_i z_i^{-p},$$

gdzie  $K_i = |K_i| e^{i\alpha}$  oznacza współczynnik  $I.N.$ , a  $p = p_1 + ip_2$  jest rzędem osobliwości sprężystego pola naprężeń. Z wyrażenia tego, dla najczęstszego przypadku

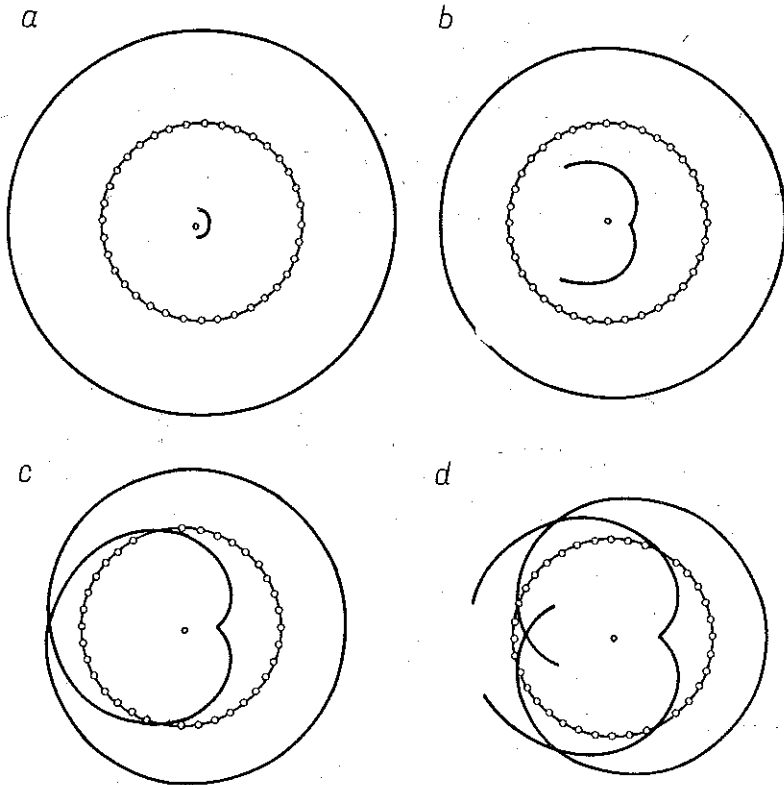
osobliwości rzeczywistej, gdy  $p_2=0$ ,  $p_1=p_2$ , mamy następujące parametryczne równania kaustyki:

$$(6.1) \quad \begin{aligned} X_i &= r_i \left\{ \cos \varphi_i \mp \frac{1}{p+1} \cos [(p+1) \varphi_i - \gamma_i] \right\}, \\ Y_i &= r_i \left\{ \sin \varphi_i \mp \frac{1}{p+1} \sin [(p+1) \varphi_i - \gamma_i] \right\} \end{aligned}$$

oraz krzywej początkowej

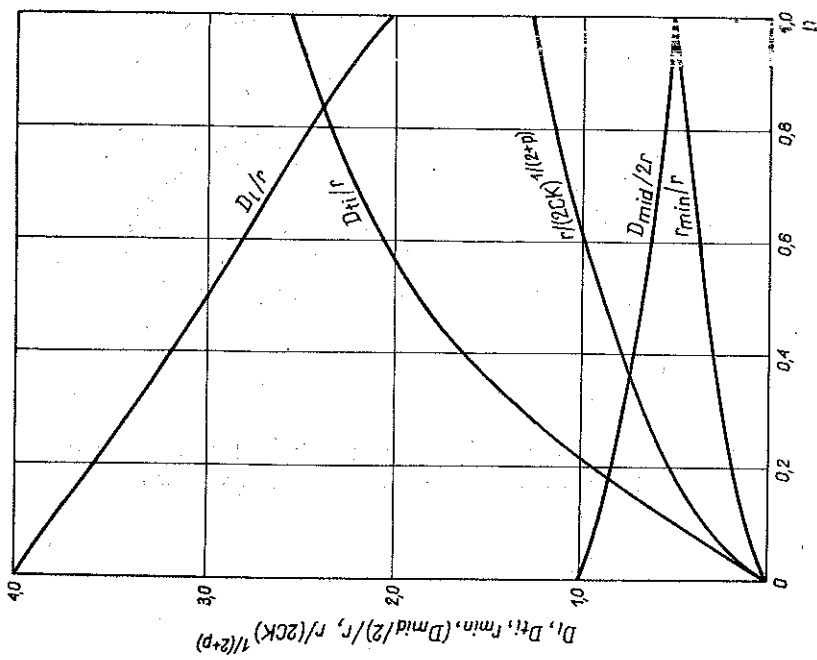
$$(6.2) \quad r_i = [4C_i K_i p (p+1) e^{p_2 \varphi_i}]^{1/(p+2)}.$$

We wzorach tych indeks  $i$  odnosi się do klina składowego o numerze  $i$ . W szczególności, gdy współczynnik  $K_i$  jest liczbą rzeczywistą, równania kaustyki otrzymujemy przyjmując w powyższych związkach  $\gamma_i=0$ .

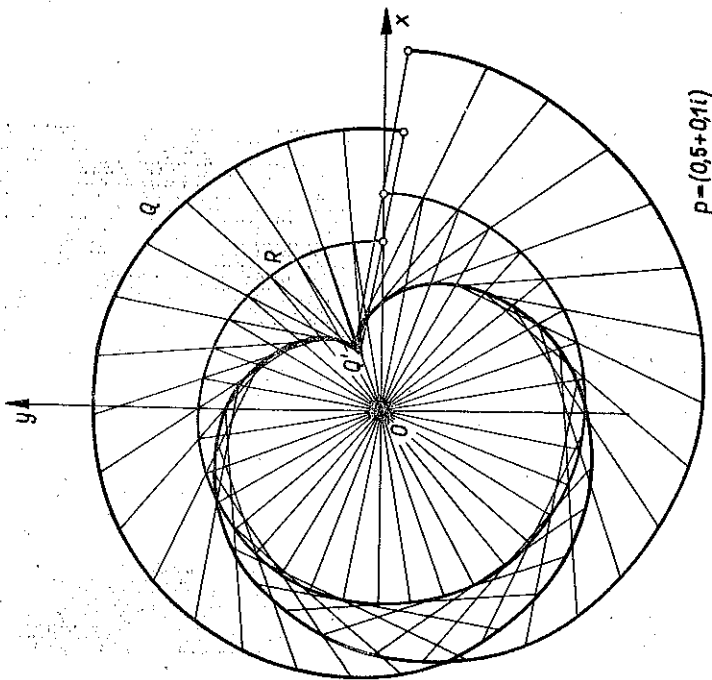


Rys. 39. Kaustyki i ich krzywe początkowe dla  $p=0,05; 0,25; 0,50; 0,80$ . Wszystkie kaustyki odpowiadają temu samemu promieniowi krzywej początkowej

Rys. 39 przedstawia kaustyki odpowiadające czterem różnym wartościom rzędu osobliwości  $p=0,05, 0,25, 0,50, 0,80$ . Widać, że ze wzrostem  $p$  rozmiary kaustyki maleją. Zależność wszystkich charakterystycznych elementów kaustyk od rzędu osobliwości  $p$  przedstawiona jest na rys. 40. Rys. 41 przedstawia kaustykę oraz jej

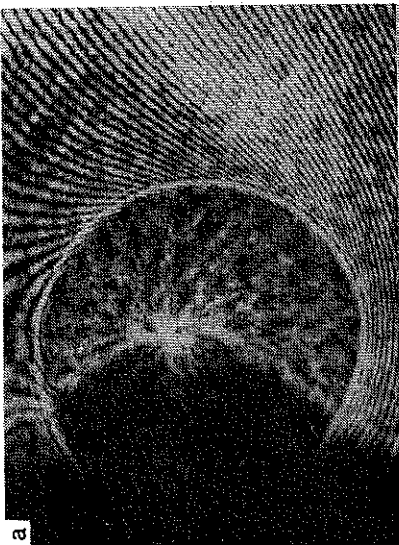


Rys. 40. Charakterystyczne wymiary kaustyki w funkcji rzędu osoblowości  $p$  sprężystego pola naprężeń,  $0 < p < 1$

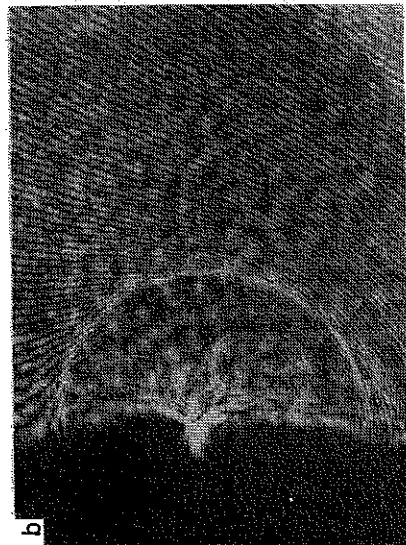


Rys. 41. Konstrukcja geometryczna kaustyki dla zespolonego rzędu osoblowości pola naprężeń,  $p = 0.5 + 0.1i$



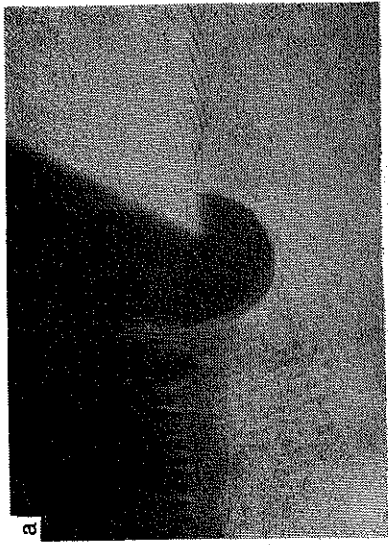


a

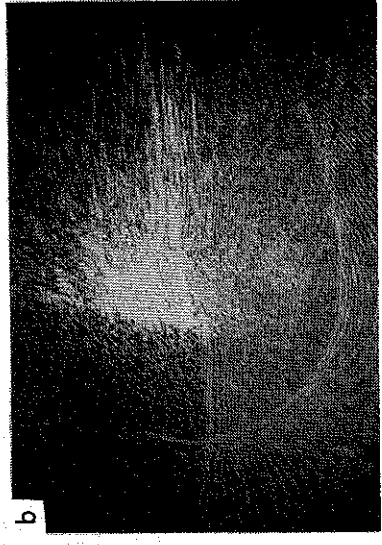


b

Rys. 42. Kaustyki w wierzchołkach pojedynczych klinów o kątach  $\beta = 260^\circ$  (a) i  $\beta = 210^\circ$  (b)

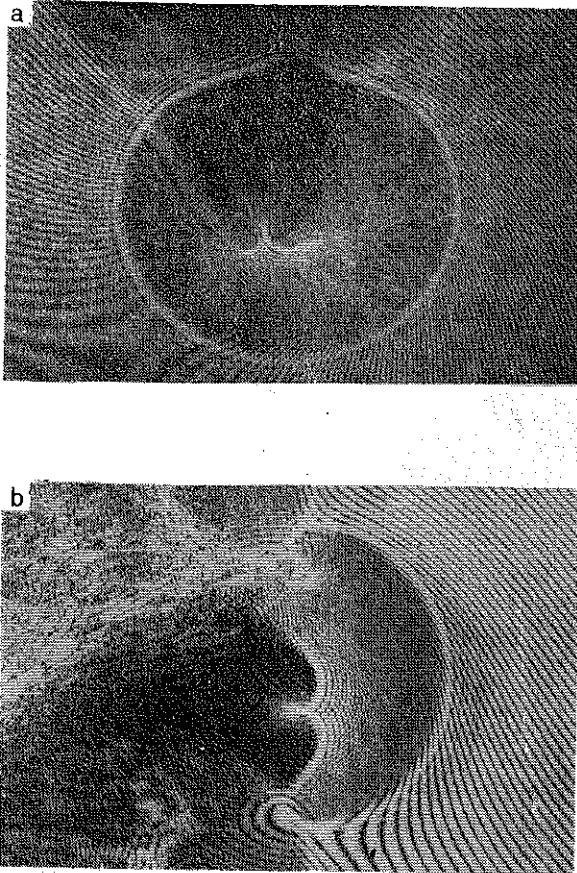


a



b

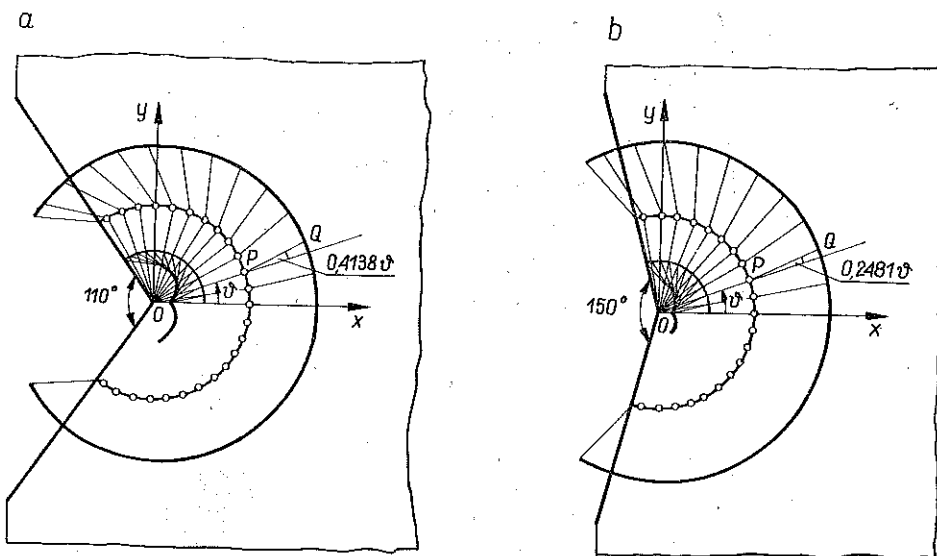
Rys. 43. Kaustyki w wierzchołkach dwuklinów złożonych z półpłaszczyzny z PMMA i wycinka stalowego o kącie  $\vartheta_1 = 120^\circ$  (a) i  $\vartheta_1 = 90^\circ$  (b)



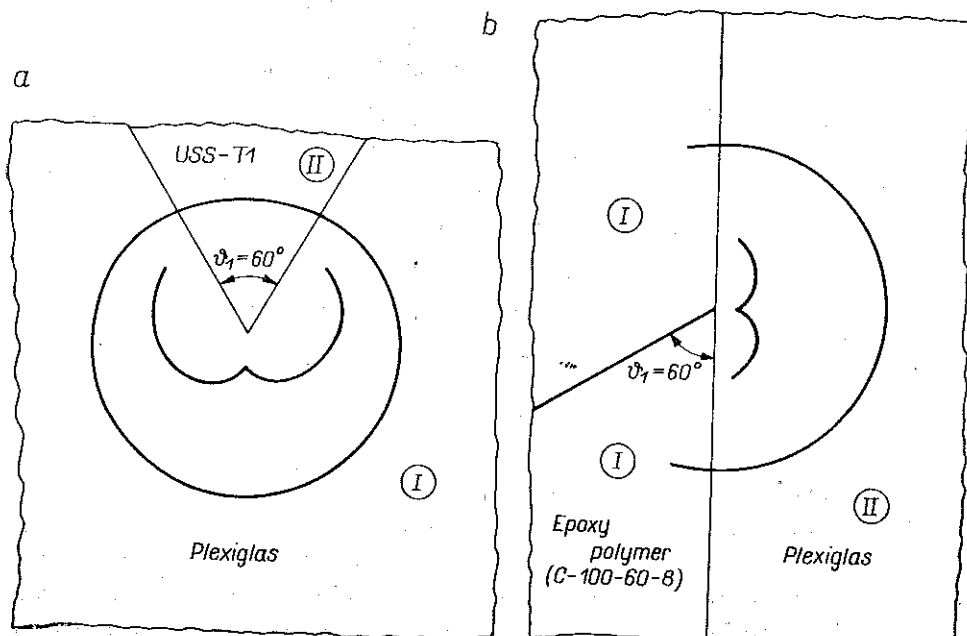
Rys. 44. a) Kaustyki w wierzchołkach dwuklina, którego faza I jest ze stali, a faza II z PMMA,  $\vartheta_1=60^\circ$ ; b) Kaustyka w wierzchołku skośnego pęknięcia tworzącego kąt  $\vartheta_1=60^\circ$  z linią skokowej niejednorodności płaszczyzny złożonej z dwu półpłaszczyzn, z których jedna jest wykonana z uplastycznionej żywicy epoksydowej, a druga z PMMA. Pęknięcie jest utworzone w epoksydowej części ośrodka

konstrukcję geometryczną dla  $p$  zespolonego,  $p=0,5+0,1i$ , i rzeczywistego  $K$ . Z rysunku tego widać, że dla zespolonego  $p$  kaustyka zmienia swój kształt i pojawia się nieciągłość między jej brzegami. Na rys. 42—44 widoczne są kaustyki doświadczalne powstałe w wierzchołkach prostych klinów oraz dwuklinów, zaś na rys. 45—46 odpowiednie kształty krzywych teoretycznych. Widoczna jest dobra zgodność obu grup rysunków.

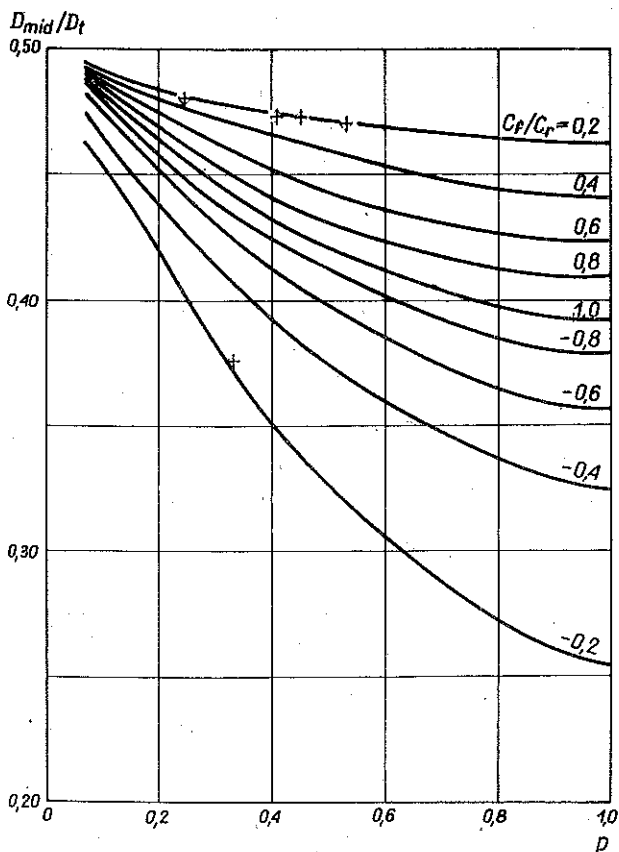
Do wyznaczenia rzędu osobliwości, panującego w wierzchołku wieloklina z kaustyk otrzymanych doświadczalnie, możemy skorzystać z wykresów (rys. 47). Przedstawiają one zależność stosunku  $D_{mid}/D_t$  jako funkcji rzędu osobliwości pola naprężeń dla różnych wartości stosunku  $C_f/C_r$ . Przy tym  $D_{mid}$  oznacza odległość wzdłuż osi symetrii kaustyki między punktami, które leżą w maksymalnej i minimalnej odległości od wierzchołka wieloklina, a  $D_t$  oznacza poprzeczną średnicę kaustyki.



Rys. 45. Kaustyki i ich konstrukcje geometryczne odpowiadające przypadkom z rys. 42



Rys. 46. Teoretycznie obliczone kaustyki odpowiadające przypadkom z rys. 44



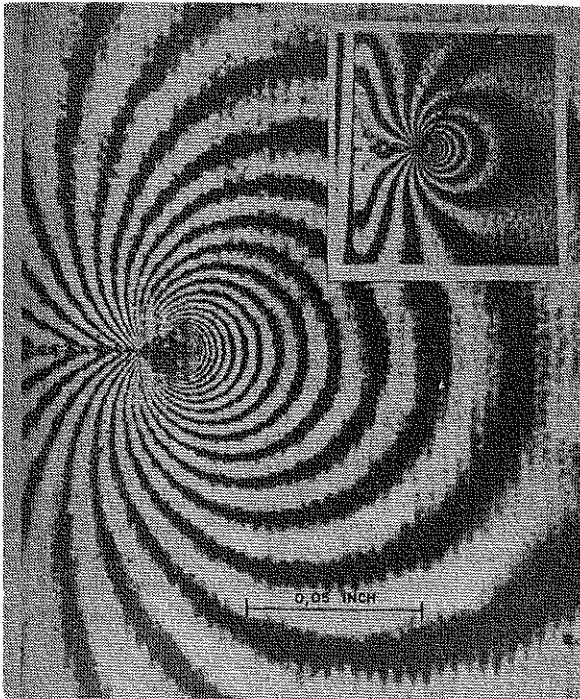
Rys. 47. Zmiana stosunku  $D_{mid}/D_t$  w funkcji rzędu osobliwości  $p$  dla różnych wartości stosunku stałych optycznych  $C_f$  i  $C_r$ , odpowiadających odbiciu od przedniej i tylnej ścianki płyty. Znak "plus" stosunku  $C_f/C_r$  odpowiada polu rozciągającemu w wierzchołku i rzeczywistemu obrazowi kaustyk, zaś znak "minus" — polu ściskającemu i obrazom urojonym.  $D_{mid}$  jest odległością wzdłuż osi symetrii kaustyki między jej maksimum i minimum, zaś  $D$  jest średnicą kaustyki poprzeczną do jej osi

Stałe optyczne  $C_f$  i  $C_r$  wiążą się z promieniami świetlnymi odbitymi od przedniej ( $C_f$ ) oraz tylnej ( $C_r$ ) ścianki próbki. Dokładne wyznaczenie tego stosunku dla wierzchołka wielokłina jest istotne w celu określenia rzędu i rodzaju panującej w nim osobliwości.

## 7. Dyskusja

Powyżej nakreślono ogólne zasady metody kaustyk oraz podano szereg przykładów jej zastosowań do analizy dwuwymiarowych sprężystych pól naprężeń. Wykazano, że metoda nadaje się szczególnie do analizy pól osobliwych. Przy badaniu takich pól klasycznymi metodami doświadczalnej analizy naprężeń konieczna jest ekstrapolacja wyników możliwie blisko punktu osobliwego, co nie daje jednak żadnej dokładności.

Na przykład rozważmy pokazany na rys. 48 obraz interferencyjny otoczenia wierzchołka pęknięcia w płycie z plexiglasu, otrzymany przez DUDDERARA i O'REGANA [44] metodą holograficzną. W najbliższym otoczeniu wierzchołka pęknięcia widoczny jest ciemny obszar o łagodnej granicy. Zjawisko to autorzy przypisywali różnym przyczynom. Stwierdzali oni, że w otoczeniu wierzchołka szczeliny pojawia się siatka drobnych rys, które czynią niemożliwy jakikolwiek pomiar. Jeśli jednak przyjrzeć się wnikliwie interferogramowi bliskiego pola, ujrzymy w jego części środkowej epicykloidę znaną z naszej metody kaustyk, utworzoną przez promienie odbite od przedniej powierzchni próbki. Prawdopodobnym wytłumaczeniem pojawienia się tej części kaustyki jest zogniskowanie aparatu fotograficznego nieco poza powierzchnią próbki [45].



Rys. 48. Interferogramy bliskiego i dalszego pola w otoczeniu pęknięcia próbki wykonanej z PMMA pochodzącego z pracy T. D. DUDDERARA (Experimental Mechanics, 11, p. 51, 1971)

Powyższe spostrzeżenie ma duże znaczenie przy porównywaniu obu metod. Metoda kaustyk powiększa silnie mały obszar otaczający punkt osobliwy, dzięki czemu możemy określić zarówno rząd osobliwości jak i współczynnik intensywności naprężeń panujących w tym obszarze. Natomiast w metodach interferometrycznych uważa się, iż «w obszarze otaczającym osobliwość wyniki pomiarów przestają być sensowne» [44, s. 51]. Takie porównanie obu metod w pełni wykazuje możliwości i wyższość metody kaustyk nad innymi metodami doświadczalnymi przy badaniu osobliwych pól naprężeń.

## REFERENCES

1. P. S. THEOCARIS and E. E. GDOUTOS, *Surface topography by the method of caustics*, Applied Optics, **15**, 6, pp. 1629-1638, 1976.
2. P. S. THEOCARIS and E. E. GDOUTOS, *An interferometric method for the direct evaluation of principal stresses in plane-stress fields*, J. Physic, Ser. D, **7**, pp. 472-482, 1974.
3. P. S. THEOCARIS, *Dependence of the stress-optical coefficients on the mechanical and optical properties of polymers*, J. Strain Analysis, **8**, 4, pp. 267-276, 1973.
4. P. S. THEOCARIS, *The reflected shadow method for the study of constrained zones in cracked plates*, Applied Optics, **10**, pp. 2240-2247, 1971.
5. N. I. MUSKHELISHVILI, *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Sec. Ed. Noordhoff 1963.
6. M. BORN and E. WOLF, *Principles of optics*, Pergamon Press, Oxford 1970.
7. E. G. COKER and L. N. G. FILON, *A treatise on photoelasticity*, Cambridge at the University Press.
8. P. S. THEOCARIS, *Local yielding around a crack-tip in plexiglas*, J. Appl. Mech., Trans. ASME, Ser. E, **37**, 2, pp. 409-415, 1970.
9. P. S. THEOCARIS, *Constrained zones in cracked plates by the method of caustics*, Proc. Nat. Acad. Athens, **46**, pp. 116-130, 1971.
10. P. S. THEOCARIS, *Interaction of cracks with other cracks or boundaries*, Materialprüfung, **13**, 8, pp. 264-269, 1971.
11. P. S. THEOCARIS, *New methods based on geometric optics for the solution of fracture mechanics problems*, Technical Annals, **41**, 3/549, pp. 145-153, 1972.
12. P. S. THEOCARIS and E. E. GDOUTOS, *An optical method for determining opening-mode and edge-sliding mode stress intensity factors*, J. Appl. Mech., **39**, 1, pp. 91-97.
13. P. S. THEOCARIS, *A new technique for viewing deformation zones at crack-tips*, by D. Hoepfner, V. Danford and D. E. Pettit, Exp. Mech., **11**, 6, pp. 280-283, 1971 discussion by P. S. Theocaris, Exp. Mech., **12**, 5, pp. 247-249, 1972.
14. P. S. THEOCARIS and N. IOAKIMIDIS, *Some properties of generalized epicycloids applied to fracture mechanics*, Zeitsch. ang. Math. and Phys., **22**, 5, pp. 876-890, 1971.
15. P. S. THEOCARIS, *An optical method for the determination of constrained zones at crack-tips*, Proc. Intern. Symposium of Exp. Mech., Waterloo, Canada, June 1972, pp. 511-530, 1972.
16. *Fracture toughness testing and its applications*, ASTM Special Technical Publication 381.
17. P. S. THEOCARIS, *The method of caustics for the study of cracked plates made of viscoelastic materials*, Proc. 3rd Intern. Conf. Fracture, München, Germany, **VII**, 512, 1973.
18. P. S. THEOCARIS, *The method of caustics for the study of cracked plates made of viscoelastic materials*, Int. J. Mech. Sci., **16**, pp. 855-865, 1974.
19. P. S. THEOCARIS, *The reflected-shadow method for the study of constrained zones in cracked birefringent media*, J. Strain Anal., **7**, 2, pp. 75-83, 1972.
20. P. S. THEOCARIS, *Interaction between collinear asymmetric cracks*, J. Strain Anal., **7**, 7, 3, pp. 186-193, 1972.
21. P. S. THEOCARIS, *Constrained zones in a periodic array of collinear equal cracks*, Int. J. Mech. Sci., **14**, 2, pp. 79-94, 1972.
22. P. S. THEOCARIS, *A theoretical consideration of the constrained zones in an array of interacting collinear and asymmetric cracks*, Acta Mechanica, **17**, 3-4, pp. 169-189, 1973.
23. P. S. THEOCARIS, *Complex stress-intensity factors at bifurcated cracks*, J. Mech. Phys. Solids, **20**, pp. 265-279, 1972.
24. P. S. THEOCARIS and C. BLONTZOU, *Symmetric branching of cracks in plexiglas*, Materialprüfung, **15**, 4, pp. 123-130, 1973.
25. P. S. THEOCARIS, *Asymmetric branching of cracks*, J. Appl. Mech., 1977.
26. P. S. THEOCARIS and N. IOAKIMIDIS, *The symmetrically branched crack in an infinite elastic medium*, ZAMP, 1977.

27. P. S. THEOCARIS and N. IOAKIMIDIS, *Numerical integration methods for the solution of singular integral equations*, Quart. Appl. Math., 1977.
28. P. S. THEOCARIS, *Stress intensity factors of stationary cracks in cylindrical shells under internal pressure*, Proc. First Intern. Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, (Paper G6/7, Berlin, 1972) 4, G, pp. 487-505, 1972.
29. P. S. THEOCARIS and C. THIREOS, *Stress intensity factors in cracked cylindrical shells under tension*, J. of Fracture, 12, 1976.
30. P. S. THEOCARIS, *Stress intensity factors in yielding materials by the method of caustics*, Intern. J. Fract. Mech., 9, 2, pp. 185-197, 1973.
31. P. S. THEOCARIS and E. E. GDOUTOS, *Verification of the validity of the Dugdale-Barenblatt model by the method of caustics*, Engin. Fracture Mechanics, 6, 3, pp. 523-535, 1974.
32. P. S. THEOCARIS and E. E. GDOUTOS, *The modified Dugdale-Barenblatt model adapted to various fracture configuration in metals*, Intern. J. Fract. Mech., 10, 4, pp. 549-664, 1974.
33. P. S. THEOCARIS, *Ductile fracture in glass polymers*, Int. J. Mechanical Sciences, 17, pp. 475-485, 1975.
34. F. KATSAMANIS, D. RAFTOPOULOS and P. S. THEOCARIS, *Static and dynamic stress intensity factors by the method of transmitted caustics*, J. of Eng. Mat. and Tech, 1977.
35. D. RAFTOPOULOS, F. KATSAMANIS and P. S. THEOCARIS, *Stress intensity factors at statically dynamically loaded tension specimens*.
36. P. S. THEOCARIS and F. KATSAMANIS, *Response of cracks to impact by caustics*, Engin. Fract. Mech., 1977.
37. P. S. THEOCARIS, *Determination of crack-opening displacement by the method of caustics*, J. Strain Analysis, 9, 3, pp. 197-205, 1974.
38. P. S. THEOCARIS, *An optical stress-rossette based on caustics*, Applied Optics, 12, 2, pp. 380-387, 1973.
39. P. S. THEOCARIS, *Stress singularities at concentrated loads*, Proc. 3rd Intern. Congress on Exp. Stress Analysis and Experimental Mechanics, 13, 12, pp. 511-518, 1973.
40. P. S. THEOCARIS, *Stress singularities due to uniformly distributed loads along straight boundaries*, Intern. J. Solids and Structures, 9, 5, pp. 655-670, 1973.
41. P. S. THEOCARIS and C. RAZEM, *Determination of arbitrarily distributed loads by the method of caustics*, J. Strain Analysis, 1977.
42. P. S. THEOCARIS, *Stress and displacement singularities near corners*, J. of Appl. Math. and Physics, 26, pp. 77-98, 1975.
43. P. S. THEOCARIS, *Partly unbounded interfaces between dissimilar materials under normal and shear loading*, Acta Mechanica, 24, pp. 99-115, 1976.
44. T. D. DUDDERAR and R. O'REGAN, *Measurement of the strain field near a crack tip in polymethylmethacrylate by holographic interferometry*, Experimental Mechanics, 11, 2, pp. 49-56, 1971.
45. P. S. THEOCARIS, *The determination of mode I stress-intensity factors by holographic interferometry*, Further comments on a discussion by Founney (Exp. Mech., 14, pp. 69-70, 1974) on a paper by Dudderar and O'Regan (Exp. Mechanics, 13, 4, pp. 145-149, 1973), Exp. Mech., 15, 4, pp. 150-152, 1975.

Резюме

МЕТОД КАУСТИК — НОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ НАПРЯЖЕНИЯ

В работе описаны основы нового метода, называемого методом каустик, служащего для анализа особенных полей напряжений. Приведены тоже примеры применений. В этом методе луч света падает на поверхность образца в окрестности особенности поля напряжений. Проходящие или отраженные световые лучи, вследствие быстрых изменений толщины

пластинки и изменений коэффициента преломления, подлежат рассеянию. После проекции на соответствующий экран лучи фокусируются вдоль некоторой особенной кривой. Эта кривая, называемая каустикой, содержит существенные информации об особенностях поля напряжений. Таким образом особенность поля напряжений будет преобразована в отличительную особенность, которая может быть исследована на экране. Измерение геометрических параметров каустики позволяет определить параметры особенного поля напряжений. Дается ряд применений метода к решению задач насающихся: 1) трещин, 2) сосредоточенных и распределенных нагрузок, 3) особенности в вершинах композитов (многоугольников). Полученные вышеупомянутым образом, экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическим анализом.

#### SUMMARY

### THE METHOD OF CAUSTICS — A POWERFUL EXPERIMENTAL METHOD FOR THE STUDY OF SINGULAR STRESS FIELDS

The general principles and a series of applications of a new method, called the method of caustics, for analysing anomalous stress fields were described. According to this method a light beam impinges on the surface of the specimen at the vicinity of the anomalous stress field. The transmitted or the reflected light rays, due to the steep thickness and refractive index variations, are scattered and when they are projected on a reference screen they are concentrated along a singular curve, which is highly illuminated. This curve, called the caustic, contains important information gathered at the close vicinity of the anomalous stress field. In this manner, the existing stress singularity is transformed into an optical singularity, which is precisely determined on the screen. By making measurements of the geometrical elements of the caustic the characteristic parameters of the singular stress field can be easily determined. A series of applications of the method for the solution of problems related i) to cracks ii) to concentrated or distributed loads and ii) to singular stress fields at a multi-wedge apex, were given. Comparison of theory with the experiments gave a good agreement between the respective results.

POLITECHNIKA PAŃSTWOWA, ATENY, GRECJA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 11 lutego 1977.*