ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 26, 1, 51—64, 1978
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O REKURENCYJNOŚCI WIDM CZĘSTOŚCI DRGAŃ WŁASNYCH CZĘŚĆ I

BOGDAN OLSZOWSKI (KRAKÓW) (*)

Praca dotyczy podstawowej zależności rekurencyjnej zachodzącej między częstościami własnymi i postaciami drgań własnych dwóch dyskretnych układów mechanicznych różniących się między sobą działaniem więzów kinematycznych. Rozważania są bezpośrednio związane z koncepcją metody przemieszczeń nakładania więzów a następnie ich uwalniania. Celem pracy jest usystematyzowanie podejścia do zagadnień modyfikacji widm częstości własnych w mechanice konstrukcji.

1. Wstęp

Celem pracy jest omówienie podstawowych problemów jakościowej analizy widm częstości drgań własnych, związanych z zastosowaniami metody przemieszczeń w dynamice konstrukcji. Zasadniczym tematem pracy są zależności rekurencyjne tych widm, mające bezpośredni związek z koncepcją nakładania a następnie kolejnego usuwania odpowiednich więzów kinematycznych. Koncepcja ta sprowadza się do generowania, dla danego układu mechanicznego, określonego ciągu układów pomocniczych o wzrastającej liczbie stopni swobody. W konsekwencji, widmo częstości drgań własnych danego układu, analizowanego za pomocą metody przemieszczeń, otrzymuje się nie bezpośrednio, lecz jako wynik szeregu przekształceń kolejnych widm układów pomocniczych. Badania własności tych przekształceń, na przykład z punktu widzenia ich wpływu na efektywność określonych metod numerycznych stosowanych przy obliczaniu częstości własnych, mają znaczenie podstawowe zarówno z teoretycznego, jak i praktycznego punktu widzenia. Badania takie wykraczają jednak poza ramy obecnej pracy.

Praca z założenia zawiera wiele informacji, które można odnaleźć w cytowanej literaturze. Zestawienie tych informacji wydaje się autorowi celowe po pierwsze dlatego, że są one w większości przypadków rozproszone po różnych monografiach i czasopismach zagranicznych, po drugie zaś dlatego, że jak dotąd brak jest jakichkolwiek publikacji krajowych poruszających omawiany temat.

Dążeniem autora było, aby tak zaplanowana praca nie miała jedynie tylko charakteru przeglądowego. Dlatego też znalazły się w niej również pewne oryginalne ujęcia i interpretacje mające na celu stworzenie, na ile to było możliwe, pełnego i jasnego obrazu wszystkich zależności rekurencyjnych. Do oryginalnych

(*) Praca wykonana w ramach problemu węzłowego 05.12 „Wytrzymałość i optymalizacja konstrukcji maszynowych i budowlanych", koordynowanego przez Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN.

przyczynków autora można zaliczyć wprowadzone przez niego po raz pierwszy pojęcia i interpretacje częstości powtórnych, istotnie i pozornie nowych oraz znikających. W drugiej części pracy oryginalnymi są diagramy widmowe pokazane na rysunkach 1, 2, 3, 12, 14d i 19 oraz pewne interpretacje rekurencyjnych zależności pomiędzy częstościami i formami drgań własnych. Rozważania ilustrowane są odpowiednio dobranymi przykładami.

2. Wprowadzenie

Przedmiotem rozważań będą drgania własne liniowych układów mechanicznych o skończonej liczbie stopni swobody.

Liczbą stopni swobody układu nazwiemy liczbę n liniowo niezależnych zmiennych kinematycznych u_i, $i=1, 2, \dots, n$, niezbędnych dla jednoznacznego określenia stanu przemieszczenia tego układu. Zmienne u_i będziemy nazywać stopniami swobody i traktować je jako współrzędne wektora przemieszczenia $u=(u_1, u_2, \dots, u_n)^T$.

Każdy układ występujący w dalszych rozważaniach jest odpowiednim modelem matematycznym pewnego rzeczywistego obiektu mechanicznego, analizowanego na gruncie metody przemieszczeń. Dla układu o n stopniach swobody wprowadzimy oznaczenie S_n.

Układem podstawowym S_n^0 nazwiemy układ powstały z S_n przez takie unieruchomienie wszystkich więzów kinematycznych, że $u_i=0$, $i=1, 2, \dots, n$. Kolejne zwalnianie (usuwanie) tych więzów, w porządku wyznaczonym ich rosnącą numeracją, pozwala utworzyć ciąg $(S_n^1, S_n^2, \dots, S_n^{n-1})$, tzw. układów pośrednich takich, że układ S_n^k, $0<k<n$ jest określony jednoznacznie warunkami $u_i=0$, $i=k+1, k+2, \dots, n$. Z określenia tego wynika, że układ S_n^k ma k stopni swobody.

Drgania własne układu S_n są opisane kanonicznym układem równań metody przemieszczeń o postaci macierzowej

$$(K-\lambda M)u=0, \quad \lambda=\omega^2. \tag{2.1}$$

Macierz $K-\lambda M$ nazywana jest macierzą sztywności dynamicznej [1 i 18]. W (2.1) przez K i M oznaczono $n\times n$ wymiarowe, symetryczne i dodatnio określone macierze sztywności i bezwładności układu S_n, a przez ω — częstość kołową jego drgań własnych. W dalszym ciągu parametr $\lambda=\omega^2$ będziemy umownie nazywali częstością.

Częstością własną układu S_n nazwiemy każdą, taką wartość parametru λ, dla której równanie (2.1) ma niezerowe rozwiązanie u. Oznaczmy przez λ_i, $i=1, 2, \dots, n$ wszystkie częstości własne układu S_n, a przez u^i, $i=1, 2, \dots, n$ odpowiadające tym częstościom jego formy drgań własnych.

Rozważmy przypadek ogólny, kiedy niektóre z częstości własnych λ_i mogą być wielokrotne i dlatego $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant, \dots, \leqslant \lambda_n$. Jeżeli układ S_n ma $l \leqslant n$ różnych częstości własnych μ_i, $i=1, 2, \dots, l$ o odpowiednich krotnościach m_i, $i=1, 2, \dots, l$, to wtedy $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_l$ i $\sum\limits_{h=1}^{l} m_h = n$. W tym przypadku mamy

$$\mu_i=\lambda_{n_{i-1}+1}=\lambda_{n_{i-1}+2}=\dots=\lambda_{n_i-1}=\lambda_{n_i}, \quad i=1, 2, \dots, l, \tag{2.2}$$

gdzie $n_i=\sum\limits_{h=1}^{i} m_h$ [5].

Ciąg występujących w (2.2) numerów (indeksów) częstości λ_j takich, że $\mu_i=\lambda_j$, oznaczymy przez

$$Z_i=(n_{i-1}+1,\, n_{i-1}+2,\, ...,\, n_i-1,\, n_i). \tag{2.3}$$

Zamiast (2.2) możemy teraz napisać $\mu_i=\lambda_j$, $j\in Z_i$, $i=1, 2, ..., l$.

Ciąg $\mu=(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_l)$, $l\leqslant n$ nazwiemy widmem częstości drgań własnych układu S_n. Poszczególne częstości μ_i, $i=1, 2, ..., l$ mogą być interpretowane jako elementy widma μ. Widmo układu S_n^k oznaczymy przez $\mu^k=(\mu_1^k, \mu_2^k, ..., \mu_g^k)$, $g\leqslant k$.

Każdej m_i-krotnej częstości własnej λ_i odpowiada m_i liniowo niezależnych form drgań własnych u^i, $i=1, 2, ..., m_i$. Podprzestrzeń $R^{m_i}\subset R^n$ rozpiętą na tych formach (wektorach) będziemy nazywać podprzestrzenią własną $H(\lambda_i)$ odpowiadającą częstości λ_i. W przypadku, gdy dla pewnego λ_i jest $m_i=1$, podprzestrzeń własną określa jedna forma własna u^i. Wymiar podprzestrzeni własnej $H(\lambda_i)$ jest zawsze równy krotności m_i częstości λ_i, tzn. $\dim H(\lambda_i)=m_i$.

Dla uogólnienia rozważań umówimy się nazywać częstością własną o zerowej krotności każdą częstość λ taką, że $\lambda\neq\lambda_i$, $i=1, 2, ..., n$. Częstości λ, która nie jest żadną z częstości własnych λ_i, $i=1, 2, ..., n$, odpowiada zgodnie z powyższym podprzestrzeń własna o zerowym wymiarze. Dzięki temu uogólnieniu możemy wprowadzić jedno oznaczenie $H(\lambda)$ dla podprzestrzeni własnej odpowiadającej dowolnej częstości λ oraz jej ogólną definicję

$$H(\lambda)=\{u\neq 0\colon (K-\lambda M)u=0\}. \tag{2.4}$$

Rozważmy dwie dowolne formy drgań własnych $u^r\in H(\mu_i)$ i $u^s\in H(\mu_j)$ odpowiadające różnym częstościom własnym $\mu_i\neq\mu_j$. Zgodnie z określeniem (2.4) mamy

$$(K-\mu_i M)u^r\equiv 0, \qquad (K-\mu_j M)u^s\equiv 0,$$

skąd

$$Ku^r\equiv\mu_i Mu^r, \qquad Ku^s\equiv\mu_j Mu^s,$$

$$(u^s)^T Ku^r\equiv\mu_i (u^s)^T Mu^r, \qquad (u^r)^T Ku^s\equiv\mu_j (u^r)^T Mu^s. \tag{2.5}$$

Ponieważ ze względu na symetrię macierzy K i M mamy $K=K^T$ i $M=M^T$, przeto $(u^s)^T Ku^r\equiv(u^r)^T K u^s$ i $(u^s)^T Mu^r\equiv(u^r)^T Mu^s$. Odejmując stronami tożsamości (2.5) otrzymujemy

$$(\mu_i-\mu_j)(u^r)^T Mu^s\equiv 0,$$

skąd, wobec tego że $\mu_i\neq\mu_j$, wynika

$$(u^r)^T Mu^s\equiv 0 \quad \text{i} \quad (u^r)^T Ku^s\equiv 0. \tag{2.6}$$

Na podstawie (2.6) stwierdzamy, że rozważane formy u^r i u^s drgań własnych są wzajemnie M-ortogonalne i równocześnie K-ortogonalne. Ponieważ jednak formy te były przyjęte dowolnie, ale tak że $u^r\in H(\mu_i)$, $u^s\in H(\mu_j)$, $\mu_i\neq\mu_j$, przeto wszystkie podprzestrzenie własne $H(\mu_i)$, $i=1, 2, ..., l$ są parami wzajemnie K- i M-ortogonalne.

W dalszym ciągu rozważań będziemy się posługiwać równaniem (2.1) przekształconym do tzw. postaci standardowej

$$(A-\lambda I)v=0, \tag{2.7}$$

gdzie I jest macierzą jednostkową. Przekształcenie polega na rozkładzie macierzy M na czynniki trójkątne $M=C^T C$ metodą Choleskiego [11]. Dzięki temu otrzymujemy

$$(K-\lambda M)u=(K-\lambda C^T C)u=(KC^{-1}-\lambda C^T)Cu=0.$$

Mnożąc lewostronnie przez C^{-T} i wprowadzając oznaczenia

$$v=Cu, \quad A=C^{-T}KC, \tag{2.8}$$

otrzymujemy (2.7).

Przy posługiwaniu się standardową postacią (2.7) równania drgań własnych układu S_n podprzestrzeń własną odpowiadającą dowolnej częstości λ zdefiniujemy w sposób następujący:

$$G(\lambda)=\{v\neq 0: (A-\lambda I)v=0\}. \tag{2.9}$$

Dla dwóch dowolnych wektorów $v^r\in G(\mu_i)$, $v^s\in G(\mu_j)$, $i\neq j$ otrzymujemy zgodnie z (2.9) następujące tożsamości:

$$(A-\mu_i I)v^r\equiv 0, \quad (A-\mu_j I)v^s\equiv 0,$$

$$Av^r\equiv\mu_i v^r, \quad Av^s\equiv\mu_j v^s,$$

$$(v^s)^T Av^r\equiv\mu_i (v^s)^T v^r, \quad (v^r)^T Av^s\equiv\mu_j (v^r)^T v^s.$$

Ponieważ $(v^s)^T Av^r\equiv(v^r)^T Av^s$ i $(v^s)^T v^r\equiv(v^r)^T v^s$, więc

$$(\mu_i-\mu_j)(v^r)^T v^s\equiv 0,$$

skąd po uwzględnieniu, że $\mu_i\neq\mu_j$

$$(v^r)^T v^s\equiv 0, \quad (v^r)^T Av^s\equiv 0. \tag{2.10}$$

Wobec dowolności wyboru wektorów $v^r\in G(\mu_i)$ i $v^s\in G(\mu_j)$, $\mu_i\neq\mu_j$ z (2.10) wynika, że wszystkie podprzestrzenie własne $G(\mu_i)$, $i=1, 2, ..., l$ są parami wzajemnie ortonormalne (tzn. I-ortogonalne) [5].

Oznaczmy przez V_i macierz o rozmiarach $n\times m_i$, której kolumny są wzajemnie ortogonalnymi i unormowanymi wektorami własnymi $v^j\in G(\mu_i)$, $j=1, 2, ..., m_i$ takimi, że $(v^s)^T v^s=\delta_{rs}$. Macierz $V=(V_1, V_2, ..., V_l)$ o rozmiarach $n\times n$ będziemy nazywać macierzą własną macierzy A.

Za pomocą transformacji

$$v=Vw \tag{2.11}$$

możemy przekształcić (2.7) do najprostszej postaci

$$(\Lambda-\lambda I)w=0, \tag{2.12}$$

gdzie $\Lambda=V^T AV=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ jest macierzą diagonalną.

3. Rekurencyjne równanie częstości

Załóżmy, że dla układu S_n^{k-1} znane jest rozwiązanie problemu własnego

$$(A_{k-1}-\lambda I)v_{k-1}=0 \tag{3.1}$$

i spróbujmy na tej podstawie [2 i 13] rozwiązać problem własny

$$(A_k-\lambda I)v_k=0 \tag{3.2}$$

dla układu S_n^k. Obydwa problemy przedstawiono w postaci standardowej i przy użyciu oznaczeń A_l, v_l odpowiednio dla macierzy o rozmiarach $l\times l$ i $l\times 1$.

Napiszmy (3.2) w postaci rekurencyjnej

$$\begin{pmatrix} A_{k-1}-\lambda I & b_{k-1} \\ b_{k-1}^T & a_{kk}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v \end{pmatrix}=0, \tag{3.3}$$

gdzie $b_{k-1}^T=(a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{k,k-1})$ i zastosujmy ortonormalną transformację zmiennych

$$\begin{pmatrix} v_{k-1} \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V_{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

gdzie V_{k-1} jest unormowaną macierzą własną problemu (3.1). Po podstawieniu (3.4) do (3.3) i lewostronnym pomnożeniu przez transponowaną macierz transformacji otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} \Lambda_{k-1}-\lambda I & b_k \\ b_k^T & a_{kk}-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix}=0, \tag{3.5}$$

gdzie $\Lambda_{k-1}=\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{k-1})=V_{k-1}^T A_{k-1} V_{k-1}$, $b_k^T=b_{k-1}^T V_{k-1}$.

Przekształcając i przyrównując do zera wyznacznik macierzy układu równań (3.5), otrzymujemy poszukiwane równanie rekurencyjne:

$$\det\begin{pmatrix} \Lambda_{k-1}-\lambda I & b_k \\ b_k^T & a_{kk}-\lambda \end{pmatrix}=(a_{kk}-\lambda)\prod_{i=1}^{k-1}(\lambda_i-\lambda)-\sum_{i=1}^{k-1}b_{ik}^2\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k-1}(\lambda_j-\lambda)=0, \tag{3.6}$$

określające częstości własne λ układu S_n^k na podstawie obliczonych w poprzednim kroku częstości własnych λ_i, $i=1, 2, ..., k-1$, układu S_n^{k-1}.

Rozważmy przypadek ogólny, gdy w widmie układu S_n^{k-1} występuje l różnych częstości własnych $\mu_1<\mu_2<, ..., <\mu_l$, $l\leqslant k-1$ o odpowiednich krotnościach $m_i\geqslant 1$, $i=1, 2, ..., l$. Równaniu (3.6) można wtedy nadać inną, ogólniejszą postać, wyłączając przed nawias największy, wspólny podzielnik $w_1^k(\lambda)$ wszystkich składników:

$$w_1^k(\lambda)\, w_2^k(\lambda)=0, \tag{3.7}$$

przy czym [13]

$$w_1^k(\lambda)=\prod_{i=1}^{l}(\mu_i-\lambda)^{m_i-1}\prod_{i\in J}(\mu_i-\lambda), \tag{3.8}$$

$$w_2^k(\lambda)=(a_{kk}-\lambda)\prod_{i\notin J}(\mu_i-\lambda)-\sum_{i=1}^{l}c_i^2\prod_{\substack{j\neq i\\ j\notin J}}(\mu_j-\lambda), \tag{3.9}$$

gdzie

$$J=\{j\colon c_j=0\}\subset(1,2,\dots,l),$$

$$c_i^2=\sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} b_{jk}^2,\qquad n_i=\sum_{h=1}^{i} m_h.$$

Zajmiemy się z kolei określeniem zbioru wszystkich pierwiastków równania (3.7). W tym celu rozważmy najpierw wielomian $w_2^k(\lambda)$ i zauważmy, że wartości $\lambda=\mu_s$, $s\notin J$, nie mogą być jego pierwiastkami, gdyż zgodnie z definicją zbioru J dla $s\notin J$ jest $c_s\neq 0$ i dlatego

$$w_2^k(\mu_s)=-c_s^2\prod_{\substack{j\neq s\\ j\notin J}}(\mu_j-\mu_s)\neq 0.$$

Pierwiastków wielomianu $w_2^k(\lambda)$ należy więc poszukiwać w zbiorze $\Delta^k=\{\lambda\colon \lambda>0,\ \lambda\neq\mu_i,\ i\notin J\}=(\delta_1,\delta_2,\dots,\delta_d)$ stanowiącym ciąg przedziałów otwartych δ_r. W przypadku jednak gdy $\lambda\in\Delta^k$, mamy $\prod_{i\notin J}(\mu_i-\lambda)\neq 0$, dzięki czemu

$$w_2^k(\lambda)=\prod_{i\notin J}(\mu_i-\lambda)\,\varphi_k(\lambda),$$

gdzie [13]

$$\varphi_k(\lambda)=a_{kk}-\lambda-\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i^2}{\mu_i-\lambda}. \tag{3.10}$$

Równanie $w_2^k(\lambda)=0$ ma więc dokładnie te same pierwiastki, co równanie $\varphi_k(\lambda)=0$ lub równoważne

$$a_{kk}-\lambda=\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i^2}{\mu_i-\lambda}. \tag{3.11}$$

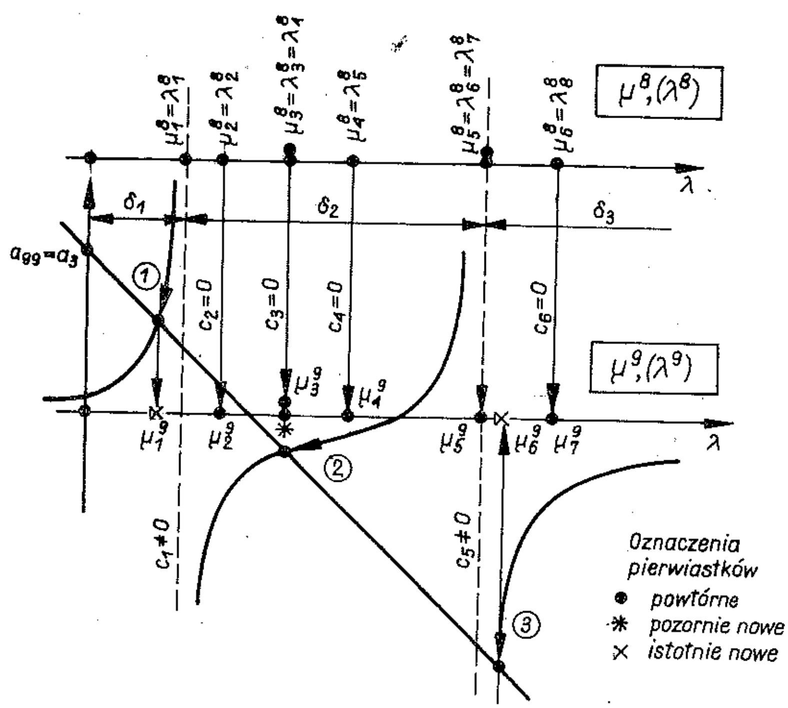
Postać równania (3.11) jest szczególnie dogodna dla analizy. Na rys. 1 pokazano przykładowo, graficzny sposób wyznaczania, pierwiastków tego równania dla pewnego przypadku szczególnego, w którym $J=(2,3,4,6)$.

Jak wynika z (3.11), w każdym przedziale otwartym $\delta_r\in\Delta^k$ znajduje się dokładnie jeden, pojedynczy ($m_i=1$) pierwiastek $\lambda=\mu_i^k$ wielomianu $w_2^k(\lambda)$. Każdy z tych pierwiastków będziemy nazywać nowym elementem widma μ^k. Ich położenie w poszczególnych przedziałach δ_r zależy od konkretnych własności układu S_n^k i może się zdarzyć, że $\mu_i^k=\mu_j=\mu_j^{k-1}$, $j\in J$, tzn. że pierwiastek μ_j jest tylko pozornie nowy (por. rys. 1). Jest to jednak możliwe tylko wtedy, gdy

$$a_{kk}=a_j=\mu_j+\sum_{i=1}^{l}\frac{c_i^2}{\mu_i-\mu_j},\qquad j\in J. \tag{3.12}$$

W przeciwnym razie, tzn. gdy $a_{kk}\neq a_j$, wszystkie pierwiastki $\lambda=\mu_i^k$ wielomianu $w_2^k(\lambda)$ spełniają warunki $\mu_i^k\neq\mu_j=\mu_j^{k-1}$, $j=1,2,\dots,l$, i dlatego będą nazywane pierwiastkami istotnie nowymi.

Na podstawie (3.8) bezpośrednio stwierdzamy, że wielomian $w_1^k(\lambda)$ ma dwa rodzaje pierwiastków $\lambda = \mu_i$: 1) m_i-krotne, gdy $i \in J$ oraz 2) $m_i - 1$ krotne, gdy $i \notin J$. Pierwiastki te będziemy nazywać powtórnymi elementami widma μ^k (rys. 1).



Rys. 1

Zbiór wszystkich pierwiastków równania (3.7), stanowiący widmo μ^k układu S_n^k, otrzymujemy jako sumę mnogościową dwu zbiorów pierwiastków: wielomianu $w_1^k(\lambda)$ i wielomianu $w_2^k(\lambda)$.

Reasumując dotychczasowe rozważania dochodzimy do podstawowego wniosku: częstość własna $\mu_i^{k-1} \in \mu^{k-1}$ o krotności m_i staje się częstością własną $\mu_i^k \in \mu^k$ o krotności: 1) $m_i - 1$, gdy $i \notin J$, 2) m_i, gdy $i \in J$, $a_{kk} \neq a_i$, 3) $m_i + 1$, gdy $i \in J$, $a_{kk} = a_i$. Tak sformułowany wniosek jest jednak słuszny tylko w przypadku, gdy $m_i > 1$ i nie obejmuje np. pojawiania się nowych częstości w widmie μ^k, którego istotny sens polega na tym, że częstość $\lambda \notin \mu^{k-1}$ staje się częstością $\lambda \in \mu^k$. Jeżeli jednak umówimy się traktować każdą częstość $\lambda \notin \mu^{k-1}$, $\lambda \notin \mu^k$ jako częstość własną o krotności $m = 0$, to wtedy możemy sformułować wniosek ogólny, prawdziwy zarówno dla pojawiania się nowych częstości w widmie μ^k, jak również dla znikania pewnych częstości z tego widma (rys. 1).

Ogólnie możemy więc stwierdzić, że dowolna częstość własna λ układu S_n^{k-1} o krotności m ($m = 0$, gdy $\lambda \notin \mu^{k-1}$) staje się częstością własną układu S_n^k o krotności $m' = m - 1$, m lub $m + 1$ ($m' = 0$, gdy $\lambda \notin \mu^k$) [5, 18].

Oznaczmy ciąg utworzony ze wszystkich częstości własnych układu S_n^k przez $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_k^k)$, gdzie $\lambda_1^k \leqslant \lambda_2^k \leqslant, \ldots, \leqslant \lambda_k^k$ i nazwijmy go λ-widmem tego układu.

W razie potrzeby, dla uniknięcia ewentualnych nieporozumień, będziemy się również posługiwać nazwą μ-widmo dla określenia widma w jego dotychczasowym rozumieniu.

W widmie λ^k będziemy wyróżniać k elementów, traktując każdą z częstości λ_i^k, $i=1, 2, ..., k$) jako odrębny element zbioru λ^k. Przykładem λ-widma na rys. 1 jest zbiór ośmiu punktów obrazujących wszystkie częstości układu S_n^8: $\lambda_1^8, \lambda_2^8, ..., \lambda_8^8$. Jego μ-widmo składa się tylko z sześciu elementów: $\mu_1^8, \mu_2^8, ..., \mu_6^8$.

Znikającym elementem widma λ^{k-1} nazwiemy częstość $\lambda_i^{k-1}=\mu_r^{k-1}$, $r \notin J$, która w widmie λ^k występuje z pomniejszoną krotnością.

Jak wynika z rys. 1, każdemu elementowi λ_i^{k-1}, znikającemu z widma λ^{k-1} odpowiada jednoznacznie określony, nowy element λ_j^k pojawiający się w widmie λ^k, przy czym zachodzi relacja $\lambda_j^k<\lambda_i^{k-1}$. W widmie λ^k pojawia się ponadto jeszcze jeden nowy element λ_j^k spełniający relację $\lambda_i^{k-1}<\lambda_j^k$, w której λ_i^{k-1} jest największym co do wartości elementem znikającym z widma λ^{k-1}. Wszystkie pozostałe elementy widma λ^k różne od nowych, są elementami powtórnymi tego widma. Widzimy więc, że liczba elementów widma λ^k jest zawsze większa o 1 od liczby elementów widma λ^{k-1}, co jest zgodne z liczbami stopni swobody układów S_n^{k-1} i S_n^k.

Tak więc ustaliliśmy najprostszą regułę, według której widmo λ^{k-1} przekształca się w widmo λ^k. Reguła ta pozwoli nam teraz określić podstawowe zależności pomiędzy elementami obydwu widm.

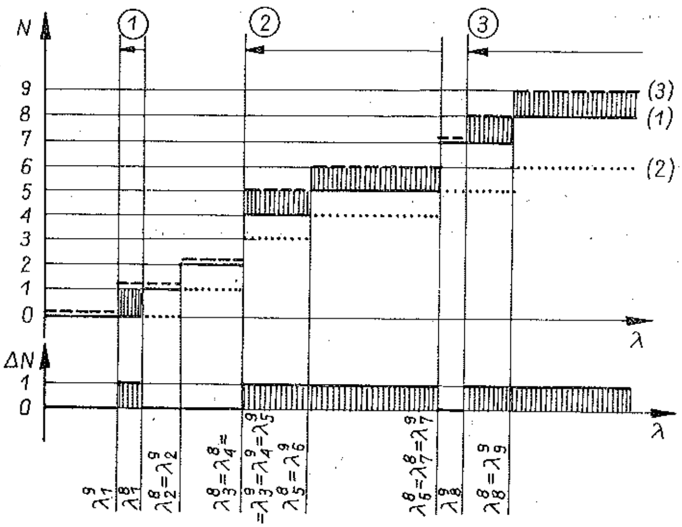
Rozważmy odwzorowanie N: $R^+\to N$ dodatniej półosi liczbowej R^+ zmiennej λ w zbiór nieujemnych liczb całkowitych N. Wartość odwzorowania oznaczymy przez $N(\lambda)$ i określimy ją [5] jako liczbę częstości własnych λ_i nie większych od danej częstości λ, tzn.

$$N(\lambda)=\max_{\lambda_i\leqslant\lambda} i. \tag{3.13}$$

Na rys. 2 pokazano trzy wykresy funkcji $N(\lambda)$ sporządzone dla przypadku z rys. 1: 1) dla widma λ^{k-1}, 2) dla widma λ^{k-1} po usunięciu z niego elementów znikających oraz 3) dla widma λ^k. Ponadto na tym samym rysunku pokazano również wykres funkcji $\Delta N(\lambda)$ ilustrujący zmiany wartości funkcji $N(\lambda)$, wywołane zmianą widma λ^{k-1} na widmo λ^k.

Funkcja $\Delta N(\lambda)$ przyjmuje tylko dwie wartości 0 i 1 informujące nas o tym, czy liczba częstości własnych λ_i mniejszych od danej częstości λ pozostaje bez zmiany ($\Delta N=0$), czy też powiększa się o 1 ($\Delta N=1$). Porównując rys. 1 i 2 stwierdzamy, że przyrost $\Delta N=1$ funkcji N wywołany jest zmianą uporządkowania częstości własnych w pewnych obszarach widma, jakie następuje w wyniku „przemieszczania się elementów znikających na nowe miejsca". Przemieszczenia te uwidoczniono na rys. 1 i 2 za pomocą ponumerowanych strzałek pokazujących, że elementy zmieniające położenie przenoszą się z prawego na lewy koniec każdego z przedziałów, w których $\Delta N=1$.

Zastanówmy się teraz nad konsekwencjami opisanego przemieszczania się określonych elementów widma. Zniknięcie elementu na prawym końcu pewnego otwartego przedziału osi częstości i równoczesne pojawienie się nowego elementu na jego lewym końcu sprawia, że wszystkie częstości zawarte w tym przedziale muszą otrzymać nowe indeksy o wartościach powiększonych o 1. Tak więc w prze-



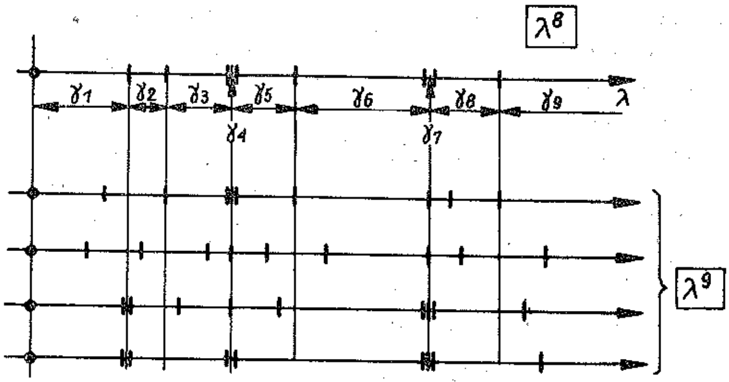
Rys. 2

działach, w których $\Delta N=1$: $\lambda_i^k=\lambda_{i-1}^{k-1}$, a co za tym idzie $\lambda_i^k<\lambda_i^{k-1}$. W przedziałach, w których $\Delta N=0$ mamy jednak $\lambda_i^{k-1}=\lambda_i^k$ czyli $\lambda_{i-1}^{k-1}<\lambda_i^k$. Ogólnie więc

(3.14) $$\lambda_{i-1}^{k-1}\leqslant\lambda_i^k\leqslant\lambda_i^{k-1}.$$

Otrzymaliśmy zatem ten sam rezultat, jaki wynika również bezpośrednio ze znanych twierdzeń Rayleigha [3, 4, 5 i 18].

Rozważmy ciąg $\Gamma^k=(\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k)$ przedziałów domkniętych $\gamma_i=(\lambda_{i-1}^{k-1}, \lambda_i^{k-1})$, $i=1, 2, ..., k$, przy czym załóżmy, że $\lambda_0^{k-1}=0$, $\lambda_k^{k-1}=\infty$. Na podstawie przeprowa-



Rys. 3

dzonej analizy możemy teraz podać prostą definicję widma λ^k określającą sposób jego rekurencyjnego powstawania na podstawie danego widma λ^{k-1}.

Widmo λ^k jest zbiorem elementów λ_i^k takich, że $\lambda_i^k \in \gamma_i$, $i=1, 2, \ldots, k$.

Na rys. 3 pokazano kilka z pośród różnych teoretycznie możliwych postaci widma λ^k zbudowanego według powyższej definicji na podstawie danego widma λ^{k-1}.

4. Formy drgań własnych układu S_n^k

Na podstawie znajomości widma λ^k możemy przystąpić do obliczenia form drgań własnych odpowiadających jego poszczególnym elementom. Obliczenie to przeprowadzimy na podstawie równania (3.1) przekształconego za pomocą transformacji (3.4) do postaci

$$(A_{k-1} - \lambda I) w_{k-1} = 0 \tag{4.1}$$

i równania

$$\begin{pmatrix} A_{k-1} - \lambda I & b_k \\ b_k^T & a_{kk} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

4.1. Częstość μ_i o niezmienionej krotności m_i, $i \in J$, $a_{kk} \neq a_i$

Po podstawieniu $\lambda = \mu_i$ w (4.1) i (3.5) otrzymujemy równania

$$(A_{k-1} - \mu_i I) w_{k-1} = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} A_{k-1} - \mu_i I & b_k \\ b_k^T & a_{kk} - \mu_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = 0, \tag{4.3}$$

których macierze w rozważanym przypadku mają ten sam defekt m_i. Dzięki temu że $i \in J$, mamy

$$c_i^2 = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} b_{jk}^2 = 0,$$

skąd wynika, że $b_{jk} = 0$ dla każdego $j \in Z_i$ (por. (2.3)). Tak więc macierze obydwu równań (4.2) i (4.3) mają zerowe wiersze i kolumny o indeksach $j \in Z_i$. Oznacza to, że każdemu rozwiązaniu w_{k-1}^* równania (4.2) odpowiada rozwiązanie $w_k^* = (w_{k-1}^*, 0)^T$ równania (4.3). Podprzestrzenie własne $G^{k-1}(\mu_i)$, $G^k(\mu_i)$ układów S_n^{k-1} i S_n^k mają więc nie tylko ten sam wymiar m_i, ale są identyczne, z tym jednak zastrzeżeniem, że $G^{k-1}(\mu_i)$ jest podprzestrzenią przestrzeni o wymiarze $k-1$, a $G^k(\mu_i)$ — podprzestrzenią przestrzeni k-wymiarowej.

Na podstawie powyższych rozważań stwierdzamy, że formy drgań własnych, układów S_n^{k-1} i S_n^k, odpowiadające dowolnej częstości μ_i o niezmieniającej się krotności m_i, mogą być całkowicie identyczne.

Zwróćmy jeszcze uwagę na następujący istotny fakt. Podstawiając rozwiązanie $w_k^* = (w_{k-1}^*, 0)^T$ do (4.3) otrzymujemy dwie tożsamości:

$$(A_{k-1} - \mu_i I) w_{k-1}^* \equiv 0, \tag{4.4}$$

$$b_k^T w_{k-1}^* \equiv 0. \tag{4.5}$$

Spełnienie pierwszej z nich wymaga, aby jedynymi różnymi od zera elementami wektora w^*_{k-1} były elemnty $w^*_{j,k-1}$, $j \in Z_l$. Druga tożsamość spełniona jest dzięki temu, że $b_{jk}=0$, $j \in Z_l$. Podprzestrzenie własne $G^{k-1}(\mu_l)$, $G^k(\mu_l)$ są więc zbiorami generowanymi przez m_l liniowo niezależnych wektorów odpowiednio ω^*_{k-1} i w^*_k, których wszystkie współrzędne o indeksach $j \notin Z_l$ są równe zeru.

4.2. *Częstość μ_l o wzrastającej krotności m_l, $l \in J$, $a_{kk}=a_l$*

W tym przypadku defekt macierzy równania (4.3) wynosi m_l+1, przy czym macierz ta również i tym razem ma zerowe wiersze i kolumny o indeksach $j \in Z_l$. Wynika stąd, że oprócz m_l rozwiązań o postaci $w^*_k=(w^*_{k-1}, 0)^T$ takiej samej jak dla przypadku $a_{kk} \neq a_l$. równanie (4.3) posiada teraz jeszcze jedno rozwiązanie liniowo niezależne od poprzednich, odpowiadające częstości pozornie nowej $\lambda=\mu_l$. Rozwiązanie to można otrzymać w następujący sposób.

Nadajmy dowolne wartości tym współrzędnym w_{jk} wektora w_k, dla których $j \in Z_l$, pozostałe zaś obliczmy z równania

$$
\begin{pmatrix} A'_{k-1}-\mu_l I' & b'_k \\ b'^T_k & a_l-\mu_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_{k-1} \\ w \end{pmatrix} = 0, \tag{4.6}
$$

powstającego z (4.3) po podstawieniu $a_{kk}=a_l$ (por. (3.12)) i wykreśleniu zerowych wierszy i kolumn. Macierz równania (4.6) ma defekt równy 1 i dlatego możemy je rozwiązać jednoznacznie np. względem w'_{k-1} ustalając liczbową wartość w. Zauważmy również, że $A'_{k-1}-\mu_l I'$ jest już macierzą nieosobliwą, którą możemy odwrócić. Tak więc

$$
w'^d_{k-1} = -(A'_{k-1}-\mu_l I')^{-1} b'_k w \tag{4.7}
$$

lub

$$
w'^d_{j,k-1} = \frac{b'_{jk} w}{\mu_l - \lambda^{k-1}_j}, \quad j \notin Z_l.
$$

Równanie $b'^T_k w'_{k-1} + (a_l-\mu_l) w = 0$ spełnione jest przez w'^d_{k-1} tożsamościowo dzięki (3.12).

Tak więc podprzestrzeń własna $G^k(\mu_l)$ powstaje w rozważanym przypadku jako iloczyn kartezjański $G^{k-1}(\mu_l) X w^d_k$, w którym $G^{k-1}(\mu_l)$ jest podprzestrzenią własną układu S^{k-1}_n o wymiarze m_l, a w^d_k — wektorem o dowolnych (w szczególności równych zeru) wartościach współrzędnych $w^d_{j,k}$, $j \in Z_l$ i dowolnej, ale różnej od zera współrzędnej $w^d_{kk}=w$. Pozostałe współrzędne w^d_{jk}, $j \notin Z_l$ określone są przez (4.7).

Powyższe rozważania pozwalają stwierdzić, że wszystkie formy drgań własnych układu S^{k-1}_n, odpowiadające dowolnej częstości μ_l o wzrastającej krotności m_l, mogą być równocześnie formami drgań własnych układu S^k_n, który ponadto ma jeszcze dodatkową formę drgań własnych, określoną przez wektor w^d_k. Charakterystyczną cechą tej formy jest to, że $w^d_{kk}=w \neq 0$, podczas gdy $w^*_{kk}=0$. Oznacza to, że forma ta jest jakościowo nowa pomimo, że odpowiada tej samej, pozornie nowej częstości $\lambda=\mu_l$.

4.3. Częstość μ_i o malejącej krotności m_i, $i \notin J$

Wobec tego, że tym razem $i \notin J$, mamy $c_i \neq 0$, co oznacza, że nie wszystkie współrzędne b_{jk}, $j \in Z_i$ wektora b_k są równe zeru. Wynika stąd, że macierz równania (4.3), jakkolwiek jej defekt w rozważanym przypadku wynosi $m_i - 1$, może nie mieć wcale zerowych wierszy i kolumn. Jest to przyczyną, z powodu której rozwiązania w^*_{k-1} równania (4.2) o dowolnych współrzędnych $w^*_{j,k-1}$, $j \in Z_i$, nie mogą w przypadku ogólnym służyć dla zbudowania rozwiązań równania (4.3) o postaci $w^*_k = (w^*_{k-1}, 0)^T$. Rozwiązania o tej postaci istnieją tylko dla takich w^*_{k-1}, które spełniają warunek ortogonalności (4.5), pomimo że $b_{jk} \neq 0$, $j \in Z_i$.

Podprzestrzeń własna $G^k(\mu_i)$ jest więc teraz taką podprzestrzenią podprzestrzeni własnej $G^{k-1}(\mu_i)$, która jest orotogonalna względem danego wektora b_k i której wymiar wynosi $m_i - 1$.

Reasumując można stwierdzić, że istnieje $m_i - 1$ form drgań własnych układu S^k_n, odpowiadających dowolnej częstości μ_i o malejącej krotności m_i. Formy te są odpowiednimi kombinacjami liniowymi m_i form własnych układu S^{k-1}_n, odpowiadających tej samej częstości μ_i, i są ortogonalne względem danego wektora b_k.

4.4. Częstość μ_i istotnie nowa

Ponieważ w tym przypadku mamy $\mu_i = \mu^k_i \neq \mu^{k-1}_j$, $j = 1, 2, ..., l$, przeto defekt macierzy równania (4.3) jest równy 1. Ustalając wartość liczbową ostatniej współrzędnej wektora w_k, możemy w sposób jednoznaczny obliczyć pozostałe współrzędne tego wektora na podstawie (4.3)

$$w^*_{k-1} = -(A_{k-1} - \mu_i I)^{-1} b_k w$$

lub

$$w^*_{j,k-1} = \frac{b_{jk} w}{\mu_i - \lambda^{k-1}_j}, \quad j = 1, 2, ..., k-1.$$

Równanie $b^T_k w_{k-1} + (a_{kk} - \mu_i) w = 0$ spełnione jest tożsamościowo dzięki (3.11).

Tak więc forma drgań własnych układu S^k_n odpowiadająca częstości istotnie nowej μ_i jest formą jakościowo nową. Podprzestrzeń własna $G^k(\mu_i)$ ma wymiar równy 1 i jest generowana przez tę formę.

5. Zakończenie

Wyprowadzone związki rekurencyjne dla częstości i form drgań własnych mają znaczenie podstawowe. Pozwalają one bowiem zbudować odpowiedni ciąg $W = (\lambda^1, \lambda^2, ..., \lambda^n)$, którego elementy są widmami $\lambda^k = (\lambda^k_1, \lambda^k_2, ..., \lambda^k_k)$, $k = 1, 2, ..., n$, kolejnych układów pośrednich S^k_n. Każde z widm λ^k jest zbiorem pierwiastków wielomianu charakterystycznego $w_k(\lambda) = \det(A_k - \lambda I)$. Z analizy własności ciągu W, będącej równocześnie analizą własności odpowiedniego ciągu wielomianów charakterystycznych, wynika, że znajduje tu zastosowanie znane z algebry twierdzenie Sturma [9 i 12]. Odpowiednie uogólnienia tego twierdzenia stanowią dziś najważniejszą podstawę nowoczesnych programów na maszyny cyfrowe, odznaczających się bardzo wysoką sprawnością i dokładnością obliczeń wartości i wektorów własnych [14 i 17].

W drugiej części pracy omówiono uogólnienia wyników rozważań części pierwszej na przypadek ciągu widm częstości. Zamieszczono w niej również odpowiednie przykłady ilustrujące rozważania teoretyczne.

Literatura cytowana w tekście

1. R. E. D. Bishop, G. M. L. Gladwell, S. Michaelson, *Macierzowa analiza drgań*, WNT, Warszawa 1972.
2. D. K. Faddiejew, W. N. Faddiejewa, *Wyčislitielnyje metody liniejnoj algebry*, Fizmatgiz, Moskwa 1960.
3. F. R. Gantmaher, *Tieorija matric*, Izd. „Nauka", Moskwa 1966.
4. F. R. Gantmaher, M. G. Krejn, *Osicillacjonnyje matricy i jadra i malyje kolebanija mechaničeskich sistiem*, Gostiehtieorizdat, Moskwa 1950.
5. S. H. Gould, *Variational methods for eigenvalue problems*, Oxford University Press, London 1966.
6. K. K. Gupta, *Vibration of frames and other structures with banded stiffness matrix*, Int. J. num. Meth. Engng., **2**, 221–228, 1970.
7. K. K. Gupta, *Solution of eigenvalue problems by Sturm sequence method*, Int. J. num. Meth. Engng., **4**, 379–404, 1972.
8. K. K. Gupta, *On a combined Sturm sequence and inverse iteration technique for eigenproblem solution of spinning structures*, Int. J. num. Meth. Engng., 7, 509–518, 1973.
9. A. Mostowski, M. Stark, *Eelementy algebry wyższej*, PWN, Warszawa 1958.
10. G. Peters, J. H. Wilkinson, *Eigenvalues of $Ax=\lambda Bx$ with band symmetric A and B*, Computer J., 12, 398–404, 1969.
11. A. Ralston, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1971.
12. A. Turowicz, *Geometria zer wielomianów*, PWN, Warszawa 1967.
13. J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Clarendon Press, Oxford 1965.
14. F. W. Williams, W. H. Wittrick, *An automatic computational procedure for calculating natural frequencies of skeletal strucutres*, Int. J. Mech. Sci., **12**, 781–791, 1970.
15. F. W. Williams, *Natural frequencies of repetitive structures*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **24**, 3, 285–310, 1971.
16. F. W. Williams, *Rapid analysis of the effects of structural modifications on inconveniently situated eigenvalues*, Comp. and Str., **3**, 1465–1471, 1973.
17. F. W. Williams, W. H. Wittrick, *Efficient calculation of natural frequencies of certain marine strucutres*, Int. J. Mech. Sci., **15**, 833–843, 1973.
18. W. H. Wittrick, F. W. Williams, *A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures*, Quart. J. Mech. Appl. Math., **24**, 3, 263–284, 1971.

Резюме

ОБ РЕКУРЕНТНЫХ СВОЙСТВАХ СПЕКТРОВ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ. Ч. I

В статьи рассмотрены основные рекурентные соотношения между частотами и формами собственных колебаний, двух дискретных механических систем, отличающихся действием одной кинематической связи. Рассуждения непосредственно выводятся из концепций метода перемещений: накладывания, а затем поочередного устранения связей. Главной задачей статьи является систематизация подхода к решению вопросов модификации спектров собственных колебаний механических систем.

SUMMARY

ON THE RECURSIVNESS OF EIGENFREQUENCY SPECTRA (PART I)

This paper deals with fundamental recursive dependence existing between eigenfrequencies and eigenmodes of two discrete mechanical systems differing one another by the action of a kinematical constraint. Considerations are directly connected with displacement method concept of putting on the constraints and then removing them in turn. The aim of the paper is to sytematize the approach to eigenfrequency spectra modification problems in strucutral mechanics.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI

Praca została złożona w Redakcji dnia 22 *grudnia* 1976 *r.*