

## METODA BADANIA STATECZNOŚCI ŻURAWI PRZEJEZDNYCH

RYSZARD FIŁONIK (WARSZAWA)

W pracy zaproponowano wykorzystanie do badania stateczności żurawi bezpośredniej metody Lapunowa i jej uogólnień. Przedstawiono metodykę pozwalającą efektywnie oszacować obszar stateczności żurawia oraz podać dostateczne warunki stateczności żurawia w przypadku istnienia sił zaburzających. Rozważania przeprowadzono na przykładzie żurawia przejezdnego i przeanalizowano fazę rozruchu mechanizmu jazdy.

### WSTĘP

Zagadnienie stateczności żurawi jest jednym z bardziej złożonych w teorii budowy dźwignic. Odzwierciedleniem tego faktu jest różnorodność ujęć w przepisach i normach stosowanych w różnych krajach. Badaniu problemu poświęcono wiele prac np. [4, 5 i 6]. W Polsce i w innych krajach obowiązują przepisy oparte na badaniach stosunku momentu ustalającego do wywracającego. Należy wykazać rachunkowo i przez obciążenia próbne, że jest on większy od jedności z odpowiednim zapasem. Takie ujęcie jest od dosyć dawna krytykowane. W pracach [4 i 5] postuluje się badanie ruchu (małych drgań) wokół położenia równowagi i wnioskowanie na tej podstawie o stateczności dźwignicy. Niedostatkami spotykanych dotąd prac jest brak pełnego oszacowania obszaru dopuszczalnych zaburzeń (odchyłeń od położenia równowagi) i powiązania z typowymi siłami wywołującymi te zaburzenia. Pewne rezultaty stanowiące krok do usunięcia tych niedostatków przedstawiono w pracy [6], jednakże zaproponowane tam warunki stateczności wydają się zbyt mocne.

W niniejszej pracy zostanie zaproponowana metodyka pozwalająca w znacznym stopniu wyeliminować wymienione wyżej niedostatki. Rozważania oparte będą na bezpośredniej metodzie badania stateczności ruchu układu dynamicznego.

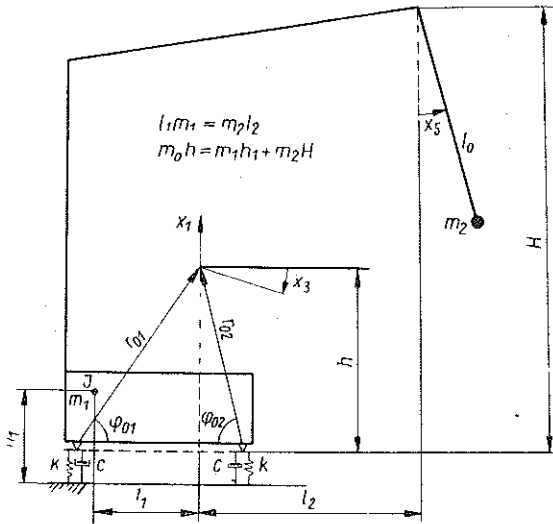
Żuraw jako obiekt dynamiczny jest bardzo złożony. Mając na uwadze zwięzłość i przejrzystość proponowanej metody, zdecydowano się na daleko idące uproszczenie modelu fizycznego i przeanalizowano tylko jeden z możliwych ruchów roboczych. Przyjęte założenia upraszczające nie zmieniają zagadnienia w sensie jakościowym.

### 1. MODEL ZJAWISKA I RÓWNIANIA RUCHU ZABURZONEGO

Model zostanie zbudowany przy następujących założeniach upraszczających: 1) żuraw może wykonywać drgania wokół położenia równowagi w płaszczyźnie prostopadłej do krawędzi wyrotu; 2) konstrukcję nośną traktuje się jako sztywną

bryłę; 3) linę mechanizmu podnoszenia traktuje się jako nieważką, doskonale wiotką i nierozciągliwą, o stałej długości; 4) masę nosiwa traktuje się jako skupioną w środku masy; 5) konstrukcja żurawia nie jest obciążona naporem wiatru; 6) tłumienie wywołane własnościami podłoża, oporem powietrza itp. jest formalnie zastąpione tłumikami o liniowych charakterystykach.

Rozpatrzmy przypadek żurawia stojącego (zahamowanego) na torze. Model odpowiadający temu przypadkowi przedstawia rys. 1.



Rys. 1.

Przyjmujemy układ współrzędnych związany z podłożem i współrzędne uogólnione, przy czym  $x_1$  oznacza przemieszczenie pionowe punktu, będącego środkiem masy żurawia z nosiwem w przypadku  $l_0=0$  (umowny środek masy), liczone od położenia równowagi statycznej,  $x_3$  kąt przechylenia podstawy żurawia liczony od położenia równowagi statycznej,  $x_5$  kąt odchylenia linii z nosiwem od prostej pionowej. Po wykorzystaniu równań Lagrange'a II rodzaju i wprowadzeniu oznaczeń

$$(1.1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_5 = x_6$$

równania ruchu w postaci normalnego układu równań różniczkowych mają postać:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{H_1(x_1, x_3)}{m_0} \{k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1] + \\ &+ c [x_2 + x_4 r_{01} \cos(\varphi_{01} - x_3)]\} - \frac{H_2(x_1, x_3)}{m_0} \{k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + \\ &+ x_3) + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2] + c [x_2 - x_4 r_{02} \cos(\varphi_{02} + x_3)]\} - g, \end{aligned}$$

(1.2)  $\dot{x}_3 = x_4,$   
[cd.]

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & -\frac{H_1(x_1, x_3)}{J_0 - m_2 H^2} \{k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1] + \\ & + c [x_2 + x_4 r_{01} \cos(\varphi_{01} - x_3)]\} r_{01} \cos(\varphi_{01} - x_3) + \\ & + \frac{H_2(x_1, x_3)}{J_0 - m_2 H^2} \{k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2] + \\ & + c [x_2 - x_4 r_{02} \cos(\varphi_{02} + x_3)]\} r_{02} \cos(\varphi_{02} + x_3) + \\ & + \frac{m_{02} g H}{J_0 - m_2 H^2} \sin x_5, \end{aligned}$$

$\dot{x}_5 = x_6,$

$$\begin{aligned} \dot{x}_6 = & \frac{H}{l_0 (J_0 - m_2 H^2)} H_1(x_1, x_3) \{k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \\ & + \lambda_1] + c [x_2 + r_{01} x_4 \cos(\varphi_{01} - x_3)]\} r_{01} \cos(\varphi_{01} - x_3) - \\ & - \frac{H}{l_0 (J_0 - m_2 H^2)} H_2(x_1, x_3) \{k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + r_{02} \sin \varphi_{02} + \\ & + \lambda_2] + c [x_2 - r_{02} x_4 \cos(\varphi_{02} + x_3)]\} r_{02} \cos(\varphi_{02} + x_3) - \\ & - \frac{J_0}{l_0 (J_0 - m_2 H^2)} g \sin x_5, \end{aligned}$$

gdzie  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  oznaczają statyczne ugięcia podpór wypełniające warunki

$$k(\lambda_1 + \lambda_2) + m_0 g = 0,$$

$$\lambda_1 r_{01} \cos \varphi_{01} - \lambda_2 r_{02} \cos \varphi_{02} = 0;$$

$m_0 = m_1 + m_2$  masę całkowitą;  $J_0 = J + m_1(l_1^2 + h_1^2) + m_2(l_1^2 + H^2)$  zastępczy moment bezwładności;  $J$  moment bezwładności konstrukcji żurawia względem środka masy oraz

$$H_1(x_1, x_3) \equiv H [r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) - r_{01} \sin \varphi_{01} - x_1 - \lambda_1],$$

$$H_2(x_1, x_3) \equiv H [r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) - r_{02} \sin \varphi_{02} - x_1 - \lambda_2],$$

funkcje Heaviside'a.

Układ równań (1.2) posiada rozwiązanie trywialne

$$x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, 6).$$

Opisuje ono stan równowagi żurawia. Równania ruchu są więc jednocześnie równaniami zaburzeń.

## 2. OBSZAR STATECZNOŚCI POŁOŻENIA RÓWNOWAGI ŻURAWIA

Stateczność rozwiązania trywialnego zbadamy metodą bezpośrednią. Jako funkcję Lapunowa  $V_L$  wybieramy

$$(2.1) \quad V_L = \frac{1}{2} m_0 x_2^2 + \frac{1}{2} J_0 x_4^2 + \frac{1}{2} m_2 l_0^2 x_6^2 + m_2 H l_0 x_4 x_6 + m_0 g x_1 + \\ + m_2 g l_0 (1 - \cos x_5) + H_1(x_1, x_3) \left\{ \frac{1}{2} k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + \right. \\ \left. + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1]^2 \right\} + H_2(x_1, x_3) \left\{ \frac{1}{2} k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + \right. \\ \left. + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2]^2 \right\} - \frac{1}{2} k (\lambda_1^2 + \lambda_2^2).$$

Funkcja (2.1) dla dostatecznie małych  $x_i$  jest dodatnio określona przy wypełnieniu następujących warunków:

$$(2.2) \quad J_0 > m_2 H^2, \\ (r_{01} \cos \varphi_{01} + r_{02} \cos \varphi_{02})^2 > |\lambda_1 + \lambda_2| r_{01} \sin \varphi_{01}.$$

Pierwszy z powyższych warunków jest spełniony w związku z definicją  $J_0$ . Drugi żąda dostatecznej sztywności podpór i w realnych konstrukcjach jest zawsze spełniony.

Pochodna funkcji Lapunowa związana z układem (1.2) jest następująca:

$$(2.3) \quad \dot{V}_L = -H_1(x_1, x_3) c [x_2 + r_{01} x_4 \cos(\varphi_{01} - x_3)]^2 - \\ - H_2(x_1, x_3) c [x_2 - r_{02} x_4 \cos(\varphi_{02} + x_3)]^2$$

i jest dla dowolnych  $x_i$  niedodatnia. Położenie równowagi żurawia jest zatem stateczne. Można wykazać, że w pewnym otoczeniu punktu osobliwego jest ono nawet asymptotycznie stateczne.

Z technicznego punktu widzenia interesujące jest oszacowanie obszaru stateczności. W tym celu wskażemy taką liczbę  $A$ , że obszar

$$(2.4) \quad \Gamma = \{x: V_L(x) < A\}, \quad x = \text{col } [x_1, \dots, x_6]$$

jest obszarem przyciągania rozwiązania trywialnego.

Rozważmy obszar jednospójny  $\Omega$  w przestrzeni  $R^6$  zawierający początek układu i taki, że

$$(2.5) \quad V_L(x) > 0$$

w całym obszarze  $\Omega$ . Niech  $x_i$  będą punktami osobliwymi układu (1.2) leżącymi w  $\Omega$ , w których pochodna w dowolnym kierunku zmienia znak. Niech będzie dale

$$(2.6) \quad V_L(0) < V_L(x^1) < V_L(x^2) < \dots;$$

wtedy

$$(2.7) \quad A = V_L(x^1)$$

jest poszukiwaną liczbą.

Istotnie, weźmy w przestrzeni  $R^6$  homeomorficzną ze sferą, zamkniętą powierzchnię  $S_\varepsilon$ , np.

$$(2.8) \quad {}^T x B x = \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

gdzie  $B$  oznacza macierz symetryczną, dodatnio określoną tak, że dla pewnej wartości  $\varepsilon^* > 0$  powierzchnia (2.8) zawiera punkt  $x^1$ , a funkcja  $V_L(x)$  osiąga na tej powierzchni w punkcie  $x^1$  istotną dolną granicę. Powierzchnia

$$(2.9) \quad V_L(x) = A$$

jest największą zamkniętą powierzchnią, zawierającą wewnątrz tylko jeden punkt osobliwy układu (1.2), mianowicie początek układu. Ze względu bowiem na ciągłość funkcji  $V_L$  mamy

$$(2.10) \quad \bigwedge_{0 < \varepsilon < \varepsilon^*} \min_{x \in S_\varepsilon} V_L(x) < A.$$

Ponieważ w punkcie  $x^1$  pochodna  $dV_L/ds$  zmienia znak przynajmniej w jednym kierunku, przeto funkcja  $V_L$  również w tym kierunku maleje, czyli

$$(2.11) \quad \bigwedge_{\varepsilon > \varepsilon^*} \min_{x \in S_\varepsilon} V_L(x) < A.$$

Łatwo wykazać [3], że zbiór

$$(2.12) \quad \dot{V}_L(x) = 0$$

nie zawiera pełnych trajektorii układu (1.2) z wyjątkiem początku układu współrzędnych. Istotnie, na powierzchni (2.12) spełniona jest nierówność

$$(2.13) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \dot{V}_L}{\partial x_i} X_i(x) \neq 0,$$

gdzie  $X_i(x)$  oznaczają prawe strony (1.2). Powyższe wraz z (2.3) i (2.9) w myśl twierdzenia LA SALLE'A [1] zapewnia w obszarze  $\Gamma$  stabilność asymptotyczną.

Dla rozpatrywanego modelu żurawia przy założeniu  $\varphi_{02} > \varphi_{01}$  punktem osobliwym  $x^1$  jest punkt

$$(2.14) \quad x^1 = \begin{bmatrix} r_{02} (1 - \sin \varphi_{02}) + \lambda_1 \\ 0 \\ \frac{\pi}{2} - \varphi_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

liczba  $A$  zaś określająca obszar stateczności żurawia ma wartość

$$(2.15) \quad A = m_0 g r_{02} (1 - \sin \varphi_{02}) - k \lambda_1^2.$$

Otrzymane rezultaty pozwalają na następujące stwierdzenie:

1. Proponowana metoda pozwala efektywnie określić obszar, w którym spełnione są dostateczne warunki stateczności.

2. Dla stwierdzenia stateczności asymptotycznej wystarczy zakładać, że w układzie ma miejsce dysypacja energii, tzn w ogólności współczynnik tłumienia może mieć charakter  $c = c(x) > 0$  i nie ma wpływu na stateczność układu. Jest to fakt dosyć istotny, gdyż zarówno oszacowanie wielkości jak i ustalenie charakteru tłumienia jest zagadnieniem złożonym. Nadto tłumienie może się w pewnych układach okazać bardzo małe.

3. Zaproponowana funkcja Lapunowa, jak łatwo zauważyć, ma wymiar energii i jest w istocie energią mechaniczną układu. Otrzymany wynik (2.15) jest więc określeniem minimalnej wartości pracy, którą należy wykonać, aby układ wyprowadzić poza obszar stateczności. W tym ujęciu wynik (2.15) nie jest zaskakujący, jednak otrzymanie go na drodze formalnej pozwala przypuszczać, że można otrzymać dalsze interesujące wyniki bez uciekania się do interpretacji fizycznej na każdym etapie badania stateczności.

4. Pojęcie stateczności żurawia przyjęte w budowie dźwignic jest równoważne stateczności względem współrzędnych przedstawionych na rys. 1. Zatem otrzymany wynik może być wykorzystany również w przypadku, gdy dopuszcza się inne ruchy (robocze) np. jazdę żurawia po torze.

5. Na stateczność żurawia ma wpływ sztywność podparcia (podłoża). Największy obszar stateczności otrzymujemy dla doskonale sztywnego podłoża, gdy ostatni wyraz w (2.15) zmierza do zera:

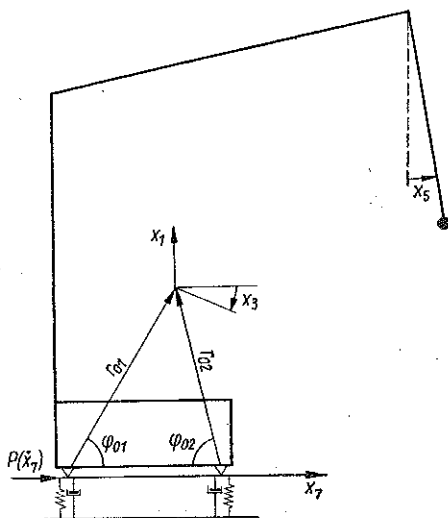
$$(2.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \lambda_1^2 = 0.$$

6. Badanie modelu przedstawionego na rys. 1 mimo, że prowadzi do konkretnego wyniku w postaci określonej ilości energii, którą można bezpiecznie wprowadzić do układu, nie uwzględnia mechanizmu wprowadzenia tej energii, przez co bezpośrednio przydatność wyniku jest niewielka. Znajomość tego obszaru jest cenna dla dalszych badań stateczności, np. w sensie stateczności technicznej z uwzględnieniem sił zaburzających ruch.

### 3. STATECZNOŚĆ ŻURAWIA JADĄCEGO PO TORZE

Otrzymany w poprzednim rozdziale wynik (obszar stateczności) nadaje się do wykorzystania praktycznego. Należy ustalić tylko warunki, przy których istnieje taki podobszar  $\gamma$  zawarty w obszarze (2.4), że każda trajektoria mająca swój początek w  $\gamma$  nie opuszcza obszaru  $\Gamma$  (2.4). Dla konstrukcji typu żurawi można zakładać, że siły zaburzające ruch są od siebie niezależne i wchodzą addytywnie do równań ruchu.

Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy więc założyć dalej, że na żuraw działa tylko jedna siła zewnętrzna, pochodząca od silnika napędu jazdy. Schemat modelu fizycznego wraz z przyjętym układem współrzędnych uogólnionych przed-



Rys. 2.

stawia rys. 2. Przy założeniach poprzedniego rozdziału pełny opis ruchu żurawia ma postać następującą:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, & m_0 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\
 \dot{x}_3 &= x_4, & J_0 \dot{x}_4 + m_2 H l_0 \dot{x}_6 + m_0 h \dot{x}_8 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \\
 \dot{x}_5 &= x_6, & m_2 H l_0 \dot{x}_4 + m_2 l_0^2 \dot{x}_6 + m_2 l_0 \dot{x}_8 &= f_3(x_5), \\
 \dot{x}_7 &= x_8, & m_0 h \dot{x}_4 + m_2 l_0 \dot{x}_6 + m_0 \dot{x}_8 &= P(x_8),
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -H_1(x_1, x_3) \{ c [x_2 + r_{01} x_4 \cos(\varphi_{01} - x_3)] + \\
 &\quad + k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1] \} - \\
 &\quad - H_2(x_1, x_3) \{ c [x_2 - r_{02} x_1 \cos(\varphi_{02} + x_3)] + \\
 &\quad + k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2] \} - g,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_2 &= -H_1(x_1, x_3) r_{01} \cos(\varphi_{01} - x_3) \{ c [x_2 + r_{01} x_1 \cos(\varphi_{01} - x_3)] + \\
 &\quad + k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1] \} + \\
 &\quad + H_2(x_1, x_3) r_{02} \cos(\varphi_{02} + x_3) \times \\
 &\quad \times \{ c [x_2 - r_{02} x_4 \cos(\varphi_{02} + x_3)] + k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + \\
 &\quad + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2] \},
 \end{aligned}$$

$$f_3 = -m_2 g l_0 \sin x_5.$$

Interesuje nas stateczność względem współrzędnych  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . Celem otrzymania rozwiązania, którego stateczność chcemy badać, i równań ruchu zaburzonego postąpimy następująco. Podzielimy układ (3.1) na podukłady niezależne:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & m_0 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \dot{x}_3 &= x_4, & J_0 \dot{x}_4 + m_2 H l_0 \dot{x}_6 &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4), \end{aligned}$$

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \dot{x}_5 &= x_6, & m_2 H l_0 \dot{x}_4 + m_2 l_0^2 \dot{x}_6 &= f_3(x_5); \\ \dot{x}_7 &= x_8, \end{aligned}$$

$$(3.4) \quad m_0 \dot{x}_8 = P(x_8).$$

Współrzędna  $x_7$  jest zmienną cykliczną i ruch względem niej jest zawsze niestateczny [2]. Zajmować się będziemy dalej tylko podukładami (3.2) i (3.4). Równanie (3.4) po ustaleniu funkcji  $P(x_8)$  daje się stosunkowo łatwo scałkować. Rozwiązanie

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x_i &= 0, & i &= 1, 2, \dots, 6, \\ x_8 &= v_j(t) \end{aligned}$$

układów (3.2) przyjmujemy dalej za ruch niezaburzony. Interpretacja fizyczna takiego rozwiązania jest oczywista. Wstawiając (3.5) do (3.1) z pominięciem równania zawierającego  $\dot{x}_7$  i wprowadzając

$$(3.6) \quad x_8 = x_{10} + v_j(t)$$

otrzymujemy równania ruchu zaburzonego w postaci

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ m_0 \dot{x}_2 &= f_1(x_1, x_2, x_3, x_4), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ J_0 \dot{x}_4 + m_2 H l_0 \dot{x}_6 + m_0 h \dot{x}_{10} &= f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) + R_2(t), \\ \dot{x}_5 &= x_6, \\ m_2 H l_0 \dot{x}_4 + m_2 l_0^2 \dot{x}_6 + m_2 l_0 \dot{x}_{10} &= f_3(x_5) + R_3(t), \\ m_0 h \dot{x}_4 + m_2 l_0 \dot{x}_6 + m_0 \dot{x}_{10} &= R_4(t, x_{10}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.8) \quad \begin{aligned} R_2(t) &= -m_0 h \dot{v}_j(t), \\ R_3(t) &= -m_2 l_0 \dot{v}_j(t), \\ R_4(t, x_{10}) &= P(v_j(t) + x_{10}) - P(v_j(t)). \end{aligned}$$

Aczkolwiek interesuje nas stateczność względem współrzędnych  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ , najwygodniej jest prowadzić rozważania łącznie ze współrzędną  $x_{10}$ .



Wyrażenia  $R_i$  potraktujemy formalnie jako zaburzenia stałe działające i zbadamy wstępnie stabilność rozwiązania (trywialnego) układu (3.7) bez tych zaburzeń. Dla funkcji Lapunowa o postaci

$$(3.9) \quad V_L = \frac{1}{2} m_0 x_2^2 + \frac{1}{2} J_0 x_4^2 + \frac{1}{2} m_2 l_0^2 x_6^2 + \frac{1}{2} m_0 x_{10}^2 + m_2 H l_0 x_4 x_6 + \\ + m_0 h x_4 x_{10} + m_2 l_0 x_6 x_{10} + H_1(x_1, x_3) \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} k [x_1 - r_{01} \sin(\varphi_{01} - x_3) + r_{01} \sin \varphi_{01} + \lambda_1]^2 \right\} + \\ + H_2(x_1, x_3) \left\{ \frac{1}{2} k [x_1 - r_{02} \sin(\varphi_{02} + x_3) + r_{02} \sin \varphi_{02} + \lambda_2]^2 \right\} + \\ + m_0 g x_1 + m_2 g l_0 (1 - \cos x) - \frac{1}{2} k (\lambda_1^2 + \lambda_2^2),$$

jej pochodna zupełna związana z układem (3.7) bez zaburzeń ma postać

$$(3.10) \quad \dot{V}_L = -H_1(x_1, x_3) c [x_2 + r_{01} x_4 \cos(\varphi_{01} - x_3)]^2 - \\ - H_2(x_1, x_3) c [x_2 - r_{02} x_4 \cos(\varphi_{02} + x_3)]^2,$$

a więc jest identyczna z (2.3). Funkcja (3.9) różni się od (3.1) addytywnym wyrazem dodatnio określonym, który nie zmienia własności funkcji. Zatem w obszarze

$$(3.11) \quad \Gamma_1 = \{x : V_L(x) < A\}, \quad x = \text{col} [x_1, \dots, x_6, x_{10}]$$

układ bez zaburzeń jest stabilny i to asymptotycznie.

Wobec tego, że

$$(3.12) \quad \Gamma \subset \Gamma_1 \text{ i } \Gamma = \Gamma_1|_{x_{10}=0}$$

wystarczy zapewnić stateczność w  $\Gamma_1$ .

Wykażemy, że przy istnieniu zaburzeń (3.8) dostatecznie małych w sensie całek

$$(3.13) \quad \int_0^t |\dot{v}_j(t)| dt \quad \text{i} \quad \int_0^t |R_4(t_1, x_{10})| dt$$

i danym obszarze  $\gamma_1 \subset \Gamma_1$

$$(3.14) \quad \gamma_1 = \{x : V_L(x) \leq \delta\}, \quad 0 < \delta < A$$

układ (3.7) jest technicznie stateczny, tzn. przy danym obszarze  $\Gamma$  i zaburzeniach (3.8) dostatecznie małych w sensie (3.13) żadna trajektoria wychodząca z  $\gamma_1$  nie opuści  $\Gamma_1$ . Weźmy pochodną zupełną funkcji (3.9) wzdłuż trajektorii układu (3.7) z zaburzeniami (3.8):

$$(3.15) \quad \dot{V}_L = -H_1(x_1, x_3) c [x_2 + r_{01} x_4 \cos(\varphi_{01} - x_3)]^2 - H_2(x_1, x_3) c [x_2 - \\ - r_{02} x_4 \cos(\varphi_{02} + x_3)]^2 - (m_0 h x_4 + m_2 l_0 x_6) \dot{v}_j(t) + x_{10} R_4(t, x_{10}),$$

Całkując powyższe funkcje otrzymujemy następujące oszacowanie:

$$(3.16) \quad V_L(t, x(t)) - V_L(0, x(0)) = \int_0^t \dot{V}_L dt \leq \sup_{x_4, x_6, x_{10} \in \Gamma_1} [a(m_0 hx_4 + m_2 l_0 x_6) + bx_{10}],$$

gdzie

$$a = \int_0^t |\dot{v}_j(t)| dt,$$

$$b = \int_0^t |R(t, x_{10})| dt.$$

Warunek nieopuszczania przez trajektorie obszaru  $\Gamma_1$  ma postać

$$(3.17) \quad V_L(t, x(t)) < A,$$

a na mocy (3.16) otrzymujemy

$$(3.18) \quad \delta = V_L(0, x(0)) \leq A - \sup_{x_4, x_6, x_{10} \in \Gamma_1} [a(m_0 hx_4 + m_2 l_0 x_6) + bx_{10}],$$

warunek wiążący obszar dopuszczalnych zaburzeń początkowych  $\gamma_1$  i zaburzeń stale działających przy danym obszarze  $\Gamma_1$ , co bezpośrednio dowodzi stateczności.

Praktyczne wykorzystanie (3.18) wymaga obliczenia całek (3.13).

Rozważmy dla przykładu napęd jazdy żurawia silnikiem indukcyjnym zwartym. Charakterystykę tego silnika przedstawia rys. 3. Załóżmy, że znamy funkcję  $P(v)$ . Pierwszą z całek (3.13) oblicza się bardzo łatwo. Istotnie, korzystając z równania (3.4) można zmieniając skalę osi odciętych (rys. 3) otrzymać bezpośrednio wykres funkcji  $V_j(t)$ .

Drugą z całek szacujemy następująco. Zakładamy, że znaleźliśmy funkcję nieujemną w przedziale  $[0, T]$  i taką, że

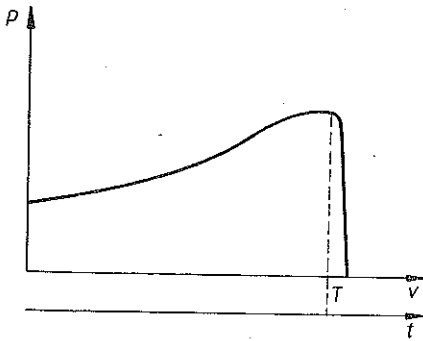
$$(3.19) \quad |R(t, x_{10})| \leq \varphi(t)$$

dla wszystkich  $x_{10} \in \Gamma_1$ . Za prawy koniec przedziału uważamy chwilę czasu  $T$ , w której funkcja  $P(v)$  osiąga maksimum. Mamy więc

$$(3.20) \quad b = \int_0^T \varphi(t) dt \geq \int_0^T |R(t, x_{10})| dt.$$

Możliwość ograniczenia się do rozważenia przedziału czasu  $[0, T]$  wynika z faktu, że pierwsza z całek, ze względu na bardzo stromy (w realnych układach napędowych) przebieg końcowej części charakterystyki spełnia warunek

$$(3.21) \quad a = \int_0^T |\dot{v}_j(t)| dt \approx \int_0^t |\dot{v}_j(t)| dt$$



Rys. 3

dla wszystkich  $t > T$  z bardzo dobrym przybliżeniem. W świetle powyższego

$$(3.22) \quad V_L(x(T)) = \max_i V_{L_i}.$$

Istotnie, dla  $t > T$

$$(3.23) \quad \dot{v}_j(t) \approx 0$$

oraz

$$(3.24) \quad R_4(t, x_{10}) x_{10} < 0.$$

Na mocy (3.15) funkcja  $V_L$  jest nierosnąca, czyli ruch żurawia jest stateczny względem współrzędnych  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  i dodatkowo  $x_{10}$  przy jeździe z ładunkiem po poziomym torze.

#### LITERATURA CYTOWANIA W TEKŚCIE

1. J. LA SALLE, S. LEFSCHETZ, *Zarys teorii stabilności Lapunowa i jego metody bezpośredniej*, PWN, Warszawa 1966.
2. B. SKALMIERSKI, A. TYLIKOWSKI, *Stabilność układów dynamicznych*, PWN, Warszawa 1973.
3. Е. А. Барбашин, *Функции Ляпунова*, Наука, Москва 1970.
4. W. JEDLIŃSKI, *Metoda badania stateczności dynamicznej żurawia wieżowego*, ABM, XXI, 1974.
5. K. HOSLER, *Dynamische Standsicherheit von Turmdrehkränen*, Forden und Hebeun, 1971.
6. А. А. Зарещин, В. В. Момот, *О расчете устойчивости даценных кранов*, Строит. и дорож. машины № 1 1976.

#### Резюме

#### МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕДВИЖНЫХ КРАНОВ

В работе предложено использовать для исследования устойчивости кранов непосредственный метод Ляпунова и его обобщения. Представлена методика, позволяет эффективно оценить область устойчивости крана, а также привести достаточные условия устойчивости крана в случае существования возмущающих сил. Рассуждения проведены на примере передвижного крана и анализируется фаза разгона механизма перед движением.

#### SUMMARY

#### STABILITY ANALYSIS FOR A MOBILE CRANE

Direct Liapunov's method with some generalizations is applied to stability analysis of a crane. An approach is presented towards estimation of the stability range and prescribing conditions sufficient for stability under perturbing forces.

Discussion is related to special case of a mobile crane. An initial stage of motor operation starting is being studied in detail.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

*Praca została złożona w Redakcji dnia 10 marca 1978 r.*