

## DRGANIA POPRZECZNO-WZDŁUŻNE LIN O ZMIENNEJ DŁUGOŚCI

STANISŁAW MARCZYK i JÓZEF NIZIOŁ (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono wpływ drgań wzdluznych na drgania poprzeczne lin stalowych o zmiennej dlugosci. Wyznaczono amplitude i faze drgan poprzecznych zarowno z jedna jak i wieloma czestosciami. Okreslono strefy rezonansu oraz zbadano wplyw napiecia liny i predkosci skracania na wzrost amplitud i polozenie strefy rezonansu. Obliczenia wykonano wykorzystujac metody numeryczne oraz metody przyblizone rozwiazywania rownan ruzniczkowych czastkowych.

### WSTĘP

Liny stalowe są bardzo szeroko rozpowszechnione jako ciągnia i elementy nośne różnych urządzeń transportowych. Ich cechą charakterystyczną jest znaczna długość, elastyczność, lekkość i duża wytrzymałość na rozrywanie. Duże zastosowanie znalazły liny w urządzeniach transportu pionowego. Podczas eksploatacji tego typu urządzeń pojawiają się drgania poprzeczne i wzdluzne lin wyciagowych, co ma zasadniczy wplyw na wielkosc naprezen dynamicznych, a tym samym warunkuje niezawodnosc pracy tych lin. Ze względu na zmieniajace się w czasie pracy parametry liny wyciagowej, warunki brzegowe dla układu rownan ruzniczkowych czastkowych opisujacych drgania liny są zmiennymi w czasie, co utrudnia analize i nie pozwala na uzyskanie ścislych rozwiazyń na drodze analitycznej.

Problemem drgan lin o zmiennej dlugosci zajmowalo się wielu badaczy, szczególnie zaś grupa naukowców z Kijowa pod kierunkiem G. N. Sawina.

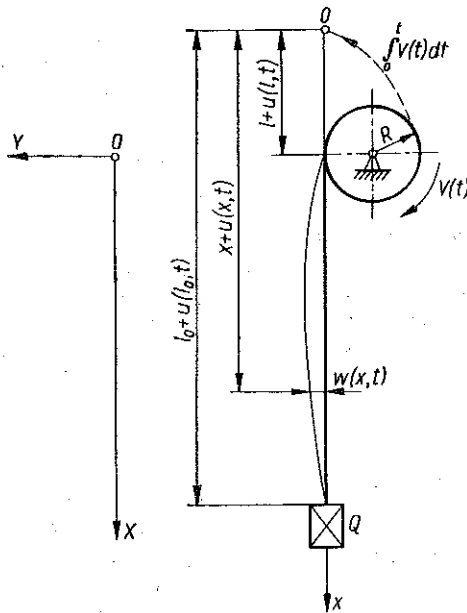
Przedstawiona ponizej praca poswiecona jest zbadaniu wplywu drgan wzdluznych na wielkosc amplitud drgan poprzecznych lin o zmiennej dlugosci obciagzonych na koncu.

### 1. RÓWNANIA RÓZNICZKOWE RUCHU LINY WYCIĄGOWEJ

Rozważmy układ przedstawiony na rysunku 1. Układ składa się z bębna wirującego z prędkością obwodową  $V(t)$ , na który nawija się lina stalowa obciążona ciężarem  $Q$ . Z liną związany jest ruchomy układ odniesienia  $oxz$  z początkiem w punkcie zamocowania liny na bębnie i osią skierowaną w dół liny. Nieruchomy układ odniesienia  $OXY$ , o osiach skierowanych jak na rysunku 1, umiejscowiony jest tak, że jego początek znajduje się w punkcie nabiegania liny na bęben.

Obciążenie  $Q$  traktujemy jako punkt materialny o jednym stopniu swobody, to znaczy możliwością ruchu wzdluz osi  $OX$ .

Składowe wektora przemieszczenia w kierunku osi  $OX$  i  $OY$  oznaczone są odpowiednio przez  $u(x, t)$  i  $w(x, t)$ . Długość liny w stanie nierozciągniętym wynosi  $l_0$ , długość jej części nawiniętej na bęben  $l$ .



Rys. 1.

Związek między współzrędnymi układów nieruchomego i ruchomego jest następujący:

$$(1.1) \quad X(x, t) = x + u(x, t) \mp \int_0^t V(t) dt,$$

$$Y(x, t) = w(x, t).$$

Znak minus we wzorze (1.1) odnosi się do przypadku podnoszenia ciężaru  $Q$ .

Jeśli pominiemy sztywność giętną liny, rozpraszanie energii, nieliniową inercyjność układu oraz założymy, że lina stosuje się do prawa Hooke'a, to równania różniczkowe ruchu przyjmują następującą postać [1]:

$$(1.2) \quad \frac{q}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EF \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = q \left( 1 \pm \frac{\dot{V}}{g} \right),$$

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EF \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0,$$

gdzie  $q$  oznacza ciężar jednostki długości liny,  $EF$  sztywność podłużna liny,  $\dot{V}$  pochodną prędkości obwodowej bębna względem czasu. Znak plus we wzorze (1.2) odnosi się do przypadku podnoszenia ciężaru.

Równania (1.2) stanowią układ równań różniczkowych cząstkowych drugiego rzędu. Drugie z układu równań (1.2) można przedstawić w postaci

$$\frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ N \frac{\partial w}{\partial x} \right] = 0,$$

gdzie  $N = EF (\partial u / \partial x)$  jest zmienną siłą osiową. Równanie to widać przedstawia drgania poprzeczne struny o zmiennym naciągu (zależnym od drgań wzdłużnych).

Sformułujemy warunki brzegowe dla przemieszczenia  $u(x, t)$ . W przypadku braku poślizgu liny na bębnie dla  $x = l$  mamy

$$(1.3) \quad u(l, t) = \int_0^l \frac{\partial u(l, t)}{\partial l} \frac{dl}{dt} dt.$$

Długość nawiniętej na bęben liny  $l(t)$  można obliczyć ze wzoru

$$(1.4) \quad l(t) \approx \int_0^t V(t) dt.$$

W punkcie  $x = l_0$  warunek brzegowy przyjmuje postać

$$(1.5) \quad \frac{Q}{g} \frac{\partial^2 u(l_0, t)}{\partial t^2} + EF \frac{\partial u(l_0, t)}{\partial x} = Q \left( 1 \pm \frac{\dot{V}}{g} \right).$$

Warunki brzegowe dla funkcji  $w(x, t)$  są następujące:

$$(1.6) \quad w(l, t) = w(l_0, t) = 0.$$

Warunki początkowe dla  $u(x, t)$  i  $w(x, t)$  napiszemy ogólnie w postaci

$$(1.7) \quad \begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= f_2(x); \end{aligned}$$

$$(1.8) \quad \begin{aligned} w(x, 0) &= f_3(x), \\ \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} &= f_4(x). \end{aligned}$$

Rozpatrywane zagadnienie drgań poprzeczno-wzdłużnych urządzenia wyciągowego sprowadziliśmy do rozwiązania układu równań różniczkowych (1.2) z warunkami brzegowymi (1.3), (1.5) i (1.6) oraz z warunkami początkowymi (1.7) i (1.8).

Pierwsze z równań (1.2) opisuje drgania wzdłużne liny i zawiera tylko jedną nieznaną funkcję  $u(x, t)$ . Zasadniczą trudnością występującą przy rozwiązywaniu tego równania jest fakt, że długość drgającej liny, a co za tym idzie warunek brzegowy (1.3) dla przemieszczenia  $u(x, t)$ , są zmienne w czasie. Wynika stąd potrzeba poszukiwania  $u(x, t)$  metodami przybliżonymi.

Szczegółowa analiza drgań wzdłużnych lin o zmiennej długości opisana została w pracy [1]. Znalezione tam rozwiązanie drgań wzdłużnych z częstością podstawową ma następującą postać:

$$(1.9) \quad u(x, t) = u(l, t) + \frac{x-l}{EF} \left( Q + q \frac{2l_0 - x - l}{2} \right) \left( 1 \pm \frac{\dot{V}}{g} \right) + \\ + (x-l) a_0 \sqrt[4]{\frac{l_0}{l_0 - l}} \cos(\psi_1 + \gamma_0).$$

Wyrazy równania (1.9) mają następujący sens fizyczny:  $u(l, t)$  oznacza deformację części liny nawiniętej na bęben, wyraz drugi to quasi-statyczne wydłużenie swobodnej części liny spowodowane ciężarem własnym oraz obciążeniem  $Q$ , wyraz trzeci określa deformację dynamiczną, efekt drgań podłużnych. Przez  $a_0$  i  $\gamma_0$  oznaczono stałe, które można wyliczyć z warunków początkowych, a  $\psi_1$  kąt fazowy związany z częstością podstawową  $\nu$  zależnością

$$(1.10) \quad \frac{d\psi_1}{dt} = \sqrt{\frac{EFg}{\left[ Q + q \frac{l_0 - l}{3} \right] (l_0 - l)}} = \nu.$$

Na podstawie wzoru (1.9) można wyliczyć naprężenia rozciągające w linie:

$$(1.11) \quad N = EF \frac{\partial u}{\partial x} = \left( 1 \pm \frac{\dot{V}}{g} \right) [Q + q(l_0 - x)] + EFa_0 \sqrt[4]{\frac{l_0}{l_0 - l}} \cos(\psi_1 + \gamma_0).$$

Z warunków (1.9), (1.10) i (1.11) wynika, że skrócenie długości drgającej liny powoduje wzrost amplitudy i częstości drgań wzdłużnych oraz zwiększenie naprężenia dynamicznego.

## 2. DRGANIA POPRZECZNE

Drgania poprzeczne liny opisuje drugie równanie różniczkowe układu (1.2). Podstawiając do niego funkcję  $u(x, t)$  określoną wzorem (1.9), otrzymamy równanie zawierające tylko jedną nieznaną funkcję  $w(x, t)$ :

$$(2.1) \quad \frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[ Q + q(l_0 - x) \right] \left( 1 \pm \frac{\dot{V}}{g} \right) + EFa_0 \sqrt[4]{\frac{l_0}{l_0 - l}} \cos \psi \right\} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \psi = \psi_1 + \gamma_0.$$

Przed przystąpieniem do rozwiązywania równania (2.1) zwróćmy uwagę, jak zmienia się w czasie długość drgającej liny. Istotnym jest fakt «slabej» zależności tego parametru od czasu. Oznacza to, że przyrost długości liny jest nieznaczny w ciągu okresu drgań układu. Wielkość  $l(t)$  będziemy traktować jako funkcję wolnego czasu  $\tau$  związanego z  $t$  zależnością

$$(2.2) \quad \tau = \varepsilon t,$$

gdzie  $\varepsilon$  oznacza bezwymiarowy, mały, dodatni parametr.

Rozwiązanie równanie (2.1) poszukujemy w postaci

$$(2.3) \quad w(x, t) = \sum_n y_n(x, t) z_n(t).$$

Funkcje  $y_n(x, t)$  to wolno zmienne formy drgań liny. Dobieramy je w takiej samej postaci, jak formy drgań struny o stałej długości [2]:

$$(2.4) \quad y_n = \sin \frac{n\pi(x-l)}{l_0-l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

Funkcje (2.4) spełniają warunki brzegowe (1.6) narzucone funkcji  $w(x, t)$ , ponadto są ortogonalne w przedziale  $[l; l_0]$ . Funkcje  $z_n(t)$  obrazują zmienność w czasie położenia poszczególnych punktów liny w kierunku osi  $OY$ . Będziemy je poszukiwać wykorzystując metodę Galerkinia oraz metodę asymptotyczną.

Podstawmy (2.3) do (2.1). Tak otrzymane równanie mnożymy przez  $\sin k\pi(x-l)/(l_0-l)$ , a następnie całkujemy w granicach od  $l$  do  $l_0$  względem niewiadomej  $x$ . W efekcie otrzymujemy następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$(2.5) \quad \ddot{z}_k(t) + \omega_k^2 [1 + h(l) \cos \psi(t)] z_k(t) = - \sum_{\substack{n \neq k \\ n+k \neq 2c}} \left(1 \pm \frac{\dot{V}}{g}\right) \frac{4g}{l_0-l} \times \\ \times \frac{kn(n^2+k^2)}{(k^2-n^2)^2} Z_n(t) + \varepsilon \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0-l} + \sum_{n \neq k} \varepsilon \frac{4kn}{k^2-n^2} \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0-l} \dot{z}_n(t) + \varepsilon^2 \dots, \\ k = 1, 2, 3, \dots, \quad c \in \{N\}.$$

Przez  $\omega_k$  i  $h$  oznaczono następujące funkcje:

$$(2.6) \quad \omega_k^2(l) = \frac{k^2 \pi^2 g}{q(l_0-l)^2} \left(1 \pm \frac{\dot{V}}{g}\right) [Q + 0, 5q(l_0-l)],$$

$$(2.7) \quad h(l) = \dot{a}_0 \sqrt{\frac{l_0}{l_0-l}} \frac{EF}{\left(1 \pm \frac{\dot{V}}{g}\right) [Q + 0, 5q(l_0-l)]}.$$

Jeśli ograniczymy się w sumie (2.5) do jednego wyrazu, to uzyskamy równanie podobne do równania Mathieu. Występuje w nim współczynnik okresowy  $\cos \psi$  z okresem  $2\pi$ , natomiast  $h(l)$  określony wzorem (2.7) przedstawia stosunek amplitudy siły dynamicznej do siły statycznej.

Istotną różnicę stanowi fakt, że współczynniki nieokresowe, takie jak  $\omega(l)$ ,  $v(l)$ ,  $h(l)$ ,  $l_0-l$  są «słabo» zależne od czasu w znaczeniu uprzednio podanym.

Z analizy równania Mathieu wynika, że główny rezonans parametryczny zachodzi wtedy, gdy częstość drgań własnych układu równa się połowie częstości drgań

siły wymuszającej, to znaczy gdy  $\omega_k = 0,5 \nu$ . Wykazano też, że jeśli w układzie występuje nawet słabe tłumienie, to rezonanse o wyższych częstościach praktycznie nie występują.

Ze względu na podobieństwo równań (2.5) do równania Mathieu, będziemy badać zachowanie się układu w obszarze, gdzie  $\omega_k \approx 0,5 \nu$ . Uwzględniając silne tłumienie w linach pominiemy badanie rezonansów o wyższych częstościach.

Rozważmy przypadek, gdy drgania poprzeczne linii odbywają się z częstością podstawową. Wtedy  $k = n = 1$ , a układ (2.5) przyjmuje postać

$$(2.8) \quad \ddot{z} + \omega^2 z = \varepsilon f(\tau, \psi, z, \dot{z}).$$

Funkcja  $f = \frac{l_0}{d\tau} \frac{1}{l_0 - l} \dot{z} - \frac{\omega^2 h}{\varepsilon} \cos \psi z$  jest okresowa względem  $\psi$  z okresem  $2\pi$ , przy czym  $\omega$  jest dodatnie w całym przedziale określoności funkcji  $z(t)$ .

Opierając się na metodzie asymptotycznej [3], zbudujemy ogólne rozwiązanie równania (2.8) odnoszące się zarówno do strefy nierezonansowej, jak i do strefy rezonansu.

Na amplitudę drgań poprzecznych wpływa różnica faz drgań poprzecznych i wzdłużnych określona wzorem:

$$(2.9) \quad \vartheta_1 = \eta - 0,5 \psi + c.$$

Dla wygody dalszych obliczeń wprowadźmy nowy kąt fazowy  $\vartheta = \vartheta_1 - c$ . Współczynnik 0,5 kąta fazowego  $\psi$  uwzględnia fakt, że badamy warunek powstania głównego rezonansu parametrycznego w układzie.

Wykorzystując (2.9), budujemy szereg asymptotyczny spełniający równanie (2.8) z daną dokładnością  $\varepsilon^{m+1}$ .

$$(2.10) \quad z(t) = a(t) \cos [0,5 \psi(t) + \vartheta(t)] + \varepsilon u_1(\tau, a(t), 0,5 \psi(t) + \vartheta(t)) + \\ + \varepsilon^2 u_2(\tau, a, 0,5 \psi + \vartheta) + \dots + \varepsilon^m u_m(\tau, a, 0,5 \psi + \vartheta).$$

Przez  $a$  oznaczono amplitudę podstawowej harmonicznej. Funkcje  $u_i$  okresowe względem  $\psi$  i  $0,5\psi + \vartheta$  z okresem  $2\pi$ , uwzględniają powstanie drgań z wyższymi częstotliwościami na skutek zależności współczynników równania (2.8) od czasu.

Wielkość  $a$  i  $\vartheta$  należy wyznaczyć z układu równań

$$(2.11) \quad \dot{a} = \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^3 \dots ; \\ \dot{\vartheta} = \omega - 0,5 \nu + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \vartheta) + \varepsilon^3 \dots$$

Ograniczając się do pierwszego przybliżenia przyjmiemy

$$(2.12) \quad z = a \cos(0,5\psi + \vartheta),$$

$$(2.13) \quad \dot{a} = \varepsilon A_1(\tau, a, \vartheta), \\ \dot{\vartheta} = \omega - 0,5 \nu + \varepsilon B_1(\tau, a, \vartheta).$$

Aby obliczyć  $a$  i  $\vartheta$  należy znaleźć nieznanne funkcje  $A_1$  i  $B_1$ . W tym celu wykorzystując zależności (2.13), podstawiamy (2.12) do (2.8), a następnie porównujemy współczynniki przy jednakowych harmonikach kąta  $\eta$ :

$$(2.14) \quad (\omega - 0,5\nu) \frac{\partial A_1}{\partial \vartheta} - 2a\omega B_1 = -\frac{\omega^2 ah_1}{2} \cos 2\vartheta,$$

$$(\omega - 0,5\nu) a \frac{\partial B_1}{\partial \vartheta} + 2\omega A_1 + \frac{d\omega}{d\tau} a = \frac{\omega^2 ah_1}{2} \sin 2\vartheta + \omega a \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0 - l}.$$

Przez  $h_1$  oznaczono iloraz  $h_1 = h/\varepsilon$ .

Rozwiązanie równań (2.14) pozwala wyznaczyć  $A_1$  i  $B_1$ .

$$(2.15) \quad A_1 = \frac{\omega^2 ah_1}{2\nu} \sin 2\vartheta + \frac{1}{2} \frac{dl}{d\tau} \frac{a}{l_0 - l} - \frac{1}{2} \frac{d\omega}{d\tau} \frac{a}{\omega},$$

$$B_1 = \frac{\omega^2 h_1}{2\nu} \cos 2\vartheta$$

oraz określić pochodne amplitudy i kąta  $\vartheta$ .

$$(2.16) \quad \dot{a} = \frac{\omega^2 ah}{2\nu} \sin 2\vartheta + \frac{a}{2} \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0 - l} - \frac{a}{2} \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau},$$

$$\dot{\vartheta} = \omega - 0,5\nu + \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta.$$

Funkcje  $a$  i  $\vartheta$  będziemy poszukiwać w okresie podnoszenia obciążenia  $Q$  ze stałą prędkością. Długość nawiniętej na bęben liny zmienia się w tym czasie według wzoru:

$$(2.17) \quad l = l_1 + Vt.$$

W okresie ruchu ustalonego suma dwóch ostatnich wyrazów pierwszego z równań (2.16) równa się w przybliżeniu zeru. Równania (2.16) przepiszemy zatem w postaci:

$$(2.18) \quad \dot{a} = \frac{\omega^2 ah}{2\nu} \sin 2\vartheta,$$

$$\dot{\vartheta} = \omega - 0,5\nu + \frac{h\omega^2}{2\nu} \cos 2\vartheta.$$

Zbadajmy stabilność rozwiązań układu równań. Wprowadźmy zmianę zmiennych

$$(2.19) \quad x_1 = a \cos \vartheta, \quad x_2 = a \sin \vartheta,$$

$$a = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \vartheta = \arctg \frac{x_2}{x_1}.$$

Stąd

$$(2.20) \quad \dot{x}_1 = \dot{a} \cos \vartheta - a\dot{\vartheta} \sin \vartheta,$$

$$\dot{x}_2 = \dot{a} \sin \vartheta + a\dot{\vartheta} \cos \vartheta.$$

Po wykorzystaniu (2.18) otrzymamy liniowy układ równań:

$$(2.21) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= \left[ \frac{\omega^2 h}{2\nu} - \omega + 0,5\nu \right] x_2, \\ \dot{x}_2 &= \left[ \frac{\omega^2 h}{2\nu} + \omega - 0,5\nu \right] x_1. \end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne dla układu równań (2.21) ma postać

$$(2.22) \quad r^2 - \frac{\omega^4 h^2}{4\nu^2} + (\omega - 0,5\nu)^2 = 0.$$

Jeżeli spełniony będzie warunek

$$(2.23) \quad |\omega - 0,5\nu| \leq \frac{\omega^2 h}{2\nu},$$

to wówczas ruch będzie niestabilny. Z prostych przeliczeń wynika, że dla  $h < 1$  nierówność (2.23) jest spełniona, jeżeli

$$(2.24) \quad \frac{\sqrt{1+h}-1}{h} \leq \frac{\omega}{\nu} \leq \frac{\sqrt{1-h}+1}{h},$$

co w przybliżeniu daje

$$(2.25) \quad 0,5 - \frac{1}{8} \leq \frac{\omega}{\nu} \leq 0,5 + \frac{1}{8} h.$$

Dla  $h > 1$  ruch jest niestabilny, jeżeli  $\frac{\omega}{\nu} \geq \frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$ .

Rozważmy teraz przypadek, gdy drgania poprzeczne liny odbywają się z wieloma cząsteczkami. Układ równań (2.5) opisujący zmianę w czasie położenia poszczególnych punktów liny w kierunku osi OY przepiszemy w postaci

$$(2.26) \quad \ddot{z}_k + \omega_k^2 z = \varepsilon F_k(\tau, \psi, z, \dot{z}) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Funkcje

$$\begin{aligned} \varepsilon F_k = \varepsilon \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0 - l} \dot{z}_k + \varepsilon \sum_{n \neq k} \frac{4kn}{k^2 - n^2} \frac{dl}{d\tau} \frac{1}{l_0 - l} \dot{z}_n - \\ - \sum_{\substack{n \neq k \\ n+k \neq 2c}} \frac{4ng(n^2 + k^2)k}{(k^2 - n^2)^2 l_0 - l} z_n - \omega_k^2 h \cos \psi z_k. \end{aligned}$$

są okresowe względem  $\psi$  z okresem  $2\pi$ .

Układ równań (2.26) można rozwiązywać metodą asymptotyczną. Wiąże się to z koniecznością rozwiązywania układu równań różniczkowych względem  $A_k$  i  $B_k$ . Postąpimy jednak nieco inaczej. Zajmiemy się analizą drgań w otoczeniu jednego



z rezonansów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że drgania parametryczne występują dla pierwszej harmonicznej:

$$(2.27) \quad \omega_1^2 = \left(\frac{v}{2}\right)^2 + \varepsilon A.$$

W tym samym momencie drgania z wyższymi częstotliwościami odbywają się z dala od rezonansu. Zgodnie z metodą BOGOLUBOWA-KRYŁOWA [3] funkcję  $z_1$  przyjmujemy w postaci

$$(2.28) \quad z_1 = a_1 \cos(0,5 \psi + \vartheta_1),$$

i żądamy, aby

$$(2.29) \quad \dot{z}_1 = -a_1 \omega_1 \sin(0,5 \psi + \vartheta_1).$$

Argument funkcji cosinus we wzorze (2.28) uwzględnia fakt, że kąt fazowy pierwszej harmonicznej różni się o niewielką wartość  $\vartheta_1$  od połowy kąta fazowego drgań wzdłużnych.

Pozostałe funkcje  $z_k$  przyjmujemy w postaci

$$(2.30) \quad z_k = a_k \cos \vartheta_k$$

i żądamy, aby

$$(2.31) \quad \dot{z}_k = -a_k \omega_k \sin \vartheta_k.$$

Układ równań (2.26), (2.28) i (2.29) pozwala na wyliczenie  $\dot{a}_1$  i  $\dot{\vartheta}_1$ :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{d\omega_1}{d\tau} a_1 \frac{\varepsilon}{\omega_1} \sin^2(0,5 \psi + \vartheta_1) - \frac{\varepsilon}{\omega_1} F_1 \sin(0,5 \psi + \vartheta_1), \\ \dot{\vartheta}_1 &= \omega_1 - 0,5 v - \frac{\varepsilon}{\omega_1} \frac{d\omega_1}{d\tau} \sin(0,5 \psi + \vartheta_1) \cos(0,5 \psi + \vartheta_1) - \\ &\quad - \frac{1}{a_1 \omega_1} F_1 \cos(0,5 \psi + \vartheta_1). \end{aligned}$$

Z równań (2.26), (2.30) i (2.31) obliczymy  $\dot{a}_k$  i  $\dot{\vartheta}_k$ :

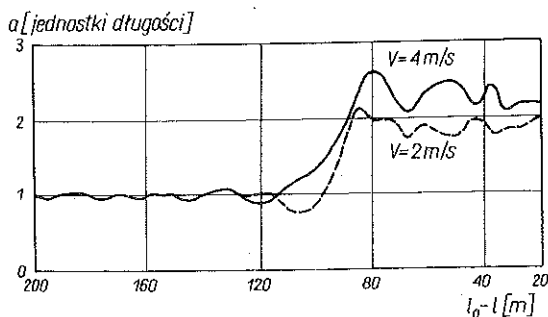
$$(2.33) \quad \begin{aligned} \dot{a}_k &= -\frac{\varepsilon}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{d\tau} a_k \sin^2 \vartheta_k - \frac{\varepsilon}{\omega_k} F_k \sin \vartheta_k, \\ \dot{\vartheta}_k &= \omega_k - \frac{\varepsilon}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{d\tau} \sin \vartheta_k \cos \vartheta_k - \frac{\varepsilon}{a_k \omega_k} F_k \cos \vartheta_k. \end{aligned}$$

Układ równań (2.32), (2.33) jest dogodny do rozwiązywania metodami numerycznymi. Krzywe całkowe są regularne i stosunkowo niewielka ilość kroków całkowania prowadzi do dokładnych wyników.

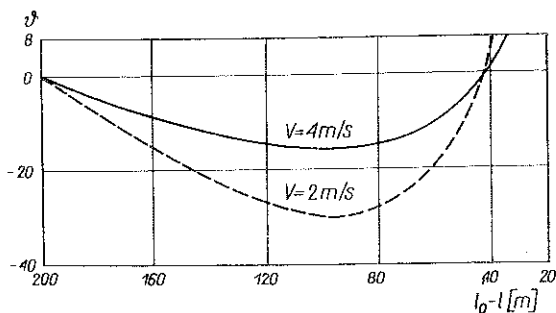
## 3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

W pierwszej kolejności rozwiązano układ równań (2.18) w przedziale czasu, w którym ładunek  $Q$  podnoszony jest ze stałą prędkością. Dobrano następujące parametry układu wyciągowego: 1) lina typu Seale  $6 \times 19 + R$ , 2) średnica liny  $d = 16$  [mm], 3) sztywność podłużna  $EF = 16,8 \cdot 10^5$  [kG], 4) ciężar jednego metra smarowanej liny  $q = 1$  [kG/m], 5) długość liny  $l_0 = 200$  [m], 6) długość kroku całkowania  $H = 0,005$  [s] oraz 7) amplituda początkowa drgań poprzecznych  $a_0 = 1$  [jednostka długości].

Metoda numerycznego rozwiązywania równań opisujących amplitudę i fazę drgań poprzecznych nie pozwala na wyciągnięcie wniosków bez uprzedniego przeprowadzenia obliczeń dla różnych wariantów obciążenia i prędkości układu wyciągowego. Zmianę amplitudy i fazy przy różnych prędkościach podnoszenia i stałym obciążeniu  $Q = 2000$  [kG] ilustruje rys. 2 i 3. Jak widzimy, amplituda drgań, która w strefie



Rys. 2.



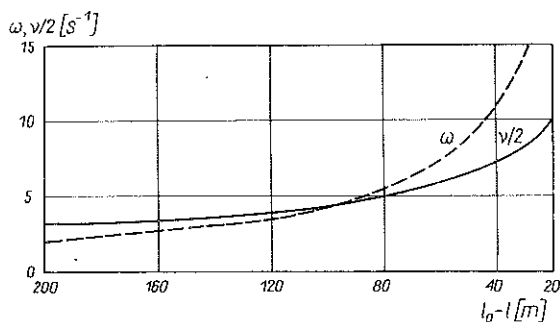
Rys. 3.

nierezonansowej jest stała, w momencie przejścia przez rezonans wzrasta około dwa i pół raza. Różnica faz w strefie rezonansu osiąga minimum.

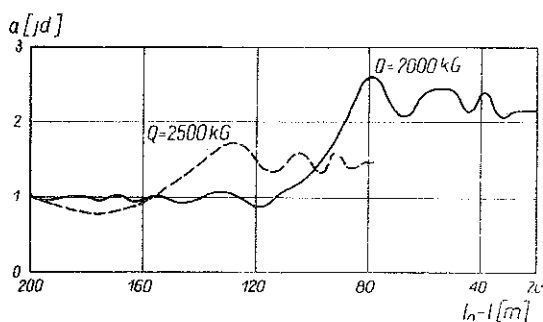
Z rys. 2 łatwo odczytać szerokość obszaru rezonansu. W chwili gdy  $\varphi$  osiąga minimum, krzywe  $\omega(l)$  i  $0,5v(l)$  przecinają się (rys. 4).

Z rys. 2 i 3 wynika, że zmiana prędkości spowodowała niewielkie zmniejszenie amplitudy oraz szerokości strefy rezonansu.

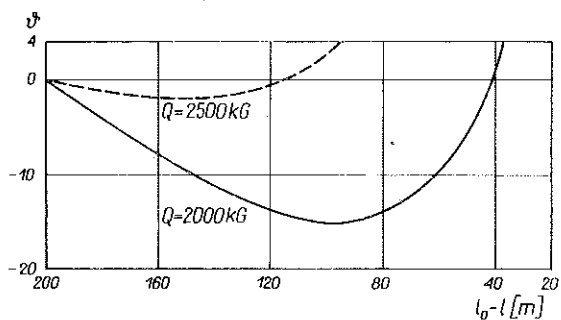
Z kolei zbadano wpływ napięcia liny na przebieg amplitudy i kąta fazowego przy stałej prędkości podnoszenia  $V=4$  [m/s], (rys. 5 i 6). Okazuje się, że wzrost siły rozciągającej zmniejsza przyrost amplitudy w czasie rezonansu, a ponadto wpływa na położenie strefy rezonansowej.



Rys. 4.



Rys. 5.



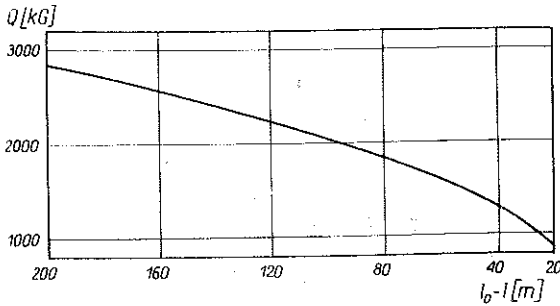
Rys. 6.

Z zależności między częstotliwościami drgań wzdlużnych i poprzecznych w strefie rezonansu  $\omega=0,5v$ , uwzględniając że  $Q \ll EF$ , można wyliczyć długość liny, przy której zachodzi rezonans:

$$(3.1) \quad l_0 - l \approx \frac{4\pi^2 k^2 Q^2}{EFq}$$

Wzór (3.1) zilustrowany jest rys. 7.

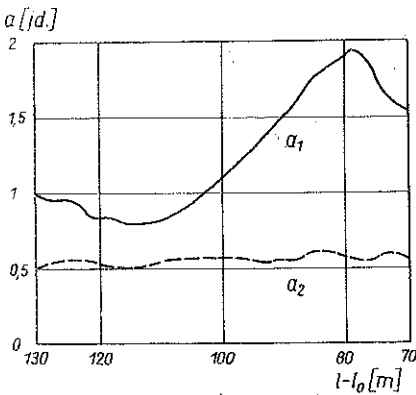
Układ równań (2.32), (2.33) rozwiązano przyjmując  $k=2$ . Typ i rozmiary liny pozostały niezmiennione. Pozostałe parametry dobrano następująco: 1) obciążenie  $Q=2000$  [kG] oraz 2) prędkość ruchu ustalonego  $V=4$  [m].



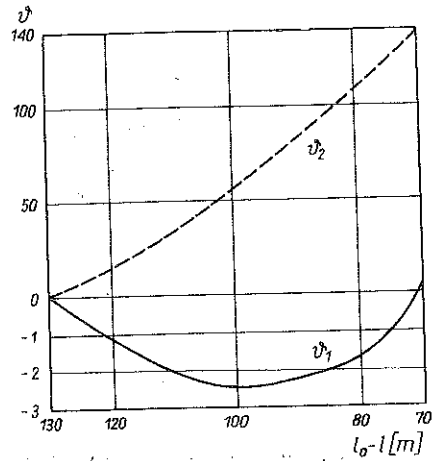
Rys. 7.

Na podstawie rozwiązania równań (2.18) określono głębokość podnoszenia, przy której nastąpi rezonans pierwszej harmonicznej drgań poprzecznych: 1) głębokość podnoszenia od 130 [m] do 70 [m], 2) amplituda początkowa  $a'_{10}=1$  [jednostki długości].

Aby zbadać wpływ drgań o wyższych częstotliwościach na drgania z częstotliwością podstawową, przyjęto kolejno  $a_{20}=0,5$  [jednostka długości] i  $a'_{20}=0,1$  [jednostka długości]. Obie fazy w chwili początkowej są równe zero. Wyniki obliczeń przedstawione są na rys. 8 i 9. Z rys. 8 wynika, że podczas gdy amplituda pierwszej har-



Rys. 8.



Rys. 9.

monicznej w strefie rezonansu wzrasta blisko dwukrotnie, to amplituda  $a_2$  jest prawie stała i oscyluje wokół wartości początkowej. Faza  $\vartheta_1$  osiąga w strefie rezonansu minimum (rys. 9), natomiast faza  $\vartheta_2$  monotonicznie wzrasta.

Obliczenia przeprowadzone dla dwóch różnych wartości początkowych amplitud  $a_2$  pokazują, że zmiana amplitudy drugiej harmonicznej wpływa w minimalnym stopniu na  $a_1$ ,  $\vartheta_1$  oraz  $\vartheta_2$ . Wynika stąd ważny fakt, że układ równań (2.26) jest bliski diagonalnemu, a zatem drgania zarówno pierwszej, jak i wyższych harmonicznych są opisane wystarczająco dokładnie przez układ równań

$$(3.2) \quad \ddot{z}_k + \omega_k^2 [1 + h(l) \cos \psi] z_k = \varepsilon \frac{dl}{dt} \frac{1}{l_0 - l} \dot{z}_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

Układ równań (3.2) można badać za pomocą metody asymptotycznej.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. N. SAWIN, O. A. GOROSZKO, *Dynamika niti pieriendemoj dliny*, AN USSR, Kijew 1962.
2. G. N. SAWIN, O. A. GOROSZKO, *O paramietriczeskom riezonzansie w podiennyh szachtnych ustanowkach*, Stalnyje kanaty, Kijew 1965.
3. N. N. BOGOLUBOW, J. A. MITROPOLSKIJ, *Asimptoticzeskije metody w teorii nieliniejnych kolebanij*, Gos. Izdat. Fiz.-Mat. Lit., Moskwa 1958.
4. J. A. MITROPOLSKIJ, *Metod usriednienija w nieliniejnoj miechanikie*, Naukowa Dumka, Kijew 1971.

#### Резюме

#### ПОПЕРЕЧНО-ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КАНАТОВ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ

В работе представлено влияние продольных колебаний на поперечные колебания стальных канатов переменной длины. Определены амплитуда и фаза поперечных колебаний так с одной, как и с многими частотами. Определены зоны резонанса, а также исследовано влияние натяжения каната и скорости укорачивания на рост амплитуд и положение зоны резонанса. Расчеты проведены, используя численные методы и приближенные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.

#### SUMMARY

#### LONGITUDINAL-TRANSVERSAL VIBRATIONS OF ROPES OF VARIABLE LENGTHS

An effect of longitudinal vibrations on transversal ones is studied for the steel-made ropes of varying length. Both an amplitude and phase are determined for single- and multifrequential transversal vibrations. While the resonance zones are also found. The effects of stretch and shortening-rate for their location and amplitude-variation are investigated. Approximative solutions for partial differential equations are utilized and some numerical calculations given.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 stycznia 1978 r.