

K O M U N I K A T Y

ANALITYCZNE, PRZYBLIŻONE ROZWIĄZYWANIE ZAGADNIENI PRZEWODZENIA CIEPŁA

JAN TAŁER (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono metodę przybliżonego rozwiązywania równań przewodzenia ciepła, stanowiącą modyfikację metody uśredniania funkcjonalnych poprawek. Zaproponowana metoda pozwala na konstrukcję funkcji przybliżającej rozkład temperatury, eliminując dowolność jej wyboru.

OZNACZENIA

- a promień wewnętrzny pierścienia,
 - b promień zewnętrzny pierścienia,
 - f współczynnik tarcia (strat),
 - G_1, G_2 operatory warunków granicznych,
 - r promień,
 - Re liczba Reynoldsa,
 - R_i operatory warunków granicznych,
 - S_i powierzchnie ograniczające objętość V ,
 - t czas,
 - T temperatura,
 - V_x składowa prędkości w kierunku osi pierścienia,
 - w moc źródła ciepła,
 - x, y, z współrzędne,
 - γ_1, γ_2 stałe,
 - θ kąt,
 - λ współczynnik przewodzenia ciepła,
 - μ współczynnik lepkości dynamicznej,
 - ξ stała,
 - ρ gęstość,
 - Φ_i funkcje ciągłe,
- $\omega = \frac{b}{a} = \frac{1}{k}$ stosunek promienia zewnętrznego pierścienia do wewnętrznego.

1. OPIS METODY

Niech rozważany obszar trzywymiarowy V ograniczony będzie płaszczyznami $r=a$ i $r=b$ w przypadku ciała płaskiego lub powierzchniami walcowymi lub kulistymi o promieniach $r=a$ i $r=b$ w przypadku ciał walcowych lub kulistych oraz powierzchnią $S = \bigcup_{i=1}^p S_i$, tworzące której są prostopadłe do danych powierzchni.

Niech ustalone pole temperatury określone będzie równaniem

$$(1.1) \quad L(T) = -\frac{w}{\lambda},$$

gdzie

$$(1.2) \quad L(T) = \nabla^2 T + \xi T$$

i warunkami brzegowymi

$$(1.3) \quad G_1(T)|_{r=a} = \gamma_1,$$

$$(1.4) \quad G_2(T)|_{r=b} = \gamma_2,$$

$$(1.5) \quad R_i(T)|_{S_i} = \Phi_i, \quad i=1, 2, 3, \dots, p.$$

Dodając do obu stron równania (1.1) wyrażenie

$$\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

i przenosząc na prawą stronę $L(T)$, równaniu (1.1) nadamy postać

$$(1.6) \quad \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T}{\partial r} \right) - L(T) - \frac{w}{\lambda}.$$

Następnie założmy, że temperatura przybliżona spełnia równanie

$$(1.7) \quad \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) = q_1,$$

gdzie

$$(1.8) \quad q_1 = \frac{m+1}{b^{m+1} - a^{m+1}} \int_a^b \left[\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) - L(T_1) - \frac{w}{\lambda} \right] r^m dr.$$

Łatwo zauważyć, że równanie (1.7) otrzymano z równania (1.6) po uśrednieniu prawej jego strony na powierzchni przekroju poprzecznego obszaru zawartego między powierzchniami $r=a$ i $r=b$. Przybliżony rozkład temperatury w pierwszym przybliżeniu otrzymuje się całkując dwukrotnie równanie (1.7):

dla $m=0$ (ciało płaskie)

$$(1.9) \quad T_1 = \frac{1}{2} q_1 r^2 + C_1 r + C_2;$$

dla $m=1$ (ciało walcowe)

$$(1.10) \quad T_1 = \frac{1}{4} q_1 r^2 + C_1 \ln r + C_2;$$

dla $m=2$ (ciało kuliste)

$$(1.11) \quad T_1 = \frac{1}{6} q_1 r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Stałe C_1 i C_2 (lub C_1 i q_1 , lub C_2 i q_1) zależnie od rodzaju warunków brzegowych (1.3) i (1.4) wyznacza się z warunków brzegowych (1.3) i (1.4).

Po wykorzystaniu (1.9), (1.10) lub (1.11), zależnie od kształtu ciała, do równania (1.8) otrzymuje się równanie różniczkowe dla określenia q_1 . Po rozwiązaniu otrzymanego równania i ponownym podstawieniu q_1 odpowiednio do jednego ze wzorów (1.9), (1.10) lub (1.11) otrzymuje się rozwiązanie równania (1.1) w pierwszym przybliżeniu. Stałe $C_i^{(1)}$, które pojawiają się przy określaniu q_1 wyznacza się z warunków (1.5), po ich uprzednim uśrednieniu na powierzchni przekroju poprzecznego obszaru zawartego między powierzchniami $r=a$ i $r=b$, tj. z warunków

$$(1.12) \quad \int_a^b R_i(T_1)|_{S_i} r^m dr = \int_a^b \Phi_i r^m dr.$$

W drugim i następnych przybliżeniach pole temperatury określa się wg procesu iteracyjnego [1]:

$$(1.13) \quad \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_{n-1}}{\partial r} \right) - L(T_{n-1}) - \frac{w}{\lambda} + q_n,$$

gdzie

$$(1.14) \quad q_n = \frac{m+1}{b^{m+1} - a^{m+1}} \int_a^b \left\{ \left[\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_n}{\partial r} \right) - L(T_n) - \frac{w}{\lambda} \right] - \left[\frac{1}{r^m} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^m \frac{\partial T_{n-1}}{\partial r} \right) - L(T_{n-1}) - \frac{w}{\lambda} \right] \right\} r^m dr.$$

Rozkład temperatury T_n w n -tym przybliżeniu wyznacza się całkując dwukrotnie (1.13).

Po wyznaczeniu dwóch stałych z warunków brzegowych (1.3) i (1.4) i podstawieniu T_n do (1.14) otrzymuje się równanie różniczkowe dla określenia q_n . Rozwiązując to równanie i podstawiając ponownie q_n do T_n otrzymuje się rozwiązanie równania (1.1) w n -tym przybliżeniu. Stałe $C_i^{(n)}$, które pojawiły się przy określaniu q_n wyznacza się podobnie jak w przypadku q_1 z warunków brzegowych (1.5) uśrednionych identycznie z pierwszym przybliżeniem, tj. z warunku

$$(1.15) \quad \int_a^b R_i(T)|_{S_i} r^m dr = \int_a^b \Phi_i r^m dr.$$

2. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

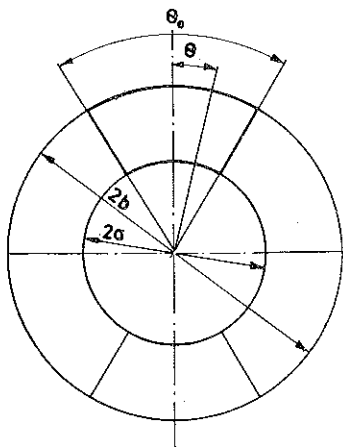
Zastosowanie metody zostanie zilustrowane na przykładzie określania przybliżonego źródłowego pola temperatury w sektorze pierścienia kołowego, na brzegu którego dana jest temperatura równa zero. Równanie różniczkowe opisujące dane zjawisko ma postać

$$(2.1) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = -\frac{w}{\lambda},$$

przy warunku brzegowym

$$(2.2) \quad T|_S = 0.$$

Równaniem tego samego typu, co (2.1), opisany jest laminarny, hydrodynamicznie ustabilizowany przepływ cieczy nieściślnej w wewnątrznie żebrowanym pierścieniu kołowym (rys. 1).



Rys. 1. Schemat wewnątrznie żebrowanego pierścienia kołowego

Ze względu na dostępność rozwiązania dokładnego przeanalizowany zostanie przepływ cieczy opisany równaniem

$$(2.3) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial v}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -\frac{f \operatorname{Re}}{4},$$

gdzie

$$R = \frac{r}{b}, \quad v = \frac{v_z}{v_{\text{sr}}}, \quad f = -\frac{\partial p}{\partial z} \frac{2b}{\rho v_{\text{sr}}^2}, \quad \operatorname{Re} = \frac{2b \rho v_{\text{sr}}}{\mu},$$

$$v_{\text{sr}} = \left(\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \int_a^b v_z r dr d\theta \right) \left(\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \int_a^b r dr d\theta \right)^{-1}.$$

Ponieważ żebra usytuowane są na obwodzie w jednakowej odległości, analizowany będzie segment pierścienia zaznaczony na rys. 1 grubą linią. Warunki brzegowe mają postać

$$(2.4) \quad v|_{R=k} = 0, \quad v|_{R=1} = 0,$$

$$(2.5) \quad v|_{\theta = \pm \frac{\theta_0}{2}} = 0.$$

Zagadnienie brzegowe (2.3)–(2.5) zostanie rozwiązane w pierwszym przybliżeniu. Równania (1.7) i (1.8) mają w rozważanym przypadku ($m=1$) postać

$$(2.6) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial v_1}{\partial R} \right) = q_1(\theta),$$

gdzie

$$(2.7) \quad q_1(\theta) = \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \left(-\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \theta^2} - \frac{f \operatorname{Re}}{4} \right) R dR.$$

Rozkład prędkości otrzymuje się całkując dwukrotnie (2.6) i wyznaczając stałe z warunków (2.4):

$$(2.8) \quad v_1 = \frac{1}{4} q_1 \left(R^2 + \frac{1-k^2}{\ln k} \ln R - 1 \right).$$

Podstawiając (2.8) do (2.7) otrzymuje się równanie

$$(2.9) \quad \frac{d^2 q_1}{d\theta^2} + \frac{4(1-k^2)}{1-k^2+(1+k^2)\ln k} q_1 = -f \operatorname{Re} \frac{1-k^2}{1-k^2+(1+k^2)\ln k}.$$

Rozwiązaniem powyższego równania przy warunku brzegowym (1.12), który w danym przypadku ma postać

$$(2.10) \quad \int_k^1 v_1 R dR \Big|_{\theta = \pm \frac{\theta_0}{2}} = 0,$$

jest funkcja $q_1(\theta)$. Podstawiając $q_1(\theta)$ do (2.8) otrzymuje się

$$(2.11) \quad v_1 = \frac{f \operatorname{Re}}{16} \left(\frac{\cos h \left(\frac{2\lambda_1 \theta}{\theta_0} \right)}{\cos h \lambda_1} - 1 \right) \left(R^2 + \frac{1-k^2}{\ln k} \ln R - 1 \right),$$

gdzie

$$\left(\frac{2\lambda_1}{\theta_0} \right)^2 = -\frac{4}{1 + \frac{1+k^2}{1-k^2} \ln k}.$$

Iloczyn $f \operatorname{Re}$ łatwo wyznaczyć z definicji prędkości średniej, napisanej w postaci bezwymiarowej:

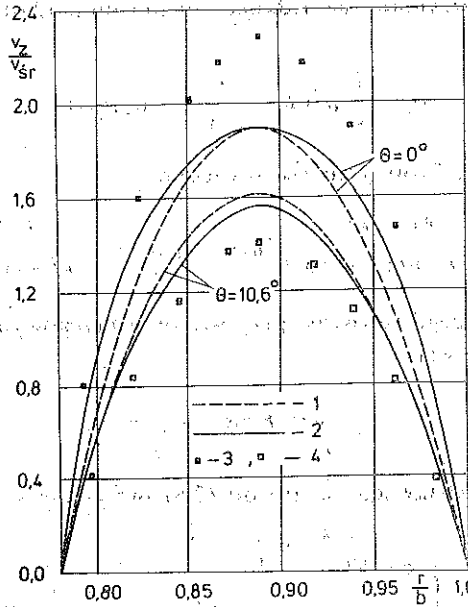
$$(2.12) \quad \left(\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \int_k^1 v_1 R dR d\theta \right) \left(\int_{-\frac{\theta_0}{2}}^{\frac{\theta_0}{2}} \int_k^1 R dR d\theta \right)^{-1} = 1.$$

Po podstawieniu (2.11) do (2.12) uzyskuje się

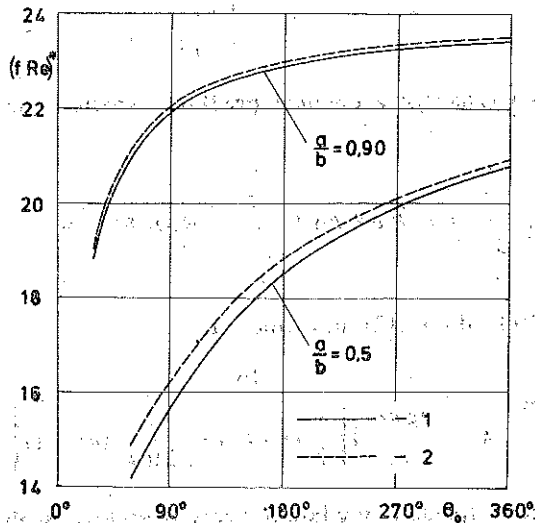
$$(2.13) \quad f \operatorname{Re} = \frac{16}{\left(1 - \frac{\operatorname{tg} h \lambda_1}{\lambda_1} \right) \left[\frac{1}{2} (1+k^2) - \frac{1}{2 \ln k} (k^2 - 1) \right]};$$

Na rys. 2 przedstawiono rozkłady prędkości cieczy w sektorze o stosunku promienia wewnętrznego do zewnętrznego równym $k=0,77922$ i kącie rozwarcia równym $\theta_0=36^\circ$ dla $\theta=0^\circ$ i $\theta=10,6^\circ$; porównano je również z wynikami otrzymanymi

za pomocą metody Kantorowicza i różnic skończonych [2]. Iloczyn $f Re$ obliczony dla opisanego wyżej sektora wg (2.13) wynosi $f Re = 1275,4$. SCHECHTER [2] rozwiązując to zagadnienie za pomocą metody Kantorowicza i różnic skończonych otrzymał odpowiednio liczby 1400 i 1314. Z przeprowadzonych porównań wynika, że



Rys. 2. Rozkład prędkości cieczy w sektorze pierścienia kołowego o wymiarach $k=0,77922$, $\theta_0=36^\circ$; 1 — wyniki uzyskane w niniejszej pracy (2.11); 2 — metodą różnic skończonych [2]; 3 — metodą KANTOROWICZA [2], $\theta=0^\circ$; 4 — metodą KANTOROWICZA [2], $\theta=10,6^\circ$



Rys. 3. Zmiany iloczynu współczynnika tarcia i liczby Reynoldsa $(f Re)^*$ w zależności od kąta θ_0 ; 1 — rozwiązanie w niniejszej pracy, 2 — rozwiązanie dokładne [3]

otrzymane w niniejszej pracy rozwiązanie daje dokładniejsze wyniki niż otrzymane za pomocą metody Kantorowicza.

O przydatności otrzymanego rozwiązania do obliczania iloczynu współczynnika tarcia i liczby Reynoldsa można przekonać się porównując przybliżone wartości fRe z dokładnymi [3] dla różnych wartości θ_0 i k . Między iloczynem fRe zdefiniowanym w niniejszej pracy i iloczynem $(fRe)^*$ określonym w pracy [3] zachodzi zależność

$$(2.14) \quad (fRe)^* = fRe \frac{2\theta_0(\omega^2 - 1)}{8\omega^2 [\theta_0(\omega + 1) + 2(\omega - 1)]}$$

Na rysunku 3 przedstawiono porównanie dokładnych wartości $(fRe)^*$ [3] z przybliżonymi dla różnych θ_0 oraz $k=0,9$ i $k=0,5$. Wartości przybliżone obliczono wg (2.14) z uwzględnieniem (2.13). Dla małych θ_0 porównanie takie przedstawiono w tabelicy 1. W dolnych wierszach podano przybliżone iloczyny $(fRe)^*$, w górnych dokładne [3].

Tablica 1. Porównanie iloczynu $(fRe)^*$ obliczonego wg (2.14) z uwzględnieniem (2.13) z iloczynem dokładnym [3]. W dolnych wierszach podano wartości przybliżone

$\theta_0 \backslash k$	5°	10°	15°	20°	30°	40°	50°	60°
0,5	19,14	17,37	16,13	15,30	14,47	14,33	14,52	14,88
	19,89	16,90	15,13	14,11	13,31	13,33	13,69	14,17
0,9	14,35	14,98	16,36	17,51	19,07	20,05	20,71	21,18
	13,04	14,28	15,90	17,15	18,82	19,85	20,54	21,03

3. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona w pracy metoda, stanowiąca modyfikację metody uśredniania funkcjonalnych poprawek [1], zastosowana do równań eliptycznych, pozwala na łatwy wybór funkcji przybliżającej, uwzględniającej kształt rozpatrywanego ciała. Dodatkową zaletą metody jest jej mała pracochłonność i łatwość praktycznego zastosowania; metoda może być zastosowana również do analizy innych zjawisk, np. równaniami różniczkowymi o pochodnych cząstkowych.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

Метод осреднения функциональных поправок, Укр. Матем. Журн., 9,

1. *A method in engineering*, McGraw Hill, New York 1967.

JONSSON, *Laminar flow and pressure drop in internally*
Transfer, 7, 583-585, 1964.