

WPLYW OGRZANEGO BRZEGU NA ROZKŁAD NORMALNEJ SKŁADOWEJ NAPRĘŻENIA W PÓLPRZESTRZENI MIKROPOLARNEJ

WACŁAW FRYDRYCHOWICZ i ZBIGNIEW OLESIAK (WARSZAWA)

Zbadaliśmy zachowanie się i rozkład normalnej składowej (prostopadłej do powierzchni ograniczającej) naprężeń siłowych, powstałych na skutek zmiany temperatury powierzchni. Zmiana temperatury ma miejsce na kole, pierścieniu lub na obwodzie koła, przy zachowaniu warunku, że doprowadzona ilość ciepła jest stała. Zbadaliśmy także wpływ stałych materiałowych α_0 i l^2 na rozkład naprężeń. Wyniki przedstawiono w postaci diagramów.

1. WSTĘP

W przypadku klasycznym termosprężystości ogrzanie swobodnej od naprężeń części powierzchni brzegu półprzestrzeni sprężystej powoduje powstanie stanu naprężeń, w którym znikają składowe normalne naprężenia, prostopadłe do brzegu (por. W. NOWACKI [6] oraz E. STERNBERG i E. L. McDOWELL [12]). Ta interesująca własność nie przenosi się na przypadek półprzestrzeni mikropolarnej. Osiowo symetryczne zagadnienie naprężeń cieplnych w półprzestrzeni dla ośrodków ze związanymi obrotami zostało rozpatrzone w pracy P. PURIEGO [9], a w ogólnym modelu ośrodków Cosseratów przez R. S. DHALIWAŁA [2].

W naszej pracy podamy pewne wnioski dotyczące zachowania się normalnej, «zetowej» składowej tensora naprężeń siłowych powstających w półprzestrzeni mikropolarnej na skutek ogrzania lub oziębienia powierzchni ograniczającej $z=0$. Wyniki przedstawiono w postaci wykresów dla różnych wartości stałych materiałowych oraz temperatury danej na powierzchni koła lub pierścieni kołowych. Powierzchnie te i stałe temperatury zostały dobrane w ten sposób, by ilość dostarczonego ciepła (w jednostce czasu) była stała. Również podaliśmy wykresy zetowej składowej wektora przemieszczenia płaszczyzny brzegowej, obliczone dla temperatury na powierzchni koła o promieniu jednostkowym i na powierzchniach pierścieni o takim samym promieniu zewnętrznym.

2. RÓWNANIA PODSTAWOWE

Równania różniczkowe mikropolarnej termosprężystości w walcowym układzie współrzędnych i w przypadku osiowej symetrii przyjmują następującą postać [7, 8 i 5]:

$$(2.1) \quad (\mu + \alpha)(B_1 + D^2)u_r + (\lambda + \mu - \alpha)B_1 u_r + (\lambda + \mu - \alpha)\frac{\partial}{\partial r} Du_z - 2\alpha D\varphi_\theta = v \frac{\partial T}{\partial r},$$

$$(2.2) \quad (\mu + \alpha)(B_0 + D^2)u_z + (\lambda + \mu - \alpha) \frac{1}{r} D \frac{\partial}{\partial r} (ru_r) + (\lambda + \mu - \alpha) D^2 u_z + \\ + \frac{2\alpha}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\varphi_\theta) = \nu DT,$$

$$(2.3) \quad (\gamma + \varepsilon)(B_1 + D^2)\varphi_\theta - 4\alpha\varphi_\theta + 2\alpha \left(Du_r - \frac{\partial}{\partial r} u_z \right) = 0,$$

$$(2.4) \quad (B_0 + D^2)T = 0,$$

gdzie B_0 i B_1 oznaczają następujące operatory różniczkowe:

$$(2.5) \quad B_0(f) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right), \quad B_1(f) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right], \quad D \equiv \frac{d}{dz}.$$

Regularne w nieskończoności rozwiązania zagadnienia brzegowego, spełniające następujące warunki brzegowe:

$$(2.6) \quad \sigma_{zz}(r, 0) = -p(r), \quad \sigma_{zr}(r, 0) = 0, \quad T(r, 0) = \Phi(r), \\ \mu_{z\theta}(r, 0) = -m(r), \quad r \in \langle 0, \infty \rangle,$$

przyjmują postać następującą [5]:

$$(2.7) \quad u_z(r, z) = \frac{1}{2\mu} \mathcal{H}_0 \left[\frac{\bar{p}(\xi)}{A_0} \left\{ \left(\frac{2\mu + \lambda}{\mu + \lambda} \frac{1}{\xi} + z \right) \exp(-\xi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} (\exp(-\rho z) - \exp(-\xi z)) \right\} - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi A_0} \left\{ (1 - A_0) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + z \right) \exp(-\xi z) + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} (\exp(-\rho z) - \exp(-\xi z)) \right\}; \xi \rightarrow r \right] - \\ - \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_r \mathcal{H}_0 \left[\frac{[\bar{\Phi}(\xi)]}{A_0} \left\{ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + (1 - A_0)z \right) \exp(-\xi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} (\exp(-\rho z) - \exp(-\xi z)) \right\}; \xi \rightarrow r \right];$$

$$(2.8) \quad u_r(r, z) = \frac{1}{2\mu} \mathcal{H}_1 \left[\frac{\bar{p}(\xi)}{A_0} \left\{ \frac{1}{\xi} \left(\xi z - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \exp(-\xi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2a_0 \frac{\xi^2}{\rho} \left(\frac{\rho}{\xi} \exp(-\rho z) - \exp(-\xi z) \right) \right\} - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi A_0} \left\{ (1 - A_0) \left(\xi z - \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right) \frac{1}{\xi} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp(-\xi z) + 2a_0 \frac{\xi}{\rho} (\rho \exp(-\rho z) - \xi \exp(-\xi z)) \right\}; \xi \rightarrow r \right] + \\ + \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + 2\mu)} \alpha_r \mathcal{H}_1 \left[\frac{[\bar{\Phi}(\xi)]}{A_0} \left\{ \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{1}{\xi} + (A_0 - 1)z \right) \exp(-\xi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2a_0 \xi (\exp(-\xi z) - \exp(-\rho z)) \right\}; \xi \rightarrow r \right];$$

$$(2.9) \quad \varphi_0(r, z) = \frac{1}{2\mu} \frac{2\mu + \lambda}{\lambda + \mu} \mathcal{H}_1 \left[\frac{\bar{p}(\xi)}{A_0} \left(\exp(-\xi z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\rho z) \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi A_0} \left\{ (1 - A_0) \exp(-\xi z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\rho z) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right] - \\ - \frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \alpha_t \mathcal{H}_1 \left[\frac{\bar{\Phi}(\xi)}{A_0} \left(\exp(-\rho z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\rho z) \right); \quad \xi \rightarrow r \right];$$

$$(2.10) \quad T(r, z) = \mathcal{H}_0 [\bar{\Phi}(\xi) \exp(-\xi z); \quad \xi \rightarrow r],$$

gdzie \bar{p} oraz $\bar{\Phi}$ oznaczają odpowiednio transformaty Hankela zerowego rzędu znanych funkcji $w(r)$ i $\Phi(r)$, \hat{m} jest transformatą Hankela pierwszego rzędu funkcji $m(r)$. Symbole $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$ oraz ε oznaczają stałe materiałowe, $\nu = (3\lambda + 2\mu) \alpha_t$, α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej, $\mathcal{H}_0 [; \rightarrow]$ oraz $\mathcal{H}_1 [; \rightarrow]$ oznaczają odpowiednio transformaty Hankela zerowego i pierwszego rzędu, ponadto:

$$a_0 = \frac{(\gamma + \varepsilon)(\lambda + 2\mu)}{4\mu(\lambda + \mu)}, \quad \rho^2 = \xi^2 + 1/l^2, \quad A_0 = 1 + 2a_0 \xi^2 \left(1 - \frac{\xi}{\rho} \right).$$

Podamy jeszcze wzory na składowe tensora naprężeń siłowych, styczną i normalną zetową:

$$(2.11) \quad \sigma_{xz}(r, z) = -\mathcal{H}_1 \left[\frac{\bar{p}(\xi)}{A_0} \left\{ \xi z \exp(-\xi z) + 2a_0 \frac{\xi^3}{\rho} (\exp(-\rho z) - \exp(-\xi z)) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi A_0} \left\{ (1 - A_0) \xi z \exp(-\xi z) + 2a_0 \frac{\xi^3}{\rho} (\exp(-\xi z) - \exp(-\rho z)) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right] + \\ + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_1 \left[\frac{\bar{\Phi}(\xi)}{A_0} \left\{ (1 - \xi z) (A_0 - 1) \exp(-\xi z) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2a_0 \rho^2 \left(\exp(-\xi z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\rho z) \right) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right],$$

$$(2.12) \quad \sigma_{zz}(r, z) = -\mathcal{H}_0 \left[\frac{\bar{p}(\xi)}{A_0} \left\{ (1 + \xi z) \exp(-\xi z) + 2a_0 \xi^2 (\exp(-\rho z) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\xi z)) - \frac{1}{2a_0} \frac{\hat{m}(\xi)}{\xi A_0} \left\{ (1 - A_0) (1 + \xi z) \exp(-\xi z) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2a_0 \xi^2 \left(\exp(-\rho z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\xi z) \right) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right] - \\ - \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_0 \left[\frac{\bar{\Phi}(\xi)}{A_0} \left\{ (1 + \xi z) (A_0 - 1) \exp(-\xi z) - 2a_0 \xi^2 \left(\exp(-\rho z) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\xi z) \right) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right].$$

3. ZACHOWANIE SIĘ NORMALNEJ ZETOWEJ SKŁADOWEJ TENSORA NAPRĘŻENIA

Nie wydaje się nam możliwe takie przekształcenie wzoru (2.12), nawet w przypadku szczególnym, aby można było przedstawić $\sigma_{zz}(r, z)$ w postaci znanych funkcji elementarnych lub specjalnych. W celu uproszczenia obliczeń przedyskutujemy przypadek najprostsz, mianowicie rozkład naprężenia wzdłuż linii $r=0, z \geq 0$. W przypadku gdy brzeg jest swobodny od naprężeń, otrzymamy ze wzoru (2.12)

$$(3.1) \quad \sigma_{zz}(r, z) = -\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_0 \left[\frac{\bar{\Phi}(\xi)}{A_0} \left\{ (1+\xi z)(A_0-1) \exp(-\xi z) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2a_0 \xi^2 \left(\exp(-\rho z) - \frac{\xi}{\rho} \exp(-\xi z) \right) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right].$$

W przeciwieństwie do przypadku klasycznego również składowe naprężeń $\sigma_{zr}(r, z)$ i $\sigma_{rz}(r, z)$ nie znikają tożsamościowo, gdy brzeg jest swobodny od naprężeń. Ze wzoru (2.11) widać, że dla $\bar{p}(\xi) \equiv \hat{m}(\xi) \equiv 0$, $\sigma_{zr}(r, z)$ znika jedynie na powierzchni $z=0$. Ze wzoru (3.1) dla $r=0$, otrzymamy

$$(3.2) \quad \sigma_{zz}(0, z) = \\ = -2\mu \alpha_t \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+2\mu} a_0 \int_0^\infty \frac{\xi^3 \bar{\Phi}(\xi)}{A_0 \rho} \left\{ [\rho + (\rho - \xi) \xi z] \exp(-\xi z) - \rho \exp(-\rho z) \right\} d\xi.$$

Temperaturę określimy na powierzchni koła $r < a$ lub pierścieni $b < r < a$ o szerokości równej $0,5a, 0,1a$ oraz $0,01a$. Przyjmiemy również, że iloczyn stałej temperatury i powierzchni, na której się pojawia jest stały. Wynika stąd, że dostarczona ilość ciepła Q jest również stała. Można pokazać, że jeżeli

$$(3.3) \quad 2\pi \int_{a_1}^1 T_1 r dr = 2\pi \int_{a_2}^1 T_2 r dr,$$

to $Q_1 = Q_2$, gdzie z definicji mamy

$$Q_i = 2\pi k \int_{a_i}^1 r \frac{\partial T_i}{\partial z} dr, \quad i=1, 2;$$

k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego. Otrzymujemy kolejno

$$(3.4) \quad T_1(r, 0) = \mathcal{H}_0[\bar{\Phi}; \quad \xi \rightarrow r], \\ \frac{\partial T_1}{\partial z}(r, 0) = -\mathcal{H}_0[\xi \bar{\Phi}_1; \quad \xi \rightarrow r],$$

$$(3.5) \quad \int_{a_1}^1 T_1(r, 0) r dr = \int_{a_1}^1 r dr \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{1}{T_1} \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_1^2(\xi) d\xi$$

pod warunkiem, że $T_1(r, 0)$ jest stałe. Jeżeli założenie (3.3) jest spełnione, to następujący związek jest prawdziwy:

$$(3.6) \quad T_2 \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_1^2(\xi) d\xi = T_1 \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_2^2(\xi) d\xi.$$

Z drugiej strony warunek (3.3) można napisać w postaci $T_1(1-a_1^2) = T_2(1-a_2^2)$, skąd otrzymamy

$$(3.7) \quad (1-a_1^2) \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_1(\xi) J_0(\xi r) d\xi = (1-a_2^2) \int_0^\infty \xi \bar{\Phi}_2(\xi) J_0(\xi r) d\xi.$$

Związki (3.6) i (3.7) mogą być równocześnie spełnione tylko wtedy, gdy

$$(3.8) \quad T_2 \xi \bar{\Phi}_1(\xi) = T_1 \xi \bar{\Phi}_2(\xi).$$

Wynika stąd równość całek

$$(3.9) \quad T_2 \int_0^\infty \xi^2 \bar{\Phi}_1^2(\xi) d\xi = T_1 \int_0^\infty \xi^2 \bar{\Phi}_2^2(\xi) d\xi,$$

czyli $Q_1 = Q_2$.

Mimo że nie możemy podać analitycznego wyrażenia na $\sigma_{zz}(r, z)$, oszacujemy wartość pochodnej $\frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(r, z)$ dla $r > 0, z = 0$. Wychodzimy ze wzoru

$$(3.10) \quad \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(r, z) = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t \mathcal{H}_0 \left[\frac{\xi^2}{A_0} \bar{\Phi}(\xi) \left\{ (A_0 - 1) z \exp(-\xi z) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2a_0}{\rho} \left(\left(\xi^2 + \frac{1}{l^2} \right) \exp(-\rho z) - \xi^2 \exp(-\xi z) \right) \right\}; \quad \xi \rightarrow r \right].$$

Dla temperatury wywołanej na powierzchni koła $r \in \langle 0, a \rangle$ otrzymamy

$$(3.11) \quad \Phi(\xi) = \frac{aF}{\xi} J_1(a\xi).$$

Po podstawieniu (3.11) do (3.10) otrzymamy wzór

$$(3.12) \quad \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz}(r, 0) = -\frac{2a_0}{l^2} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_t T a \int_0^\infty \frac{J_1(a\xi)}{\rho A_0} \xi^2 J_0(r\xi) d\xi.$$

Całka występująca we wzorze (3.12) jest zbieżna dla wszystkich $r > 0$ i $a > 0$ z wyjątkiem $r = a$. Można to pokazać np. w sposób następujący:

$$(3.13) \quad \int_0^\infty \frac{1}{\rho A_0} \xi^2 J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi = \\ = \frac{1}{4a_0(1+a_0 m^2)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi^2 + m^2} (1 + 2a_0 \xi^2) + 2a_0 \xi^3}{(\xi^2 + x_1^2)(\xi^2 + x_2^2)} \xi^2 J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi =$$

$$= \frac{1}{4a_0(1+a_0m^2)} \left\{ \int_0^N \psi(\xi) \xi J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi + \int_N^\infty \psi(\xi) \xi J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi + 4a_0 \int_0^\infty \xi J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi \right\},$$

gdzie

$$\psi(\xi) = \frac{\sqrt{\xi^2 + m^2} (1 + 2a_0 \xi^2) \xi + 2a_0 \xi^4}{(\xi^2 + x_1^2)(\xi^2 + x_2^2)} - 4a_0, \quad m^2 = l^{-2},$$

$$8a_0(1+a_0m^2)x_1^2 = 1 + 4a_0m^2 + \sqrt{1+8a_0m^2},$$

$$8a_0(1+a_0m^2)x_2^2 = 1 + 4a_0m^2 - \sqrt{1+8a_0m^2}.$$

Pierwsza całka we wzorze (3.13) jest zbieżna. Drugą całkę można oszacować w sposób następujący:

$$(3.14) \quad \left| \int_N^\infty \psi(\xi) \xi J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi \right| \leq C \left| \int_N^\infty \psi(\xi) d\xi \right| = C \left\{ 2a_0 \sqrt{\xi^2 + m^2} - 2a_0 \xi + \frac{1}{x_1^2 - x_2^2} \left[\sqrt{x_1^2 - m^2} (1 - 2a_0 x_1^2) \arctg \sqrt{\frac{\xi^2 + m^2}{x_1^2 - m^2}} - \sqrt{x_2^2 - m^2} (1 - 2a_0 x_2^2) \arctg \sqrt{\frac{\xi^2 + m^2}{x_2^2 - m^2}} + \frac{2a_0}{x_1^2 - x_2^2} \left[x_1^3 \arctg \frac{\xi}{x_1} - x_2^3 \arctg \frac{\xi}{x_2} \right] \right] \right\} \Big|_N^\infty < \infty,$$

gdzie $C = \max |\xi J_1(a\xi) J_0(r\xi)|$ w przedziale $\xi \in \langle N, \infty \rangle$.

Trzecią całkę można efektywnie obliczyć:

$$(3.15) \quad \int_0^\infty \xi J_1(a\xi) J_0(r\xi) d\xi = -\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty J_0(a\xi) J_0(r\xi) d\xi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \begin{cases} a^{-2} K\left(\frac{r}{a}\right) + r^2 a^{-2} \left[\frac{1}{a^2 - r^2} E\left(\frac{r}{a}\right) - a^{-2} K\left(\frac{r}{a}\right) \right], & r < a, \\ \frac{r}{a} \left[r^{-2} K\left(\frac{r}{a}\right) - \frac{1}{r^2 - a^2} E\left(\frac{a}{r}\right) \right], & a < r, \end{cases}$$

gdzie $K(k)$, $E(k)$ są pełnymi całkami eliptycznymi pierwszego i drugiego rodzaju. W podobny sposób można stwierdzić, że $[\partial \sigma_{zz}(0, z)]/\partial z$ jest skończone dla $z > 0$.

Celem obliczeń jest znalezienie wpływu ogrzania powierzchni ograniczającej półprzestrzeń na zachowanie się składowej normalnej naprężenia $\sigma_{zz}(0, z)$, zmieniającej się wraz z głębokością. Ponieważ w przypadku klasycznym składowa ta znika tożsamościowo, brak jest możliwości porównania z przypadkiem klasycznym.

Przeanalizowaliśmy następujące aspekty zagadnienia: zmiana naprężeń wraz z głębokością w zależności od sposobu wywołania temperatury (na kole lub pierścieniu kołowym) oraz zależność od stałych materiałowych a_0 i l^2 , przy ustalonych pozostałych wartościach stałych. Wykresy sporządzono we współrzędnych bezwymiarowych. Oś odciętych oznacza bezwymiarową głębokość mierzoną od płaszczyzny brzegowej $z=0$. Na osi rzędnych odmierzone bezwymiarową składową normalną naprężenia siłowego, tzn. $(AT_0)^{-1} \sigma_{zz}(0, z)$, gdzie $A = -\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \mu \alpha_1$, T_0 jest ustaloną temperaturą.

Obliczenia wykonano w Instytucie Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego na maszynie cyfrowej CYBER 70. Program został napisany w języku FORTRAN EXTENDED. Wartości całek w przedziale do $0,001 \frac{z}{a}$ zostały obliczone co 10^{-5} , do $0,1 \frac{z}{a}$ co 10^{-3} , a w przedziale powyżej $0,1 \frac{z}{a}$ co 10^{-1} . Wykorzystano bibliotekę podprogramów: Subroutine NBESJ, DQG16 i DTEUL. Przy obliczaniu funkcji podcałkowych uwzględniano przedział całki do trzydziestego zera funkcji $J_0(z)$. Zastosowano następującą metodę numerycznego obliczania całek

$$\int_0^{\infty} k(z) J_n(zx) dz.$$

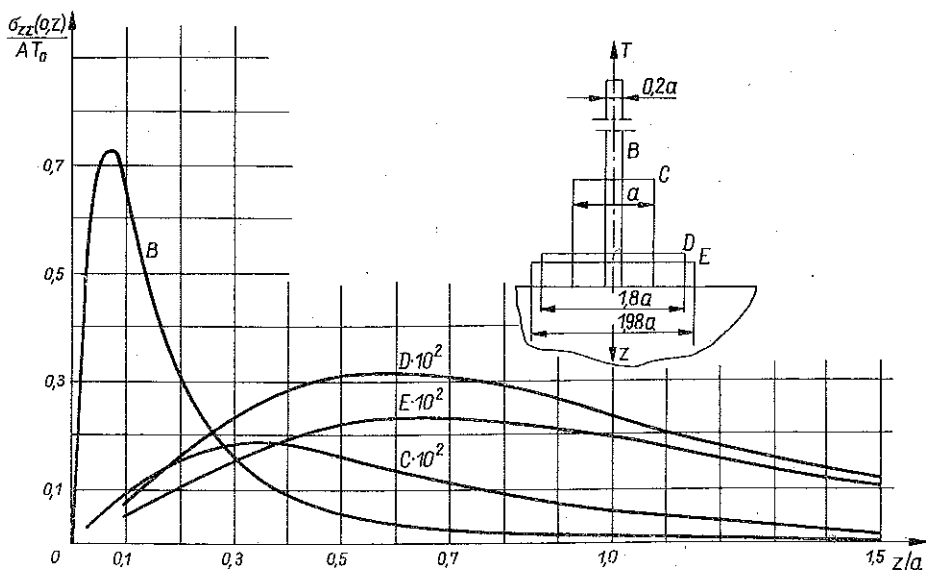
Obcinamy przedział $\langle 0, \infty \rangle$ do przedziału $\langle 0, c \rangle$ tak, by znalazła się w nim ustalona liczba zer funkcji $J_n(z)$. Program główny realizował wczytywanie zer funkcji $J_n(zx)$. Załóżmy, że w uporządkowanej tablicy znajduje się m zer. Wówczas, przy ustalonym parametrze x

$$(3.16) \quad \int_0^{\infty} k(z) J_n(zx) dz = \sum_{i=0}^{m-1} \int_1^{i+1} k(z) J_n(zx) dz + \sum_{i=m-15}^{m-1} \int_i^{i+1} k(z) J_n(zx) dz + O\left(\int_0^{\infty} (\cdot) dz\right).$$

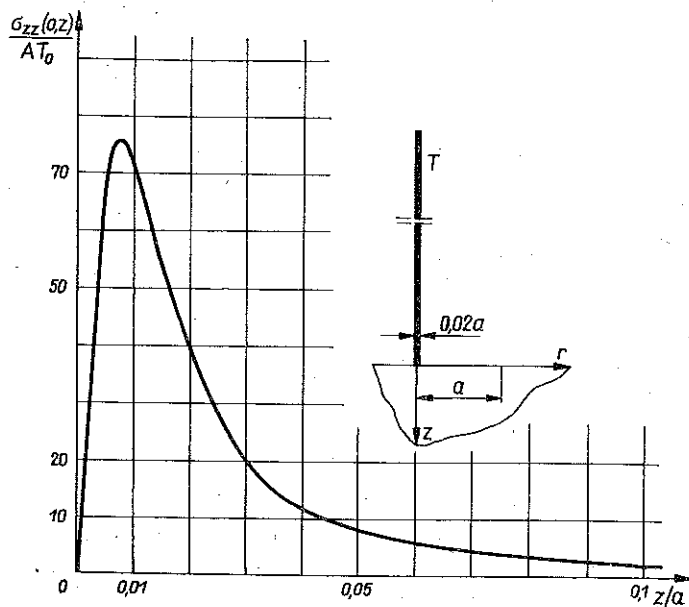
Całki $\int_i^{i+1} k(z) J_n(zx) dz$, $i=0, 1, \dots, (m-1)$ realizował podprogram Subroutine DQG16. Celem znalezienia sumy szeregu $\sum_{i=m-15}^{m-1} \int_i^{i+1} k(z) J_n(zx) dz$ zastosowano transformację Eulera [1], a obliczenia realizował podprogram Subroutine DTEUL. Należy zaznaczyć, że funkcja $k(z)$ nie ma zer, ma jedno maksimum lokalne, jest stale nieujemna i szybko dąży do zera, gdy $z \rightarrow \infty$. Wybór metody obliczeniowej został podyktowany tym, że metoda kwadratur oparta na wielomianach ortogonalnych Laguerre'a lub Legendre'a nie daje dostatecznej dokładności przy obliczaniu całek z funkcji oscylujących w przedziale $\langle 0, \infty \rangle$.

Na rysunkach 1 i 2 przedstawione zostały wykresy funkcji podanej wzorem (3.2) we współrzędnych bezwymiarowych. Obliczenia dotyczą normalnej składowej naprężenia siłowego $\sigma_{zz}(0, z)$ pod działaniem temperatury wywołanej na powierzchni koła o pięciu różnych średnicach, ale tej samej ilości ciepła. Przyjęliśmy, że $a_0 = 10^{-3}$, $l^2 = 10^{-1}$, $a = 1$. Ponieważ A jest ujemne, wykresy naprężeń odpowiadają ujemnym wartościom przyrostu temperatury, w przeciwnym razie należy zmienić

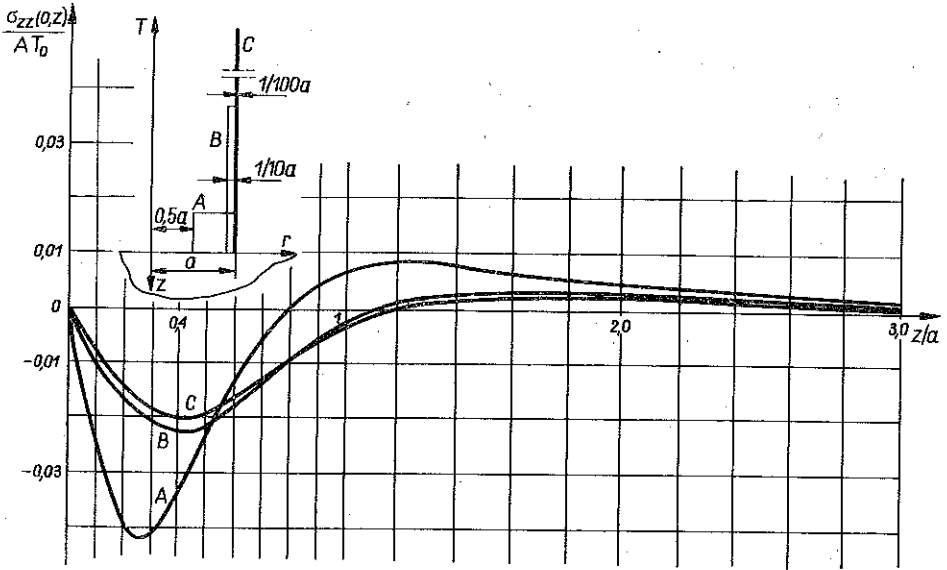
znak. Wartość naprężeń maleje w przypadku, gdy przy tej samej ilości ciepła, dostarczonej w jednostce czasu, podgrzewany jest coraz to większy obszar kołowy. Warto zaznaczyć, że również ekstremum funkcji położone jest na większej głębokości, aczkolwiek jego wartość maleje. Na rysunku 1 rzędne krzywej C , odpowiadającej promieniowi koła $a=1$, zostały pomnożone przez 10, rzędne krzywych D i E odpowiednio przez 10^2 . Maksimum krzywej E wynosi $2,31 \cdot 10^{-3}$ i znajduje się na głą-



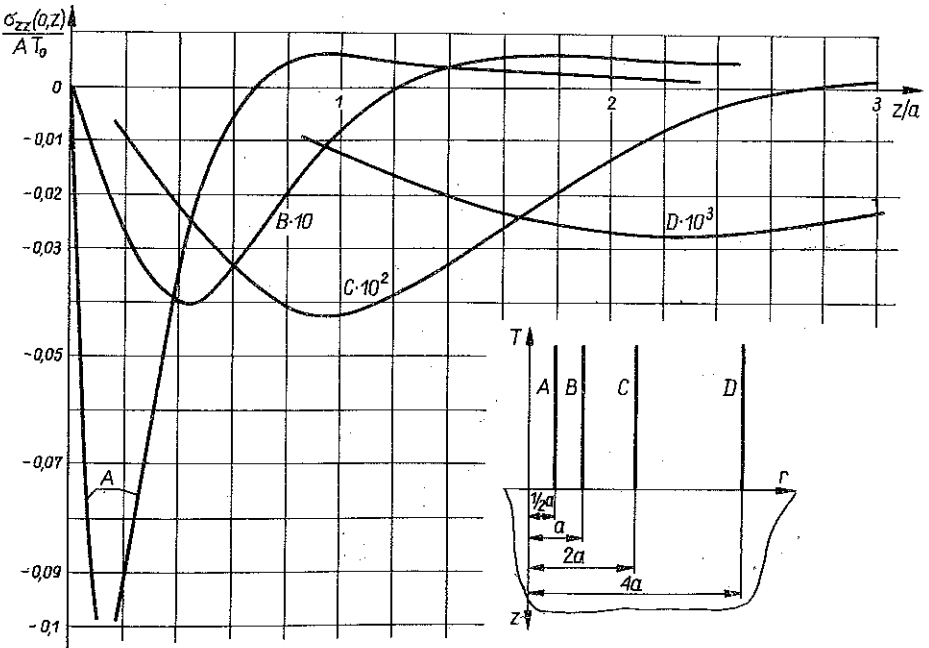
Rys. 1.



Rys. 2.



Rys. 3.



Rys. 4.

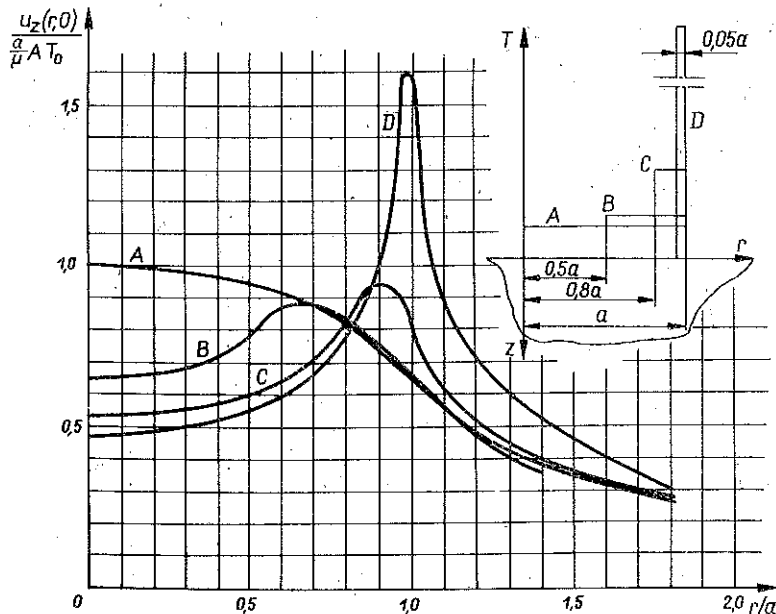
bokości ok. 0,6a; z kolei dla średnicy koła równej 0,2a maksimum ma miejsce na głębokości 0,07 i wynosi 0,732 oraz dla średnicy 0,02 znajduje się na głębokości 0,008 i przyjmuje wartość 76,2 (rys. 2). Wszystkie krzywe przedstawione na rysunkach 1 i 2, po osiągnięciu maksimum, dążą monotonicznie do zera.

Na rysunku 3 przedstawiliśmy zależność bezwymiarowych naprężeń normalnych $(AT_0)^{-1} \sigma_{zz}(0, z)$ od temperatury działającej na powierzchni pierścieni: $r_A \in (0,5a, a)$, $r_B \in (0,9a, a)$ oraz $r_C \in (0,99a, a)$. Ponieważ ilość ciepła jest ta sama, odpowiednie temperatury mają się do siebie jak 1 (dla koła): 4/3; 100/19; 10000/199. W przypadku r_A pierwsze ekstremum funkcji występuje na głębokości ok. 0.3. Dla pierścieni r_B i r_C ekstrema oddalają się od brzegu. Każda z krzywych posiada jedno minimum i jedno maksimum, a następnie dąży monotonicznie do zera, gdy $z \rightarrow \infty$. W przypadku dodatniej różnicy temperatur na pierścieniu pierwsze ekstremum jest oczywiście maksimum.

Na rys. 4 przedstawiliśmy rozkład bezwymiarowej składowej normalnej naprężeń w zależności od liniowego źródła o stałej intensywności działającego na okręgach kół o promieniach $0,5a$, a , $2a$ i $4a$. Wartości krzywej B zostały pomnożone przez 10, krzywej C przez 10^2 i krzywej D przez 10^3 .

Bezwymiarowe przemieszczenie normalne $\frac{\mu}{a AT_0} u_z(r, 0)$ powierzchni brzegowej przedstawia rys. 5. Odpowiedni wzór otrzymaliśmy ze wzoru (2.7) po podstawieniu $z=0$:

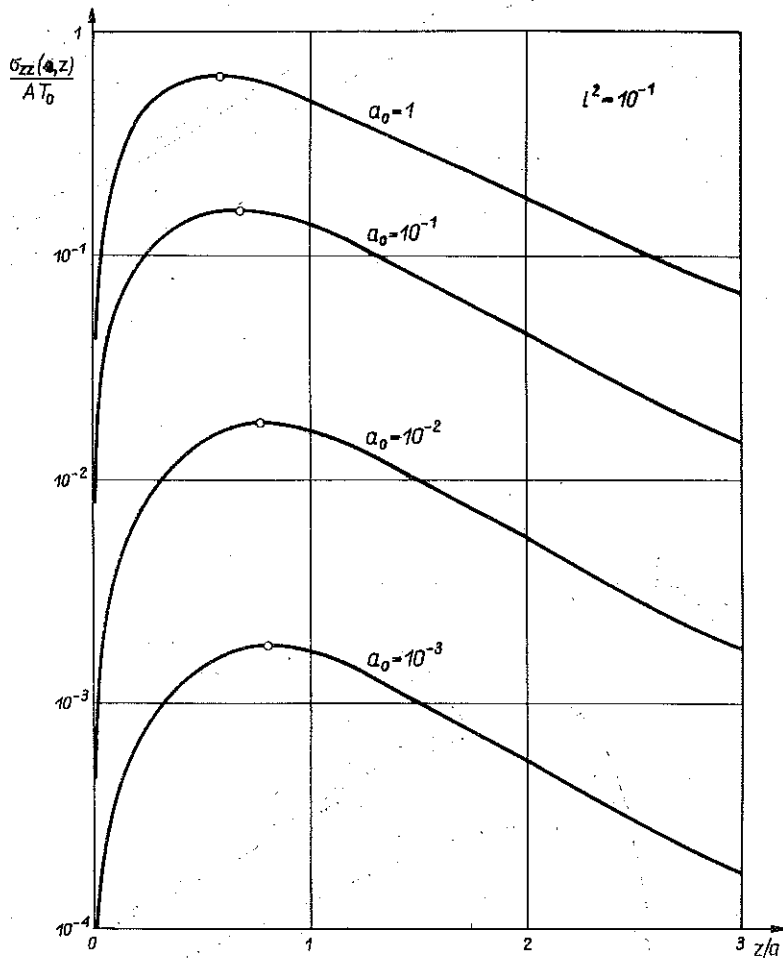
$$(3.17) \quad u_z(r, 0) = -\frac{3\lambda + 2\mu}{2(\lambda + \mu)} \alpha_t \int_0^\infty \frac{\bar{\Phi}(\xi)}{\Delta_0} J_0(r\xi) d\xi.$$



Rys. 5.

Przemieszczenia te zarówno co do charakteru jak i wartości liczbowych praktycznie nie odbiegają od danych dla przypadku odpowiedniego zagadnienia termosprężystości klasycznej.

Na rysunku 6 przedstawiliśmy wykresy zależności naprężeń w przypadku, gdy stała temperatura działa na powierzchni koła $r=a$, ustalone jest $l^2=10^{-1}$, $a=1$, zmienia się natomiast a_0 przyjmując wartości 1, 10^{-1} , 10^{-2} oraz 10^{-3} . Skala na-

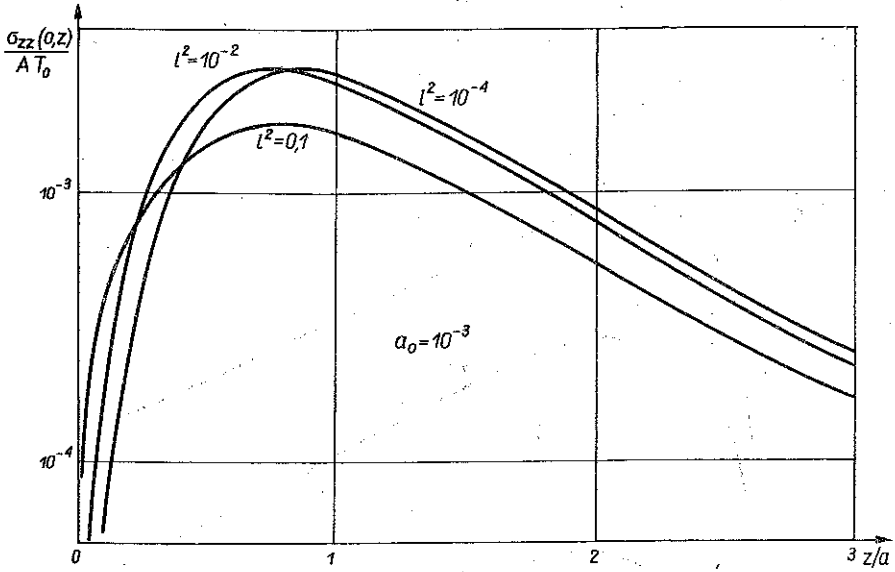


Rys. 6.

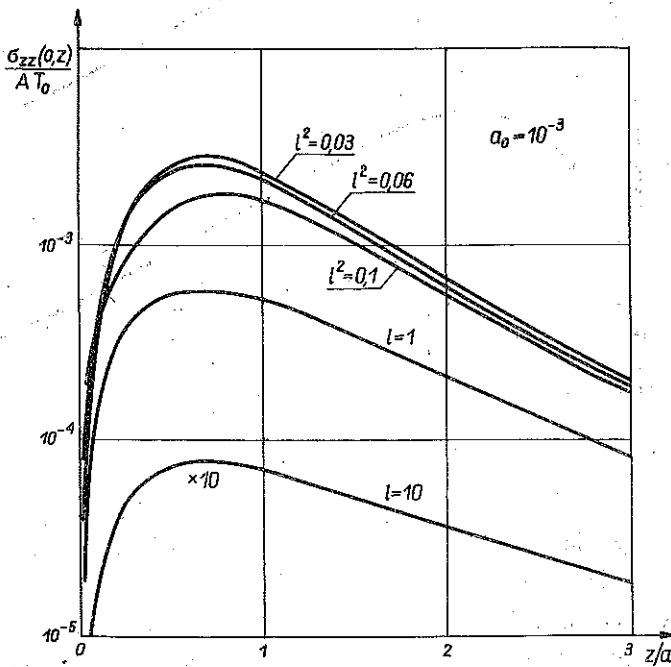
prężen jest logarytmiczna, kółeczkami zaznaczono maksima funkcji. Dla małych wartości z/a funkcje dążą monotonicznie do zera.

Z kolei na rysunkach 7 i 8 przedstawiliśmy wyniki obliczeń, gdy ustalone jest $a_0=10^{-3}$, $a=1$, temperatura jak poprzednio działa na powierzchni koła o promieniu $a=1$, a zmieniają się wartości stałej materiałowej l . Na rysunku 7, $l^2=10, 1, 0,1, 0,06$

i 0,03, na rysunku 8, l^2 przyjmuje wartości 0,1, 0,01 oraz 0,0001. Wykresy sporządzone zostały w skali logarytmicznej dla naprężeń i w skali liniowej dla z/a . Rzędne krzywej $l=10$ są pomnożone przez 10.



Rys. 7.



Rys 8.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. J. BROMWICH, *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan, 62, 1942.
2. R. S. DHALIWAL, *The steady-state axisymmetric problem of micropolar thermoelasticity*, Arch. Mech., 23, 5, 1971.
3. R. S. DHALIWAL, *The axisymmetric Boussinesq problem in the micropolar theory of elasticity*, Arch. Mech., 24, 4, 1972.
4. G. EASON, B. NOBLE, I. N. SNEDDON, *On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions*, Phil. Trans. Roy. Soc., A, 247, 529-551, 1955.
5. W. FRYDRYCHOWICZ, S. MATYSIAK, Z. OLESIAK, *Mieszane zagadnienia brzegowe termosprężystości ośrodka mikropolarnego*, Prace IPPT PAN, 1978.
6. W. NOWACKI, *Two steady-state thermoelastic problems*, Arch. Mech., 9, 579-592, 1957.
7. W. NOWACKI, *Teoria niesymetrycznej sprężystości*, PWN, Warszawa 1971.
8. W. NOWACKI, *Theory of micropolar elasticity*, Springer-Verlag, CISM, Udine, Courses and Lectures, 25, 1970.
9. P. PURI, *Steady-state thermoelastic problems for the half-space with couple stresses*, Arch. Mech., 22, 4, 479-490, 1970.
10. I. N. SNEDDON, *Fourier transforms*, MacGraw-Hill, New York 1951.
11. I. N. SNEDDON, *The use of integral transforms*, MacGraw-Hill, New York 1972.
12. E. STERNBERG, E. L. McDOWELL, *On the steady-state thermoelastic problem for the half-space and the thick plate*, Quart. Appl. Math., 14, 4, 381, 1957.

Резюме

ВЛИЯНИЕ НАГРЕТОЙ ГРАНИЦЫ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В МИКРОПОЛЯРНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Исследованы поведение и распределение нормальной составляющей (перпендикулярной к ограничивающей поверхности) силовых напряжений, возникших вследствие изменения температуры поверхности. Изменение температуры имеет место на круге, кольце, или на периметре круга при сохранении условия, что подводимое количество тепла постоянно. Исследовано тоже влияние материальных постоянных a_0 и I^2 на распределение напряжений. Результаты представлены в виде графиков.

SUMMARY

EFFECT OF A HEATED BOUNDARY ON THE DISTRIBUTION OF NORMAL STRESS IN A MICROPOLAR SEMI-SPACE

The behaviour and distribution of normal component of force stress tensor produced by a change of temperature on a part of bounding plane has been examined. The deviation of temperature is prescribed on a circle, annulus or circumference of a circle in such a way that the applied amount of heat is constant. Also the effect of material constants a_0 and I^2 on the distribution of normal component of stress has been investigated. The results are shown in diagrams.

UNIWERSYTET WARSZAWSKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 listopada 1977 r.