ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 27, 2, 285—301, 1979
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ POWŁOKI STOŻKOWEJ WYPROWADZENIE PODSTAWOWYCH RÓWNAŃ

FERDYNAND TWARDOSZ (POZNAŃ)

W pracy zajęto się wyprowadzeniem równań stateczności dynamicznej powłoki w kształcie stożka ściętego przy założeniu, że materia powłoki wykazuje własności tłumiące. Określono granice podstawowych obszarów stateczności i rozważono drgania tłumione o niskiej częstości wywołane okresowo zmiennymi siłami osiowymi oraz równomiernym zewnętrznym obciążeniem hydrostatycznym. Rozważania oparte są na liniowych związkach geometrycznych i hipotezie Love'a-Kirchhoffa. Powłoka jest cienka i swobodnie podparta na krawędziach.

1. Wstęp

W pracy wyprowadzono równania stateczności dynamicznej powłoki w kształcie stożka ściętego przy uwzględnieniu własności tłumiących materiału. Posłużono się hipotezą N. N. Dawidenkowa [3 i 8], która uwzględnia tłumienie nieliniowe i daje się dostosować do różnych materiałów. Związki te zostały wszechstronnie zbadane przez G. S. Pisarenkę [7, 8 i 9]. Określono granice głównego obszaru rezonansowego oraz rozważono parametryczne drgania tłumione (ustalone i nieustalone) o małej amplitudzie, wywołane działaniem okresowo zmiennych sił podłużnych oraz wszechstronnego równomiernego ciśnienia zewnętrznego.

W rozważaniach oparto się na liniowych związkach geometrycznych, zakładając stosowalność hipotezy Kirchhoffa-Love'a. Powłoka jest cienkościenna, swobodnie podparta na brzegach. Ponieważ siły tłumiące są małe w stosunku do sił sprężystych, przeto zagadnienie można sprowadzić do równań różniczkowych nieliniowych zawierających mały parametr. N. M. Kryłow i N. N. Bogolubow [2] opracowali dla takich równań różniczkowych asymptotyczne metody mechaniki nieliniowej, które dzięki swej efektywności i matematycznej ścisłości znalazły szerokie zastosowanie w praktyce inżynierskiej. Rozważania ogólne niniejszego zagadnienia oparte są na metodzie podanej w pracach [1, 2 i 4].

2. Różniczkowe równania ruchu

Równania stateczności dynamicznej powłoki stożkowej wyprowadzimy z uproszczonych równań stateczności statycznej, zastępując zewnętrzne obciążenia stałe siłami zmieniającymi się okresowo w czasie oraz dodając do prawych stron tych równań składowe sił bezwładności. Dla powłoki stożkowej równania stateczności technicznej terii powłok są następujące:

$$
\begin{gathered}
N_1 \sin\gamma + \frac{\partial N_1}{\partial s} s\sin\gamma - N_2\sin\gamma + \frac{\partial T_2}{\partial\varphi} = 0,\\
\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + T_1\sin\gamma + \frac{\partial T_1}{\partial s} s\sin\gamma + T_2\sin\gamma = 0,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & 2\frac{\partial M_1}{\partial s}\sin\gamma + \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2} s\sin\gamma - \frac{\partial M_2}{\partial s}\sin\gamma + \frac{1}{s\sin\gamma}\frac{\partial^2 M_2}{\partial\varphi^2} - \\
& -\frac{1}{s}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi} - \frac{1}{s}\frac{\partial H_2}{\partial\varphi} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial_s\partial\varphi} - \frac{\partial^2 H_2}{\partial s\partial\varphi} + N_2\cos\gamma - s\sin\gamma\times\\
& \times\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}N_{10} + \left(\frac{1}{s^2\sin^2\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right)N_{20} + \frac{2}{s\sin\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}T_0\right] = 0,
\end{aligned}
$$

przy czym w pierwszych dwóch równaniach pominięto małe wyrazy momentowe pochodzące od sił poprzecznych, co jest zgodne z przyjętą tu techniczną teorią [13].

Przyjęto oznaczenia następujące: s, φ oznaczają współrzędne punktu na powierzchni środkowej powłoki, 2γ kąt wierzchołkowy, N_1, N_2, T_1, T_2 wewnętrzne siły normalne i styczne, M_1, M_2, H_1, H_2 wewnętrzne momenty zginające i skręcające oraz N_{10}, N_{20}, T_0 siły wewnętrzne stanu błonowego.

Zakładając, że powłoka jest obciążona siłami podłużnymi N i wszechstronnym równomiernym ciśnieniem p przyjmiemy w równaniach (2.1)

$$
(2.2)\qquad T_0 = 0,\quad N_{10} = -\frac{ps\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2} - \frac{Ns_1}{s},\quad N_{20} = -ps\,\mathrm{tg}\,\gamma,
$$

gdzie s_1 oznacza odległość wierzchołka stożka od mniejszej podstawy. Ażeby przejść do równań drgań wymuszonych powłoki siłami okresowo zmiennymi z częstością θ należy siły N i p w (2.2) zastąpić siłami

$$
(2.3)\qquad N = N(t) = N_0 + N_t\cos\theta t,\qquad p = p(t) = p_0 + p_t\cos\theta t
$$

oraz wprowadzić do równań (2.1) składowe sił bezwładności

$$
(2.4)\qquad \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}s\sin\gamma,\qquad \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}s\sin\gamma,\qquad \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}s\sin\gamma,
$$

gdzie u, v, w oznaczają składowe przemieszczenia punktów powierzchni środkowej, N_0 i p_0 siły stałe, N_t i p_t siły pulsujące, h grubość powłoki, ρ masę właściwą materiału powłoki oraz t czas.

Podstawiając (2.2), (2.3) i (2.4) do równań (2.1) dostaniemy

$$
(2.5)\qquad
\begin{gathered}
N_1\sin\gamma + \frac{\partial N_1}{\partial s}s\sin\gamma - N_2\sin\gamma + \frac{\partial T_2}{\partial\varphi} = \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}s\sin\gamma,\\
\frac{\partial N_2}{\partial\varphi} + T_1\sin\gamma + \frac{\partial T_1}{\partial s}s\sin\gamma + T_2\sin\gamma = \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}s\sin\gamma,
\end{gathered}
$$

(2.5) [cd.]
$$2\frac{\partial M_1}{\partial s}\sin\gamma+\frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}s\sin\gamma-\frac{\partial M_2}{\partial s}\sin\gamma+\frac{1}{s\sin\gamma}\frac{\partial^2 M}{\partial\varphi^2}-\frac{1}{s}\frac{\partial H_1}{\partial\varphi}-$$
$$-\frac{1}{s}\frac{\partial H_2}{\partial\varphi}-\frac{\partial^2 H_1}{\partial s\partial\varphi}-\frac{\partial^2 H_2}{\partial s\partial\varphi}+N_2\cos\gamma-s\sin\gamma\times$$
$$\times\left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}N_{10}+\left(\frac{1}{s^2\sin^2\gamma}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}\right)N_{20}\right]=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}s\sin\gamma.$$

Składowe stanu odkształcenia związane są ze składowymi stanu przemieszczenia związkami

(2.6)
$$\varepsilon_1=\frac{\partial u}{\partial s},\qquad \varepsilon_2=\frac{1}{r}\left(u\sin\gamma+w\cos\gamma+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right),$$
$$\gamma_{12}=\frac{1}{r}\left(-v\sin\gamma+\frac{\partial u}{\partial\varphi}+r\frac{\partial v}{\partial s}\right),$$
$$\kappa_1=-\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},\qquad \kappa_2=-\frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2},$$
$$\kappa_{12}=\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\sin\gamma-r\frac{\partial^2 w}{\partial s\partial\varphi}\right),$$

gdzie $r=s\sin\gamma$. Pominięto tu wpływ przemieszczeń u i v na wielkości κ_1, κ_2, κ_{12}.

Związki pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla nieliniowego modelu tłumienia w jednoosiowym stanie naprężenia mają wg hipotezy DAWIDENKOWA [3, 6 i 8] postać następującą:

(2.7)
$$\vec{\overleftarrow{\sigma}}=E\left\{\varepsilon\mp\frac{\eta}{i}\left[(1\pm\cos\psi)^i-2^{i-1}\right]\varepsilon_0^i\right\},$$
$$\vec{\overleftarrow{\tau}}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left\{\gamma\mp\frac{\beta}{l}\left[(1-\cos\psi)^l-2^{l-1}\right]\gamma_0^l\right\},$$

gdzie strzałki $\rightleftarrows$ oznaczają gałąź odpowiadającą wzrostowi obciążenia i gałąź odpowiadającą obciążeniu malejącemu pętli histerezy, E moduł wydłużenia sprężystego oraz ν liczbę Poissona, η, β, i, l geometryczne parametry pętli histerezy odpowiednio przy rozciąganiu i skręcaniu dobierane dla danego materiału doświadczalnie, ε_0, γ_0 amplitudy deformacji podłużnej i kątowej, $\varepsilon(s,\varphi,t)=\varepsilon_0(s,\varphi)\cos\psi$, $\gamma(s,\varphi,t)=\gamma_0(s,\varphi)\cos\psi$ względną deformację podłużną i kątową w dowolnym czasie oraz $\psi(t)$ całkowity kąt fazowy.

Siły i momenty wewnętrzne przedstawimy w postaci

$$
(2.8)\qquad
\begin{gathered}
\overset{\rightleftarrows}{N}_1=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{1z}\,dz,\quad \overset{\rightleftarrows}{N}_2=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{2z}\,dz,\quad \overset{\rightleftarrows}{T}_1=\overset{\rightleftarrows}{T}_2=\overset{\rightleftarrows}{T}=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\tau}\,dz,\\
\overset{\rightleftarrows}{M}_1=-\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{1z}\,z\,dz,\quad M_2=-\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{2z}\,z\,dz,\quad \overset{\rightleftarrows}{H}_1=\overset{\rightleftarrows}{H}_2=\overset{\rightleftarrows}{H}=\int\limits_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\overset{\rightleftarrows}{\tau}\,z\,dz,
\end{gathered}
$$

gdzie

$$
(2.9)\qquad
\begin{aligned}
\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{1z}&=\frac{E}{1-\nu^2}\big[(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2)+z\,(\kappa_1+\nu\kappa_2)\big]\mp\frac{E\eta\,\big[(1\pm\cos\psi)^i-2^{i-1}\big]}{i\,(1-\nu^2)^i}\times\\
&\qquad\times\big[(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2+z\,(\kappa_1+\nu\kappa_2)\big]_0^i,\\
\overset{\rightleftarrows}{\sigma}_{2z}&=\frac{E}{1-\nu^2}\big[\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1+z\,(\kappa_2+\nu\kappa_1)\big]\mp\frac{E\eta\,\big[(1\pm\cos\psi)^i-2^{i-1}\big]}{i\,(1-\nu^2)\,i}\times\\
&\qquad\times\big[(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1)+z\,(\kappa_2+\nu\kappa_1)\big]_0^i,\\
\overset{\rightleftarrows}{\tau}&=\frac{E}{2\,(1+\nu)}\,(\gamma_{12}+2z\kappa_{12})\mp\frac{E\beta\,\big[(1\pm\cos\psi)^l-2^{l-1}\big]}{l\,(1+\nu)^l\,2^l}\,(\gamma_{12}+2z\kappa_{12})_0^l.
\end{aligned}
$$

Po uwzględnieniu związków (2.9) w (2.8) znajdziemy zależności między siłami, momentami i składowymi stanu odkształcenia powierzchni środkowej. Po wykonaniu całkowań otrzymamy

$$
(2.10)\qquad
\begin{aligned}
\overset{\rightleftarrows}{N}_1&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\,a_1\mp Aha_1^i\mp A\sum_{k=0}^{\frac{i-2}{2}}\frac{i\,(i-1)\,(i-2)\,\ldots\,(i-2\,k-1)}{2^{2\,(k+1)}\,(2k+3)\,!}\,a_1^{(i-2k-2)}\times\\
&\qquad\times b_1^{2\,(k+1)}\,h^{2k+3},\\
\overset{\rightleftarrows}{N}_2&=\frac{Eh}{1-\nu^2}\,a_2\mp Aha_2^i\mp A\sum_{k=0}^{\frac{i-2}{2}}\frac{i\,(i-1)\,(i-2)\,\ldots\,(i-2k-1)}{2^{2\,(k+1)}\,(2k+3)\,!}\,a_2^{(i-2k-2)}\times\\
&\qquad\times b_2^{2\,(k+1)}\,h^{2k+3},\\
\overset{\rightleftarrows}{T}&=\frac{Eh}{2\,(1+\nu)}\,a_3\mp Bh\,a_3^i\mp B\sum_{k_1=0}^{\frac{l-2}{2}}\frac{l\,(l-1)\,(l-2)\,\ldots\,(l-2k_1-1)}{2^{2\,(k_1+1)}\,(2k_1+3)\,!}+\\
&\qquad\times a_3^{(l-2k_1-2)}\,b_3^{2\,(k_1+1)}\,h^{2k_1+3},\\
\overset{\rightleftarrows}{M}_1&=-\frac{Eh^3}{12\,(1-\nu^2)}\,b_1-\Bigg\{\mp A\sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}}\frac{(k+1)\,i\,(i-1)\,(i-2)\,\ldots\,(i-2k)}{2^{(2k+1)}\,(2k+3)\,!}\times\\
&\qquad\times a_1^{(i-2k-1)}\,b_1^{2k+1}\,h^{2k+3}\Bigg\},
\end{aligned}
$$

(2.10) [cd.]

$$\overset{\rightleftarrows}{M}_2 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\, b_2 - \left\{ \mp A \sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}} \frac{(k+1)(i-1)(i-2)\dots(i-2k)}{2^{(2k+1)}(2k+3)\,!} \times \right.$$

$$\left. \times\, a_2^{(i-2k-1)}\, b_2^{2k+1}\, h^{2k+3} \right\},$$

$$\overset{\rightleftarrows}{H} = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}\, b_3 \mp B \sum_{k_1=0}^{\frac{l-1}{2}} \frac{(k_1+1)\, l\,(l-1)(l-2)\dots(l-2k_1)}{2^{(2k_1+1)}(2k_1+3)\,!} \times$$

$$\times\, a_3^{(l-2k_1-1)}\, b_3^{(2k_1+1)}\, h^{(2k_1+3)},$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\begin{aligned} &a_1 = \varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2, \quad a_2 = \varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1, \quad a_3 = \gamma_{12}, \\ &b_1 = \kappa_1 + \nu\kappa_2, \quad b_2 = \kappa_2 + \nu\kappa_1, \quad b_3 = 2\kappa_{12}, \\ &A = \frac{E\eta\,[(1 \pm \cos\psi)^i - 2^{i-1}]}{i\,(1-\nu^2)^i}, \quad B = \frac{E\beta\,[(1 \pm \cos\psi)^l - 2^{l-1}]}{l\,(1+\nu)^l\, 2^l}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Po wstawieniu (2.10) do (2.5) znajdziemy

$$\begin{aligned} &N_1 \sin\gamma + \frac{\partial N_1}{\partial s}\, s \sin\gamma - N_2 \sin\gamma + \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_1 = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, s \sin\gamma, \\ &\frac{\partial N_2}{\partial \varphi} + 2T \sin\gamma + \frac{\partial T}{\partial s}\, s \sin\gamma + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_2 = \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\, s \sin\gamma, \\ &2\frac{\partial M_1}{\partial s} \sin\gamma + \frac{\partial^2 M_1}{\partial s^2}\, s \sin\gamma - \frac{\partial M_2}{\partial s} \sin\gamma + \frac{1}{s \sin\gamma} \frac{\partial^2 M_2}{\partial \varphi^2} - 2\frac{1}{s} \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \\ &\quad - 2\frac{\partial^2 H}{\partial s\, \partial \varphi} + N_2 \cos\gamma - s \sin\gamma \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} N_{10} + \left(\frac{1}{s^2 \sin^2\gamma} \times \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \times \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) N_{20} \right] + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3 = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\, s \sin\gamma, \end{aligned} \tag{2.12}$$

gdzie ε oznacza mały parametr, a funkcje $\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_1$, $\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_2$, i $\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3$ charakteryzują efekty rozpraszania energii w materiale, przy czym

$$\begin{aligned} &\varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_1 = \bar{N}_1 \sin\gamma + \frac{\partial \bar{N}_1}{\partial s}\, s \sin\gamma - \bar{N}_2 \sin\gamma + \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varphi}, \\ &\varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_2 = \frac{\partial \bar{N}_2}{\partial \varphi} + 2\bar{T} \sin\gamma + \frac{\partial \bar{T}}{\partial s}\, s \sin\gamma, \\ &\varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3 = 2\frac{\partial \bar{M}_1}{\partial s} \sin\gamma + \frac{\partial^2 \bar{M}_1}{\partial s^2}\, s \sin\gamma - \frac{\partial \bar{M}_2}{\partial s} \sin\gamma + \\ &\quad + \frac{1}{s \sin\gamma} \frac{\partial^2 \bar{M}_2}{\partial \varphi^2} - 2\frac{1}{s} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \varphi} - 2\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial s\, \partial \varphi} + N_2 \cos\gamma, \end{aligned} \tag{2.13}$$

oraz

$$
(2.14)\quad
\begin{aligned}
&N_1 = \frac{Eha_1}{1-\nu^2}, \qquad N_2 = \frac{Eha_2}{1-\nu^2}, \qquad T = \frac{Eh}{2(1+\nu)}a_3,\\
&M_1 = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}b_1, \qquad M_2 - = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}b_2, \qquad H = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}b_3,
\end{aligned}
$$

przedstawiają siły i momenty stanu sprężystego, a siły i momenty tłumienia $\bar{N}_1$, $\bar{N}_2$, $\bar{T}$, $\bar{M}_1$, $\bar{M}_2$, $\bar{H}$ wynikają ze związków (2.10).

Dwa pierwsze równania układu (2.12) są tożsamościowo spełnione, jeśli pominiemy $\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_1$, $\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_2$ i styczne siły bezwładności, a siły N_1, N_2, T wyrazimy za pomocą funkcji sił $F(s, \varphi, t)$:

$$
(2.15)\quad
\begin{aligned}
&N_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial F}{\partial s}, \qquad N_2 = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2},\\
&T = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial s\,\partial\varphi} + \frac{\sin\gamma}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}.
\end{aligned}
$$

Za pomocą funkcji F i przemieszczenia w wyrazimy trzecie równanie układu (2.12), uwzględniając wzory (2.10), (2.15), (2.6) i (2.15). Otrzymamy wówczas

$$
(2.16)\quad
\begin{aligned}
&Dr\left(\frac{\partial^4 w}{\partial s^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial s^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 w}{\partial\varphi^4} + 2\frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3} - 2\frac{\sin\gamma}{r^3}\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial\varphi^2} +\right.\\
&\left. + 4\frac{\sin^2\gamma}{r^4}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} - \frac{\sin^2\gamma}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\sin^3\gamma}{r^3}\frac{\partial w}{\partial s}\right) + \cos\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} -\\
&-\left[r\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}N_{10} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \sin\gamma\frac{\partial w}{\partial s}\right)N_{20}\right] + \varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3 = -\rho h r\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.
$$

Ażeby związać siły N_1, N_2 i T zastosujemy równanie nierozdzielności odkształceń [5]:

$$
(2.17)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial s^4} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial s^2\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^4}\frac{\partial^4 F}{\partial\varphi^4} + 2\frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial s^3} - 2\frac{\sin\gamma}{r^3}\frac{\partial^3 F}{\partial s\partial\varphi^2} +\right.\\
&\left. + 4\frac{\sin^2\gamma}{r^4}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - \frac{\sin^2\gamma}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + \frac{\sin^3\gamma}{r^3}\frac{\partial F}{\partial s}\right) = \cos\gamma\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.
\end{aligned}
$$

Wprowadzając symbol operacyjny

$$
(2.18)\quad
\begin{aligned}
\Delta\Delta = {} & \frac{\partial^4}{\partial s^4} + 2\frac{1}{s^2}\frac{\partial^4}{\partial s^2\partial\varphi_1^2} + \frac{1}{s^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi_1^4} + 2\frac{1}{s}\frac{\partial^3}{\partial s^3} - 2\frac{1}{s^3}\frac{\partial^3}{\partial s\partial\varphi_1^2} +\\
& + 4\frac{1}{s^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi_1^2} - \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^3}\frac{\partial}{\partial s},
\end{aligned}
$$

otrzymamy dwa równania różniczkowe wiążące funkcje w i F:

$$
\begin{aligned}
&D\Delta\Delta w+\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{s}\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}+p(t)\,s\operatorname{tg}\gamma\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{1}{s}\frac{\partial w}{\partial s}+\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi_1^2}\right)+\\
&\qquad\qquad+N(t)\frac{s_1}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3=-\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},
\end{aligned}\tag{2.19}
$$

$$
\Delta\Delta F-Eh\frac{\operatorname{ctg}\gamma}{s}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}=0,
$$

gdzie $\varphi_1=\varphi\sin\gamma$.

3. Sprowadzenie równań ruchu do równania różniczkowego zwyczajnego

W dalszych rozważaniach posłużymy się nową zmienną

$$
z=\ln\frac{s}{s_1}\tag{3.1}
$$

oraz przyjmiemy funkcje sił i ugięcia w postaci

$$
\begin{aligned}
F(z,\varphi_1,t)&=\psi(z,t)\cos n_1\varphi_1,\\
w(z,\varphi_1,t)&=e^{\nu_1 z}W(z,t)\cos n_1\varphi_1,
\end{aligned}\tag{3.2}
$$

przy czym $n_1=\dfrac{n}{\sin\gamma}$, $\nu_1=\dfrac{1-\nu}{2}$, a n oznacza liczbę fal po obwodzie oraz s_1 odległość wierzchołka stożka od górnej podstawy.

Wstawiając (3.1) i (3.2) do układu równań (2.19) uzyskamy

$$
\begin{aligned}
L(z,\varphi_1,t)=&De^{(\nu_1-4)z}\Big\{\frac{\partial^4 W}{\partial z^4}-4(1-\nu_1)\frac{\partial^3 W}{\partial z^3}+(6\nu_1^2-12\nu_1+4-2n_1^2)\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\\
&+[4\nu_1^3-12\nu_1^2+8\nu_1+4n_1^2(1-\nu_1)]\frac{\partial W}{\partial z}+[\nu_1^4-4\nu_1^3+4\nu_1^2+\\
&+n_1(4-4\nu_1+2\nu_1^2)+n_1^4]W\Big\}\cos n_1\varphi_1+e^{(\nu_1-4z)}\Big\{s_1\operatorname{ctg}\gamma e^{(1-\nu_1)z}\times\\
&\times\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)+p(t)\operatorname{tg}\gamma\, s_1^3e^{3z}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\left(\nu_1+\frac{1}{2}\right)\frac{\partial W}{\partial z}-\right.\\
&\left.-\left(n_1^2-\frac{1}{2}\nu_1-\frac{1}{2}\nu_1^2\right)W\right]+N(t)\,e^z s_1^2\Big[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+(2\nu_1-1)\frac{\partial W}{\partial z}+\\
&+(\nu_1^2+\nu_1)W\Big]\Big\}\cos n_1\varphi_1+e^{\nu_1 z}s_1^4\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\cos n_1\varphi_1+\varepsilon\overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3=0,
\end{aligned}\tag{3.3}
$$

(3.3) [cd.]
$$\frac{\partial^4\psi}{\partial z^4}-4\frac{\partial^3\psi}{\partial z^3}-(2n_1^2-4)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+4n_1\frac{\partial\psi}{\partial z}+(n_1^4-4n_1^2)\psi-$$
$$-Ehs_1^2\operatorname{ctg}^2\gamma\, e^{(1+\nu_1)z}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+(2\nu_1-1)\frac{\partial W}{\partial z}+(\nu_1^2-\nu_1)W\right]=0,$$

gdzie

(3.4)
$$\varepsilon\vec{\vec{\Phi}}_3=-\left\{\mp\frac{2s_1^3}{e^z}A\sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}}\frac{(k+1)\,i\,(i-1)(i-2)\dots(i-2k)}{2^{2k+1}(2k+3)!}\times\right.$$
$$\left.\times\left[(i-2k-1)\,a_1^{i-2k-2}\,b_1^{2k+1}\frac{\partial a_1}{\partial s}+(2k+1)\,a_1^{i-2k-1}\,b_1^{2k}\frac{\partial b_1}{\partial s}\right]h^{2k+3}\right\}-$$
$$-\left\{\mp As_1^4\sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}}\frac{(k+1)\,i\,(i-1)(i-2)\dots(i-2k)}{2^{2k+1}(2k+3)!}\left[(i-2k-1)(i-2k-2)\times\right.\right.$$
$$\times a_1^{i-2k-3}\,b_1^{2k+1}\left(\frac{\partial a_1}{\partial s}\right)^2+(i-2k-1)\,a^{i-2k-2}\,b_1^{2k+1}\frac{\partial^2 a_1}{\partial s^2}+$$
$$+2(i-2k-1)(2k+1)\,a_1^{i-2k-2}\,b_1^{2k}\frac{\partial a_1}{\partial s}\,\frac{\partial b_1}{\partial s}+2(2k+1)\,ka_1^{i-2k-1}\,b_1^{2k-1}\times$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial b_1}{\partial s}\right)^2+(2k+1)\,a_1^{i-2k-1}\,b_1^{2k}\frac{\partial^2 b_1}{\partial s^2}\right]h^{2k+3}\right\}+$$
$$+\left\{\mp\frac{s_1^3}{e^z}A\sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}}\frac{(k+1)\,i\,(i-1)(i-2)\dots(i-2k)}{2^{2k+1}(2k+3)!}\left[(i-2k-1)\,a_2^{i-2k-2}\frac{\partial a_2}{\partial s}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times b_2^{2k+1}+(2k+1)\,a_2^{i-2k-1}\,b_2^{2k}\frac{\partial b_2}{\partial s}\right]h^{2k+3}\right\}-$$
$$-\left\{\mp\frac{s_1^3}{e^{2z}}A\sum_{k=0}^{\frac{i-1}{2}}\frac{(k+1)\,i\,(i-1)(i-2)\dots(i-2k)}{2^{2k+1}(2k+3)!}\left[(i-2k-1)(i-2k-2)\times\right.\right.$$
$$\times a_2^{i-2k-3}\,b_2^{2k+1}\left(\frac{\partial a_2}{\partial\varphi_1}\right)^2+(i-2k-1)\,a_2^{i-2k-2}\,b_2^{2k+1}\frac{\partial^2 a_2}{\partial\varphi_1^2}+$$
$$+2(2k+1)(i-2k-1)\,a_2^{i-2k-2}\,b_2^{2k}\frac{\partial a_1}{\partial\varphi_1}\,\frac{\partial b_2}{\partial\varphi_1}+2(2k+1)\,ka_2^{i-2k-1}\,b_2^{2k-1}\times$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{\partial b_2}{\partial\varphi_1}\right)^2+(2k+1)\,a_2^{i-2k-1}\,b_2^{2k}\frac{\partial^2 b_2}{\partial\varphi_1^2}\right]h^{2k+3}\right\}-$$
$$-\left\{\mp\frac{2s_1^2}{e^{2z}}B\sum_{k_1=0}^{\frac{l-1}{2}}\frac{(k_1+1)\,l\,(l-1)(l-2)\dots(l-2k_1)}{2^{2k_1+1}(2k_1+3)!}\left[(l-2k_1-1)\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times a_3^{l-2k_1-2}\,b_3^{2k_1+1}\frac{\partial a_3}{\partial\varphi_1}+(2k_1+1)\,a_3^{l-2k_1-1}\,b_3^{2k_1}\frac{\partial b_3}{\partial\varphi_1}\right]h^{2k_1+3}\right\}-$$

(3.4) [cd.]
$$-\left\{\mp\frac{2s_1^3}{e^z}B\sum_{k_1=0}^{\frac{l-1}{2}}\frac{(k_1+1)\,l\,(l-1)(l-2)\ldots(l-2k_1)}{2^{2k_1+1}(2k_1+3)!}\Big[(l-2k_1-1)\times\right.$$
$$\times(l-2k_1-2)\,a_3^{l-2k_1-3}\,b_3^{2k_1+1}\frac{\partial a_3}{\partial\varphi_1}\frac{\partial a_3}{\partial s}+(l-2k_1-1)\,a_3^{l-2k_1-2}\,b_3^{2k_1+1}\times$$
$$\times\frac{\partial^2 a_3}{\partial s\,\partial\varphi_1}+2\,(2k_1+1)(l-2k_1-1)\,a_3^{l-2k_1-2}\,b_3^{2k_1}\frac{\partial a_3}{\partial s}\frac{\partial b_3}{\partial\varphi_1}+$$
$$+2\,(k_1+1)\,k_1\,a_3^{l-2k_1-1}\,b_3^{2k_1-1}\frac{\partial b_3}{\partial s}\frac{\partial b_3}{\partial\varphi_1}+(2k_1+1)\,a_3^{l-2k_1-1}\,b_3^{2k_1}\times$$
$$\left.\times\frac{\partial^2 b_3}{\partial\varphi_1\,\partial s}\Big\}h^{2k_1+3}\right\}+\left\{\mp\frac{\operatorname{ctg}\gamma\,s_1^3}{e^z}Aha_2^l\mp\frac{\operatorname{ctg}\gamma\,s_1^3}{e^z}\times\right.$$
$$\left.\times A\sum_{k=0}^{\frac{i-2}{2}}\frac{i\,(i-1)(i-2)\ldots(i-2k-1)}{2^{2(k+1)}(2k+3)!}\,a_2^{l-2k-2}\,b_2^{2(k+1)}\,h^{2k+3}\right\},$$

przy czym

(3.5)
$$a_1=\frac{1-\nu^2}{Eh}\,\frac{1}{s_1^2 e^{2z}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-n_1^2\psi\right)\cos n_1\varphi_1,$$
$$a_2=\frac{1-\nu^2}{Eh}\,\frac{1}{s_1^2 e^{2z}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\cos n_1\varphi_1,$$
$$a_3=\frac{2\,(1+\nu)}{Eh}\,\frac{n_1}{s_1^2 e^{2z}}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\psi\right)\sin n_1\varphi_1,$$
$$b_1=\frac{e^{\nu_1 z}}{s_1^2 e^{2z}}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial W}{\partial z}(3\nu_1-1)+W(2\nu_1^2-\nu_1-\nu_1 n_1^2)\right]\cos n_1\varphi_1,$$
$$b_2=-\frac{e^{\nu_1 z}}{s_1^2 e^{2z}}\left[\nu_1\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}+\frac{\partial W}{\partial z}(1+2\nu_1^2-\nu_1)+W(\nu_1-\nu_1^2+\nu_1^3-n_1^2)\right]\cos n_1\varphi_1,$$
$$b_3=\frac{-2n_1 e^{\nu_1 z}}{s_1^2 e^{2z}}\left[\frac{\partial W}{\partial z}+W(1+\nu_1)\right]\sin n_1\varphi_1.$$

W dalszym ciągu zajmiemy się rozwiązaniem równania nierozdzielności $(3.3)_2$, określającego wraz z warunkami brzegowymi funkcję ψ. Rozważana powłoka jest swobodnie podparta na obu brzegach, usztywnionych przeponami, które uniemożliwiają przemieszczenie brzegów w kierunku normalnym w i stycznym v, a nie przeciwstawiają się przemieszczeniom podłużnym u.

Dla brzegów swobodnie podpartych obowiązują na obu końcach następujące warunki brzegowe:

(3.6)
$$W=0,\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial z}-n_1^2\psi=0,\qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0,$$

dla $z=0$ i $z=\ln\frac{s_2}{s_1}$. Warunki brzegowe będą spełnione, jeśli przyjmiemy

$$W=f(t)\sin m_1 z. \tag{3.7}$$

Po wstawieniu funkcji (3.7) do równania nierozdzielności $(3.3)_2$ obliczamy funkcję ψ. Ponieważ analogiczne przeliczenia zostały szczegółowo przeprowadzone w pracy [5], więc podajemy tutaj jedynie ich wyniki. Rozwiązaniem równania $(3.3)_2$ jest funkcja

$$\begin{aligned}\psi(z,t)=A_1 e^{n_1 z}+A_2 e^{-n_1 z}+A_3 e^{(n_1+2)z}+A_4 e^{(2-n_1)z}-\\ -f(t)\,Ehs_1\operatorname{ctg}\gamma\, e^{(1+\nu_1)z}(B_1\sin m_1 z+B_2\cos m_1 z),\end{aligned}\tag{3.8}$$

przy czym A_j $(j=1,2,3,4)$ i B_i $(i=1,2)$ wyznaczone z warunków brzegowych (3.6) mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
&A_1=-K\frac{(n_1\Phi_1+\Phi_2)e^{(1+\nu_1)u}\cos m\pi}{(m_1^2-n_1)(e^{n_1 u}-e^{-n_1 u})},\qquad A_2=K\frac{n_1\Phi_1-\Phi_2}{n_1^2+n_1},\\
&A_3=K\frac{\Phi_1 e^{(\nu_1-1)u}\cos m\pi}{(n_1+1)(e^{n_1 u}-e^{-n_1 u})},\qquad A_4=-K\frac{\Phi_1}{n_1-1},\\
&B_1=\frac{(m_1^2+\nu_1-\nu_1^2)\alpha_{mn}-4(\nu_1-2\nu_1^2)m_1^2\beta_{mn}}{\alpha_{mn}^2+16m_1^2\nu_1^2\beta_{mn}^2},\\
&B_2=\frac{m_1[(1-2\nu_1)\alpha_{mn}+4\nu_1(m_1^2+\nu_1-\nu_1^2)\beta_{mn}]}{\alpha_{mn}^2+16m_1^2\nu_1^2\beta_{mn}^2},
\end{aligned}\tag{3.9}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
&\Phi_1=0{,}25\{2m_1(1+\nu_1)B_1+[(1+\nu_1)^2-m_1^2-n_1^2]B_2\},\\
&\Phi_2=0{,}5\{-2m_1(1-\nu_1)B_1+[(1+4\nu_1-\nu_1^2)-n_1^2+m_1^2]B_2\},\\
&\alpha_{mn}=(m_1^2+n_1^2)^2-2(1+\nu_1^2)n_1^2+2(1-3\nu_1^2)m_1^2+(\nu^2-1)^2,\\
&\beta_{mn}=m_1^2+n_1^2+1-\nu_1^2,\\
&K=Ehs_1\operatorname{ctg}\gamma f(t),\qquad m_1=\frac{\pi m}{u},\qquad u=\ln\frac{s_2}{s_1},
\end{aligned}$$

przy czym m oznacza liczbę półfal w kierunku tworzącej oraz s_2 odległość wierzchołka stożka od podstawy dolnej.

Równanie różniczkowe cząstkowe $(3.3)_1$ sprowadzamy do równania różniczkowego zwyczajnego, stosując metodę Bubnowa-Galerkina. Wstawiając do $(3.3)_1$ funkcje (3.7) i $\psi(z,t)$, ortogonalizujemy równanie, mnożąc $L(z,\varphi_1,t)$ przez $e^{(\nu_1+2)z}\sin m_1 z\cos n_1\varphi_1\,dz\,d\varphi_1$ oraz całkujemy w granicach $0\leqslant z\leqslant\ln\frac{s_2}{s_1}$ i $0\leqslant\varphi_1\leqslant 2\pi\sin\gamma$. Mamy więc

$$\int_0^u\int_0^{2\pi\sin\gamma}L(z,\varphi_1,t)e^{(\nu_1+2)z}\sin m_1 z\cos n_1\varphi_1\,dz\,d\varphi_1=0.\tag{3.10}$$

Po scałkowaniu i przekształceniu otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne w postaci następującej:

$$\frac{d^2 f_{mn}(t)}{dt^2} + \Omega_{mn}^2 (1 - 2\mu_{mn} \cos\theta t) f_{mn}(t) + \overset{\rightleftarrows}{Y}(f) = 0, \tag{3.11}$$

gdzie

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{N_0}{N_{krmn}} - \frac{p_0}{p_{krmn}}\right),$$

$$N_{krmn} =$$

$$= \frac{(4C_1 + C_2 s_1^2 h)(1 - 2\nu_1)[(1-2\nu_1)^2 + 4m_1^2] - 4C_3 s_1^2 h (1 + 2\nu_1)[(1+2\nu_1)^2 + 4m_1^2]}{4(1 - e^{(2\nu_1 - 1)u})(2m_1^2 + 2\nu_1^2 - 2\nu_1 - 1) s_1^2},$$

$$p_{krmn} = \frac{(C_1 + C_2 s_1^2 h - 4hs_1^2 C_3)(1 + 2\nu_1)[(1+2\nu_1)^2 + 4m_1^2]}{4s_1^3 \operatorname{tg}\gamma (e^{(1+2\nu_1)u} - 1)(m_1^2 + 2n_1^2 - 3\nu_1 - 3\nu_1^2 - 0{,}5)},$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{(C_1 + C_2 s_1^2 h - 4C_3 s_1^2 h)(1 + \nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h (e^{2(1+\nu_1)u} - 1)}, \tag{3.12}$$

$$2\mu_{mn} = \frac{N_t}{N_{krmn}\left(1 - \frac{p_0}{p_{krmn}}\right) - N_0} + \frac{P_t}{p_{krmn}\left(1 - \frac{N_0}{N_{krmn}}\right) - p_0},$$

$$\overset{\rightleftarrows}{Y}(f) = \frac{4(1+\nu_1)[(1+\nu_1)^2 + m_1^2]}{s_1^4 \rho h m_1^2 (e^{2(1+\nu_1)u} - 1)} \int_0^u \int_0^{2\pi \sin\gamma} \varepsilon \overset{\rightleftarrows}{\Phi}_3 (z, \varphi_1, t)\, e^{(2+\nu_1)z} \times$$

$$\times \sin m_1 z \cos n_1 \varphi_1 \, d\varphi_1 \, dz,$$

przy czym

$$C_1 = \frac{D(1 - e^{2(\nu_1 - 1)u})[m_1^4 + 4(\nu_1 - 1)^2 m_1^2 - m_1^2 K_1 + (1 - \nu_1) K_2 + K_3]}{(1 - \nu_1)[(1 - \nu_1)^2 + m_1^2]},$$

$$C_2 = \frac{E \operatorname{ctg}^2 \gamma (e^{2\nu_1 u} - 1)[B_1 (m_1 \nu_1^2 + m_1^3) + B_2 (m_1^2 + \nu_1 m_1^2 + \nu_1^3 + \nu_1^2)]}{m_1 \nu_1 (\nu_1^2 + m_1^2)},$$

$$C_3 = \frac{E \operatorname{ctg}^2 \gamma}{m_1} \left[- \frac{(\Phi_2 + n_1 \Phi_1) e^{2\nu_1 u}}{(\nu_1 + n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \frac{\Phi_2 - n_1 \Phi_1}{(\nu_1 - n_1 - 1)^2 + m_1^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\Phi_1 (n_1 + 2) e^{2\nu_1 u}}{(\nu_1 + n_1 + 1) + m_1^2} + \frac{\Phi_1 (n_1 - 2)}{(\nu_1 - n_1 + 1)^2 + m_1^2} \right],$$

$$K_1 = 6\nu_1^2 - 12\nu_1 + 4 - 2n_1^2, \qquad K_2 = 4\nu_1^3 - 12\nu_1^2 + 8\nu_1 + 4n_1^2 (1 - \nu_1),$$

$$K_3 = \nu_1^4 - 4\nu_1^3 + 4\nu_1^2 - m_1^2 (4 - 4\nu_1 + 2\nu_1^2) + n_1^4.$$

Rozważane drgania opisane równaniem (3.11) są drganiami parametrycznymi, a wyraz ostatni określa nieliniową funkcję tłumienia w materiale powłoki, mamy zatem przypadek drgań nieliniowych układu dysypacyjnego. Drgania te można zaliczyć do słabo nieliniowych, ponieważ siły tłumienia nie są wielkie w stosunku do sił sprężystych, a amplituda harmonicznego wymuszenia jest mała; można więc do analizy drgań zastosować metodę asymptotycznych rozwinięć [2 i 11] względem potęg małego parametru. W związku z tym przyjmiemy równanie (3.11) w postaci następującej:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \Omega^2 f(t) = \varepsilon\left[2\mu\Omega^2 \cos\theta t f(t) - \dddot{Y}(f)\right], \tag{3.13}$$

gdzie ε jest małym dodatnim parametrem bezwymiarowym. Indeksy m i n pominięto dla uproszczenia zapisu.

4. Wyznaczenie podstawowego obszaru rezonansowego oraz amplitudy drgań ustalonych i nie ustalonych w przypadku ogólnym

Zajmiemy się najpierw drganiami w otoczeniu rezonansu. W takim przypadku istotną rolę odgrywa różnica faz między drganiami własnymi i zewnętrznym wymuszeniem, które ma wpływ na wielkość energii doprowadzonej do drgającego układu. W związku z tym jako zmienną przyjmiemy różnicę faz:

$$\vartheta = \psi - \frac{n}{m}\theta t = \psi - \frac{m}{n} p, \tag{4.1}$$

przy czym ψ jest kątem fazowym drgań swobodnych, a p kątem fazowym wymuszenia zewnętrznego. Rozpatrzymy drgania w otoczeniu podstawowego rezonansu, który w przypadku parametrycznego pobudzenia zachodzi dla częstości θ zawartych w pewnym otoczeniu wartości

$$\theta = 2\omega_0,$$

tj. dla $m=2$, $n=1$ (m-ta harmoniczna częstości własnej ω_0, n-ta harmoniczna częstości okresowego wymuszenia θ).

Rozwiązania $f(t)$ równania (3.11) w pierwszym uproszczonym przybliżeniu w otoczeniu rezonansu będziemy poszukiwać w postaci

$$f(t) = a\cos\left(\frac{1}{2}\theta t + \vartheta\right) = a\cos\psi, \tag{4.2}$$

gdzie

$$\psi = \vartheta + \frac{1}{2}\theta t = \vartheta + \frac{1}{2} p.$$

Amplitudę a i kąt fazowy ϑ wyznaczymy z równań różniczkowych, które wynikają z ogólnej metody asymptotycznych rozwinięć względem potęg małego parametru [4 i 11]. Równania te mają następującą postać:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon m}{4\pi^2 n\theta} \sum_k e^{-ik\frac{m}{n}\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [2\mu\Omega^2 \cos\theta t\, f(t) - \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)]\, e^{ik\frac{m}{n}\vartheta} \sin\psi\, dp\, d\psi,$$

(4.3)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega - \frac{n}{m}\theta - \frac{\varepsilon m}{4\pi^2 \theta a n} \sum_k e^{-ik\frac{m}{n}\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [2\mu\Omega^2 \cos\theta t\, f(t) - \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)]\, e^{ik\frac{m}{n}\vartheta} \cos\psi\, dp\, d\psi.$$

Po wstawieniu do równań (4.3) funkcji (4.2) oraz przyjęciu $m=2$ i $n=1$ otrzymamy

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi^2\theta} \sum_k e^{-i2k\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [2\mu\Omega^2 \cos\theta t\, a\cos\psi - \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)]\, e^{i2k\left(\psi - \frac{1}{2}p\right)} \sin\psi\, dp\, d\psi,$$

(4.4)

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega - \frac{1}{2}\theta - \frac{\varepsilon}{2\pi^2\theta a} \sum_k e^{-i2k\vartheta} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} [2\mu\Omega^2 \cos\theta t\, a\cos\psi - \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)]\, e^{i2k\left(\psi - \frac{1}{2}p\right)} \cos\psi\, dp\, d\psi.$$

Pierwsze z równań (4.4) przekształcimy w następujący sposób:

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi^2\theta} \sum_k e^{-i2k\vartheta} \Big[\int_0^{2\pi} 2\mu a\Omega^2 \sin\psi\cos\psi\, e^{2ik\psi}\, d\psi \int_0^{2\pi} \cos p\, e^{-ikp}\, dp - \int_0^{2\pi} \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\, e^{i2k\psi} \sin\psi\, d\psi \int_0^{2\pi} e^{-ikp}\, dp\Big] =$$

$$= \frac{-\varepsilon}{2\pi^2\theta} \sum_k e^{-2ik\vartheta} \Big[\int_0^{2\pi} 2a\mu\Omega^2 \sin\psi\cos\psi\, (\cos 2k\psi + i\sin 2k\psi)\, d\psi \int_0^{2\pi} \cos p\, (\cos kp - i\sin kp)\, dp -$$

$$- \int_0^{2\pi} \overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi) \sin\psi\, (\cos 2k\psi + i\sin k\psi)\, d\psi \int_0^{2\pi} (\cos kp - i\sin kp)\, dp\Big].$$

Przyjmując w pierwszych dwu całkach $k=\pm 1$, a w pozostałych $k=0$, otrzymamy po scałkowaniu

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon}{\pi\theta}\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi-\frac{\varepsilon a\mu\Omega^2}{\theta}\sin 2\vartheta\,. \tag{4.5}$$

Postępując analogicznie napiszemy równanie $(4.4)_2$ w postaci

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\Omega-\frac{\theta}{2}-\frac{\varepsilon\mu\Omega^2}{\theta}\cos 2\vartheta+\frac{\varepsilon}{\theta a\pi}\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi\,. \tag{4.6}$$

Z równań (4.5) i (4.6) można wyznaczyć amplitudę a i kąt fazowy ϑ drgań nie ustalonych. Układ równań nie daje się całkować w postaci zamkniętej; do wyznaczenia a i ϑ trzeba stosować metody numeryczne.

Z kolei rozpatrzymy ustalone drgania parametryczne. Najpierw zajmiemy się wyznaczeniem amplitudy a oraz kąta fazowego ϑ drgań ustalonych. Wykorzystamy w tym celu równanie (4.5) i (4.6), przyrównując prawe strony tych równań do zera:

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon}{\pi\theta}\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi-\frac{\varepsilon a\mu\Omega^2}{\theta}\sin 2\vartheta=0\,,\\ \Omega-\frac{\theta}{2}-\frac{\varepsilon\mu\Omega^2}{\theta}\cos 2\vartheta+\frac{\varepsilon}{\theta a\pi}\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi=0\,.\end{gathered} \tag{4.7}$$

Stąd obliczymy

$$\begin{gathered}\sin 2\vartheta=\frac{1}{\mu\pi a\Omega^2}\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\,,\\ \left(\frac{\theta}{2\Omega}\right)^2=1-\varepsilon\mu\left(\cos 2\vartheta-\frac{\sin 2\vartheta\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi}{\int_0^{2\pi}\overset{\rightleftarrows}{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi}\right),\end{gathered} \tag{4.8}$$

przy czym w drugim równaniu (4.7) w granicach dokładności pierwszego uproszczonego przybliżenia przyjęto

$$\theta\approx\frac{1}{2}\theta+\Omega\,. \tag{4.9}$$

Amplitudę i kąt fazowy ustalonych drgań z uwzględnieniem tłumienia przy głównym parametrycznym rezonansie wyznaczymy z układu równań (4.8). Rozwiązując układ równań (4.8) względem amplitudy a można otrzymać funkcję $a=f(\theta/2\Omega)$ pozwalającą wykreślić krzywą rezonansową. Granice głównego obszaru dynamicznej niestateczności określimy na podstawie równań (4.7). Przepiszemy te równania w postaci

$$\varepsilon\mu\Omega^2\sin 2\vartheta = \frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi,$$

$$\varepsilon\mu\Omega^2\cos 2\vartheta = \left(\theta\Omega-\frac{\theta^2}{2}\right)+\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi,$$

podnieśmy je stronami do kwadratu i dodajmy; otrzymamy wówczas

$$\varepsilon^2\mu^2\Omega^4 = \frac{\varepsilon^2}{\pi^2a^2}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^2+\left(\theta\Omega-\frac{\theta^2}{2}\right)^2+ \tag{4.10}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{\pi^2a^2}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi\right]^2+2\left(\theta\Omega-\frac{\theta^2}{2}\right)\frac{\varepsilon}{a\pi}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi.$$

Rozwiązując (4.10) względem $(\theta\Omega-\theta^2/2)$ uzyskamy

$$\left(\theta\Omega-\frac{\theta^2}{2}\right) = -\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi\pm \tag{4.11}$$

$$\pm\sqrt{\varepsilon^2\mu^2\Omega^4-\frac{\varepsilon^2}{\pi^2a^2}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^2}.$$

Uwzględniając (4.9) napiszemy równanie (4.11) w postaci

$$\Omega^2-\frac{\theta^2}{4} = -\frac{\varepsilon}{\pi a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi\pm$$

$$\pm\varepsilon\sqrt{\mu^2\Omega^4-\frac{1}{\pi^2a^2}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^2},$$

stąd

$$1+\frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi- \tag{4.12}$$

$$-\varepsilon\sqrt{\mu^2-\frac{1}{\pi^2a^2\Omega^4}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^2}<$$

$$<\left(\frac{\theta}{2\Omega}\right)^2<1+\frac{\varepsilon}{\pi\Omega^2a}\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\cos\psi\,d\psi+$$

$$+\varepsilon\sqrt{\mu^2-\frac{1}{\pi^2a^2\Omega^4}\left[\int_0^{2\pi}\vec{Y}(a\cos\psi)\sin\psi\,d\psi\right]^2}.$$

Jako mały parametr przyjmiemy współczynnik pulsacji μ (ε=1). Wykorzystując warunek (4.12), możemy wyznaczyć granice głównego obszaru dynamicznej niestateczności. Szczegółowy przykład ilustrujący nasze rozważania będzie obliczony w publikacji następnej.

Literatura cytowana w tekście

1. А. А. Березовски, А. Й. Митрополски, *Асимптотические методы в теории параметрических колебаний сжатых гибких пластин*, Исбранные проблемы прикладной механики, Изд. АНСССР, Москва 1974.
2. М. М. Богольюьов, А. Й. Митропольски, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, изд. 3, Гос. Издат. Физ-Мат. Лит., Москва 1963.
3. Н. Н. Давиденков, *О рассеянии энергии при вибрасиях*, Журнал Техн. Физики, 6, 1968.
4. А. И. Митропольски, *Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний*, ,,Наука", Москва 1964.
5. Х. М. Муштарии, А. В. Саченков, *Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместной действии осевого сжатия и внешного нормального давлебия*, Прикл. Мат. Мех., 18, Москва 1974.
6. Й. Г. Пановко, *Внутренные трение при колебаниях упругих систем*, Физматгиз, Москва 1960.
7. Г. С. Писаренко, *Рассеяние енергии при механических колебаниях*, Изд. АНСССР, Киев 1962.
8. Г. С. Писаренко, *Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале*, Изф. АНУССР, Киев 19655.
9. Г. С. Писаренко, *Рассеяние энергии при колебаниях механических систем*, АНУССР, ,,Науковаяа думка", Киев 1968.
10. Г. С. Писаренко, *Колебания механических систем с учетом несовершенной упругости материала*, ,,Науковая думка", Киев 1970.
11. *Drgania i fale*, red. S. Kaliski, PWN, Warszawa 1966.
12. Е. С. Сорокин, *Методы учета неупругово сопротивления материала при расчете конструкции на колебания*, Исследования по динамике сооружений, Строиздат, 1951.
13. В. З. Власов, *Общая теория оболочек и пластин и ей приложения в технике*, Гостехиздат, Москва 1949.

Резюме

ПРОБЛЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе выведены уравнения динамической устойчивости оболочки в виде усеченного конуса, принимая во внимание демпфирующие свойства материала. Определены границы главной резонансной области, рассмотрены параметрические демпфированные колебания небольшой амплитуды, возбужденные действием периодически изменяемых продольных сил и всестороннего равномерного внешнего давления. Рассуждения опираются на линейные геометрические соотношения, принимая действителность гипотезы Кирхгоффа-Лява. Оболочка тенкостенная и свободно оперта по краям.

S u m m a r y

DYNAMIC STABILITY OF A CONICAL SHELL DERIVATION OF BASIC EQUATIONS

The paper deals with derivation of dynamic stability equations of a truncated conical shall, assuming the damping properties of the material of the shell. The main resonance region limits have been calculated, and low amplitude damped vibrations, under periodic longitudinal forces and external hydrostatic uniform pressure, have been considered.

The considerations are based on the linear geometrical relations, assuming the Kirchhoff-Love hypothesis. The shell is thin and simply supported at the edges.

POLITECHNIKA POZNAŃSKA
INSTYTUT MECHANIKI TECHNICZNEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 października 1977 r.