

TERMICZNE ZGINANIE TARCZ WIRNIKOWYCH W PRZYPADKU MAŁYCH WAHAŃ TEMPERATURY W WARUNKACH NIELIOWEGO PEŁZANIA

JAN WALCZAK (RZESZÓW)

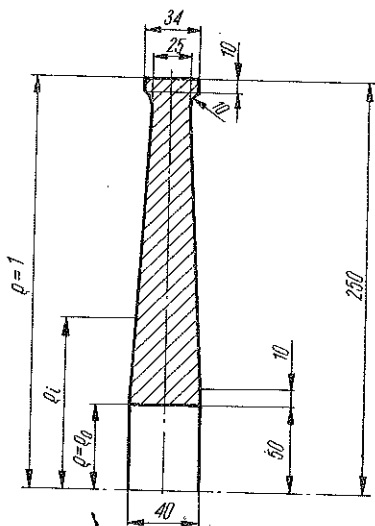
Przedmiotem rozważań niniejszej pracy są reologiczne zagadnienia tarcz wirnikowych poddanych jednoczesnemu osiowo-symetrycznemu zginaniu. Zakładając, że rozkład temperatury jest funkcją grubości, promienia i czasu, odkształcenia są małe, grubość tarczy nie zmienia się w procesie deformacji, spełnione są założenia teorii Love'a-Kirchhoffa, materiał tarczy jest jednorodny, izotropowy i nieściśliwy — przedstawiono numeryczne rozwiązanie przy zastosowaniu kombinacji metod Bubnowa-Galerkina i Rungego-Kutty. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w formie graficznej.

1. WSTĘP

W rzeczywistych warunkach pracy turbin gazowych, w szczególności silników lotniczych, mogą występować wahania temperatury w czasie w sąsiedztwie turbiny, z powodu manewrów samolotu, a zatem zmienności reżimów termicznych pracy silnika turbinowego w różnych fazach eksploatacji.

Aby przedstawić, jak zmienia się rozkład naprężeń i odkształceń w czasie w tego rodzaju warunkach obciążeń cieplnych, rozważmy przypadek niewielkich zmian czasowych pola temperatury.

Jako model fizyczny posłuży nam tarcza wirnikowa przedstawiona na rys. 1 przy następujących założeniach: 1) rozkład temperatury w tarczy jest funkcją promienia, grubości i czasu; 2) wobec małości zmian temperatury, stałe fizyczne występujące w równaniach konstytutywnych (będące w istocie funkcjami temperatury) nie ulegają zmianie w ślad za wahaniami temperatury; 3) w świetle założenia, że temperatura zmienia się wzdłuż grubości, jak również w wyniku występowania różnicy ciśnień, będziemy mieli do czynienia z tarczą podlegającą osiowo-symetrycznemu zginaniu; 4) materiał tarczy jest izotropowy, jednorodny, nieściśliwy i wykazuje efekty reologiczne w warunkach pracy tarcz.



Rys. 1.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA

Jako równanie konstytutywne przyjmiemy uogólnione prawo pełzania Nortona-Odqvista, które napiszemy w formie podanej przez Z. BYCHAWSKIEGO [1]:

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = F s_{ij} + \alpha T \delta_{ij},$$

gdzie wprowadziliśmy następujące oznaczenia: ε_{ij} — składowe tensora odkształcenia, s_{ij} — składowe tensora naprężenia, F — nieliniowy operator, α — współczynnik rozszerzalności liniowej, T — funkcja określająca zmienny rozkład temperatury oraz δ_{ij} — symbol Kroneckera.

Nieliniowy operator F można przedstawić w formie

$$(2.2) \quad F s_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_e^{m-1} s_{ij} + \int_0^t \frac{3}{2} A \sigma_e^{n-1} s_{ij}(\tau) d\tau,$$

gdzie

$$(2.3) \quad \sigma_e = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{1/2}$$

oraz gdzie A , B , n i m są stałymi materiałowymi.

Tak napisane prawo fizyczne stwarza trudności natury obliczeniowej. Z tego powodu pominiemy odkształcenia sprężyste natychmiastowe, przyjmując równania fizyczne w formie [1]

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_r &= A \sigma_e^{n-1} \left(\sigma_r - \frac{1}{2} \sigma_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T), \\ \dot{\varepsilon}_\varphi &= A \sigma_e^{n-1} \left(\sigma_\varphi - \frac{1}{2} \sigma_r \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T), \end{aligned}$$

gdzie indeks r oznacza składową promieniową, indeks φ składową obwodową stanu naprężenia.

Rozpatrując równowagę elementu wirującej i zginanej tarczy otrzymamy równania równowagi wewnętrznej [5]:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \frac{dM_r}{dp} + M_r - M_\varphi + Q\rho &= 0, \\ \frac{dN_r}{dp} + N_r - N_\varphi + kh\rho^2 &= 0, \\ \frac{dQ}{dp} + Q - pR\rho &= 0. \end{aligned}$$

W równaniach tych przyjęliśmy następujące oznaczenia:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} k &= \frac{\gamma}{g} \omega^2 R^2, \\ \rho &= \frac{r}{R}, \end{aligned}$$

r promień bieżący, R promień zewnętrzny, h grubość tarczy, ω prędkość kątowna, γ ciężar właściwy, g przyspieszenie ziemskie, p różnica ciśnień oraz

$$(2.7) \quad \begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r z dz, & M_\varphi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi z dz, \\ N_r &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_r dz, & N_\varphi &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi dz. \end{aligned}$$

Ze względu na występowanie efektów giętnych całkowite odkształcenie przyjmujemy w formie (przy założeniu teorii Love'a-Kirchhoffa)

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \varepsilon_r &= \varepsilon_{r0} + \varepsilon_{rb} = \frac{1}{R} \frac{du}{d\rho} - \frac{z}{R^2} \frac{d^2 w}{d\rho^2}, \\ \varepsilon_\varphi &= \varepsilon_{\varphi0} + \varepsilon_{\varphi b} = \frac{1}{R} \frac{u}{\rho} - \frac{z}{R^2} \frac{dw}{d\rho} \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

W równaniach tych oznaczają: ε_{r0} , $\varepsilon_{\varphi0}$ odkształcenia powierzchni środkowej. wynikającej z wirowania; ε_{rb} , $\varepsilon_{\varphi b}$ odkształcenia pochodzące od zginania, u przemieszczenie promieniowe, w ugięcie poprzeczne oraz z zmienna wzdłuż grubości tarczy-

3. METODA ROZWIĄZANIA

Rozwiązanie zagadnienia wirującej płyty kołowo-symetrycznej, termicznie zginanej, przeprowadzimy za pomocą numerycznej kombinacji metod Rungego-Kutty i Bubnowa-Galerkina. Celem rozwiązania będzie uchwycenie wpływu niewielkich zmian pola temperatur zachodzących w czasie na rozkład naprężeń i przemieszczeń w wirującej i zginanej tarczy dla materiału wykazującego efekty reologiczne zgodnie z równaniami konstytutywnymi (2.4).

Równania te napiszemy w formie odwróconej:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2}{3} A_0 e^{n_0-1} \left[2\dot{\varepsilon}_r + \dot{\varepsilon}_\varphi - 3 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial t} \right], \\ \sigma_\varphi &= \frac{2}{3} A_0 e^{n_0-1} \left[2\dot{\varepsilon}_\varphi + \dot{\varepsilon}_r - 3 \frac{\partial(\alpha T)}{\partial t} \right], \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.2) \quad \begin{aligned} A_0 &= A^{-n_0}, & n_0 &= \frac{1}{n}, \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{2}{\sqrt{3}} (\dot{\varepsilon}_r^2 + \dot{\varepsilon}_r \dot{\varepsilon}_\varphi + \dot{\varepsilon}_\varphi^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Związki geometryczne między prędkościami odkształceń a prędkościami przemieszczeń wynikają z różniczkowania względem czasu funkcji (2.8):

$$(3.3) \quad \dot{\varepsilon}_r = \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho} - \frac{z}{R^2} \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \rho^2}, \quad \dot{\varepsilon}_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\dot{u}}{\rho} - \frac{z}{R^2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho}$$

lub

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \dot{\epsilon}_r &= \dot{a} - b\dot{z}, \\ \dot{\epsilon}_\varphi &= \dot{c} - \dot{d}z, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \dot{a} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho}, & \dot{b} &= \frac{\partial^2 \dot{w}}{\partial \rho^2} \frac{1}{R^2}, \\ \dot{c} &= \frac{1}{R} \frac{\dot{u}}{\rho}, & \dot{d} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \dot{w}}{\partial \rho} \frac{1}{R^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie zagadnienia sprowadza się do określenia funkcji przemieszczeń $u(\rho, t)$ i $w(\rho, t)$. Poszukiwanie funkcji ugięcia $w(\rho, t)$ przeprowadzimy metodą Bubnowa-Galerkina. Warunki Bubnowa-Galerkina (przy założeniu, że równanie równowagi (2.5)₂ spełnione jest tożsamościowo⁽¹⁾) sprowadzają się do postaci

$$(3.6) \quad \int_{\rho_0}^1 x \frac{d\eta_i}{d\rho} \rho d\rho = 0,$$

gdzie

$$(3.7) \quad x = \frac{dM_r}{d\rho} + \frac{1}{\rho} (M_r - M_\varphi) + Q$$

oraz gdzie $\eta_i = \eta_i(\rho)$ oznacza funkcję zmiennej promieniowej ρ , występującej w równaniu, w którym zakładamy, że rozwiązanie ma postać

$$(3.8) \quad w(\rho, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \eta_i(\rho).$$

W dalszych rozważaniach założymy postać ugięcia $w(\rho, t)$ w formie

$$(3.9) \quad w(\rho, t) = f_0(t) \left[\frac{-pR\rho^4}{64} + \frac{pR\rho^2}{8} (\ln \rho - 1) + \right. \\ \left. + C_1 \rho^2/4 + C_2 \ln \rho + C_3 \right] = f_0(t) \eta_0(\rho),$$

gdzie C_1, C_2, C_3 oznaczają stałe całkowania, które wyznaczymy z następujących warunków brzegowych:

$$(3.10) \quad \begin{aligned} \eta_0|_{\rho=\rho_0} &= 0, & \frac{d\eta_0}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} &= 0, \\ M_r|_{\rho=1} &= 0. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Uzasadnienie tego założenia wynika z przedstawionej analizy w końcowej części rozdziału 2.3 w pracy [4].

Stałe C_1, C_2, C_3 występujące w równaniu (3.9), obliczone z warunków (3.10) mają postać:

$$(3.11) \quad \begin{aligned} C_1 &= \frac{pR3\rho_0^4/2 - 6\rho_0^2(\ln \rho_0 - 0,5) + 11}{12(\rho_0^2 + 3)}, \\ C_2 &= -11pR/24 + 3C_1/2, \\ C_3 &= \frac{pR}{64}\rho_0^4 - pR\rho_0^2(\ln \rho_0 - 1)/8 - C_1\rho_0^2/4 - C_2 \ln \rho_0. \end{aligned}$$

Pozostałe warunki brzegowe mają postać

$$(3.12) \quad u|_{\rho=\rho_0} = 0, \quad \sigma_r|_{\rho=1} = 0.$$

Równanie Bubnowa-Galerkina przedstawimy w formie wygodnej do obliczeń numerycznych mających na celu określenie funkcji $f_0(t)$. Niezbędny jest tu jeszcze warunek początkowy celem efektywnego określenia funkcji ugięcia $w(\rho, t)$. Warunek ten przyjmijemy w postaci

$$(3.13) \quad w(\rho, t)|_{t=0} = 0.$$

Wykorzystując równanie (3.6) oraz (3.7) otrzymamy

$$(3.14) \quad \int_{\rho_0}^1 (M_1 + M_2 + QR) \frac{\partial \eta_0}{\partial \rho} \rho \, d\rho = 0,$$

w którym

$$(3.15) \quad M_1 = \frac{dM_r}{d\rho}, \quad M_2 = \frac{1}{\rho} (M_r - M_\varphi)$$

oraz gdzie Q oznacza poprzeczną określoną (2.5)₃, R promień zewnętrzny tarczy, M_r, M_φ jednostkowe momenty gnące, a również

$$(3.16) \quad \frac{\partial \eta_0}{\partial \rho} = -\frac{pR\rho^3}{16} + \frac{pR\rho}{4} (\ln \rho - 0,5) + C_1\rho/2 + C_2/\rho.$$

Aby obliczyć jednostkowe momenty gnące M_r, M_φ z równań (2.10), dokonamy rozwinięcia wyrazu nieliniowego występującego w równaniu konstytutywnym (3.1).

W tym celu funkcję intensywności odkształcenia określimy w następujący sposób:

$$(3.17) \quad \dot{\epsilon}^{2a} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{2a} a_0^a (1+x)^a,$$

gdzie przyjęliśmy następujące oznaczenia:

$$(3.18) \quad \begin{aligned} x &= d_1 z + d_2 z^2, \\ d_1 &= \frac{a_1}{a_0}, \quad d_2 = \frac{a_2}{a_0} \end{aligned}$$

oraz

$$(3.19) \quad \begin{aligned} a_0 &= \dot{a}^2 + b^2 + \dot{a}\dot{c}, \\ \dot{a}_1 &= -(2\dot{a}\dot{b} + 2\dot{c}\dot{d} + \dot{a}\dot{d} + \dot{c}\dot{b}), \\ a_2 &= b^2 + d^2 + \dot{d}\dot{b}. \end{aligned}$$

Występujące w powyższych równaniach wielkości \dot{a} , \dot{b} , \dot{c} , \dot{d} wyrażające składowe prędkości stanu odkształcenia (określone równaniami (3.5)) przedstawimy w następującej formie (po uwzględnieniu wzoru (3.9)):

$$(3.20) \quad \dot{a} = \dot{u}_\rho / R, \quad \dot{c} = \dot{u} / \rho R,$$

gdzie $\dot{u}_\rho = \frac{\partial \dot{u}}{\partial \rho}$, kropka zaś oznacza pochodną względem czasu,

$$(3.21) \quad \begin{aligned} b &= \left[\frac{-3}{16} pR\rho^2 + \frac{pR}{4} (\ln \rho + 0,5) + C_1/2 - C_2/\rho^2 \right] \dot{f}_0(t)/R^2, \\ d &= \left[\frac{-1}{16} pR\rho^2 - \frac{pR}{4} (\ln \rho - 0,5) + C_1/2 + C_2/\rho^2 \right] \dot{f}_0(t)/R^2. \end{aligned}$$

A zatem wyrażenie (3.17) przedstawione w formie rozwiniętej przyjmuje postać

$$(3.22) \quad \dot{e}_1^{2q} = \frac{\dot{e}^{2q}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2q}} = a_0^q (1 + b_{10}z + b_{20}z^2 + b_{30}z^3 + b_{40}z^4 + b_{50}z^5 + b_{60}z^6 + \dots),$$

przy czym rozwinięcie to jest poprawne dla $x \in (0, 1)$.

Współczynniki rozwinięcia b_{10} , b_{20} , b_{30} , ..., b_{60} , ... określone są w pracy M. ŻYCKOWSKIEGO [6].

Funkcję prędkości intensywności odkształcenia (3.22) w postaci rozwiniętej uwzględnimy w równaniu konstytutywnym (3.1), które w zapisie macierzowym możemy przedstawić w formie:

$$(3.23) \quad \{\sigma\} = D_s a_0^q [\gamma]^T \{Z\}.$$

Wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(3.24) \quad \begin{aligned} D_s &= \frac{2^{n_0}}{3^{q+1}} S, \\ q &= \frac{n_0 - 1}{2}, \\ S &= A^{-n_0}, \quad n_0 = \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

macierze zaś:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} \{\sigma\} &= [\sigma_r, \sigma_\phi]^*, \\ \{Z\} &= [1, z, z^2, \dots, z^6 \dots]^*, \\ [\kappa] &= \begin{bmatrix} c_{00}, c_{11}, \dots, c_{77} \dots \\ g_{00}, g_{11}, \dots, g_{77} \dots \end{bmatrix}^* \end{aligned}$$

gdzie gwiazdką []* oznaczyliśmy macierz transformowaną macierzy [] (dla zawartości zapisu).

Wyrazy macierzy [κ] obliczymy z równania będącego konsekwencją rozwinięcia (3.26):

$$(3.26) \quad [\kappa] = [B] [E],$$

w którym wprowadziliśmy następujące oznaczenia:

$$(3.27) \quad [E] = \begin{bmatrix} b_5 & b_7 \\ b_6 & b_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\dot{a} + \dot{c} - 3 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{11}) & 2\dot{c} + \dot{a} - 3 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{11}) \\ -2b - d - 3 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{22}) & -2d - b - 3 \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{22}) \end{bmatrix},$$

$$(3.28) \quad [B] = \begin{bmatrix} 1, b_{10}, b_{20}, \dots, b_{70} \dots \\ 0, 1, b_{10}, \dots, b_{60} \dots \end{bmatrix}^*.$$

Funkcje T_{11} , T_{22} , występujące w macierzy (3.27) wynikają z przyjętego liniowego rozkładu temperatury wzdłuż grubości tarczy:

$$(3.29) \quad T(\rho, z, t) = z \frac{T_2(\rho, t) - T_1(\rho, t)}{h} + \frac{T_2(\rho, t) + T_1(\rho, t)}{2} = z \frac{T_{22}}{h} + \frac{T_{11}}{2},$$

gdzie $T_1(\rho, t)$, $T_2(\rho, t)$ oznaczają temperatury w skrajnych włóknach tarczy oraz h grubość tarczy.

Po wykorzystaniu równania konstytutywnego (3.23) we wzorach określających jednostkowe momenty gnące (2.7)₁ po scałkowaniu otrzymamy

$$(3.30) \quad M = D_s a_0^a [C_1] \{B_1\}.$$

W równaniu tym

$$(3.31) \quad \begin{aligned} \{M\} &= [M_r, M_\phi]^*, \\ [C_1] &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{33} & c_{55} & c_{77} \dots \\ g_{11} & g_{33} & g_{55} & g_{77} \dots \end{bmatrix}, \\ \{B_1\} &= [b_1, b_2, b_3, b_4 \dots]^* = \begin{bmatrix} \frac{h^3}{12} & \frac{h^5}{80} & \frac{h^7}{448} & \frac{h^9}{2304} \dots \end{bmatrix}^*. \end{aligned}$$

Nieokreśloną wielkością warunku Bubnowa-Galerkina (3.14) jest pochodna jednostkowa momentu gnącego.

Na podstawie równania (3.31) jednostkowy moment gnący przedstawimy w formie

$$(3.32) \quad M_r = D_s a_0^q \{C_1^\square\}^T \{B_1\} = D_s a_0^q B_1^\square,$$

gdzie

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \{C_1^\square\} &= [c_{11}, c_{33}, c_{55}, c_{77} \dots]^*, \\ B_1^\square &= \{C_1^\square\}^T \{B_1\}. \end{aligned}$$

Wykonując operację różniczkowania funkcji (3.32) otrzymamy

$$(3.34) \quad M_1 = \frac{\partial M_r}{\partial \rho} = D_s \{M_x\}^T \{A_u\},$$

gdzie

$$(3.35) \quad \begin{aligned} \{M_x\} &= [B_1^\square, Z_1]^*, \\ \{A_u\} &= \begin{bmatrix} q a_0^{q-1} W_1 \\ a_0^q \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

We wzorach tych występują następujące wielkości:

$$(3.36) \quad \begin{aligned} Z_1 = \frac{\partial B_1^\square}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} (\{C_1^\square\}^T \{B_1\}) = \frac{\partial}{\partial \rho} (\{C_1^\square\}^T) \{B_1\} + \\ &+ \{C_1^\square\}^T \frac{\partial}{\partial \rho} (\{B_1\}) = \{C_\rho\}^T \{B_1\} + \{C_1^\square\}^T \{B_\rho\}, \\ W_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} (a_0) &= V_{33} (2\dot{a} + \dot{c}) + V_{44} (2\dot{c} + \dot{a}), \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.37) \quad V_{33} = \frac{\partial \dot{a}}{\partial \rho}, \quad V_{44} = \frac{\partial \dot{c}}{\partial \rho}.$$

Do określenia pozostały więc macierze $\{C_\rho\}$ i $\{B_\rho\}$, które znajdujemy przez różniczkowanie:

$$(3.38) \quad \{B_\rho\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \{B_1\} = \begin{bmatrix} 0,25 h^2 \frac{dh}{d\rho} \\ 0,0625 h^4 \frac{dh}{d\rho} \\ 0,015625 h^6 \frac{dh}{d\rho} \\ 0,0039063 h^8 \frac{dh}{d\rho} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix},$$

$$\{C_\rho\} = \frac{\partial}{\partial \rho} \{C_1^\square\} = \frac{\partial}{\partial \rho} [c_{11}, c_{33}, c_{55}, c_{77} \dots]^* = [A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12} \dots].$$

Zatem na podstawie wzoru (3.26) macierz $\{C_\rho\}$ przyjmie kształt

$$(3.39) \quad \{C_\rho\} = \frac{\partial}{\partial \rho} = \left(\begin{bmatrix} b_{10}, b_{30}, b_{50}, b_{70} \dots \\ 1, b_{20}, b_{40}, b_{60} \dots \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \right) = [C'_\rho] \{C_\rho^\square\},$$

gdzie ⁽²⁾

$$(3.40) \quad [C'_\rho] = \begin{bmatrix} A_3 & b_{10} & 0 & 1 \\ A_5 & b_{30} & A_4 & b_{20} \\ A_7 & b_{50} & A_6 & b_{40} \\ 0 & 0 & A_8 & b_{60} \end{bmatrix},$$

$$\{C_\rho^\square\} = \begin{bmatrix} b_5 \\ w_2 \\ b_6 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_5 \\ \frac{\partial b_5}{\partial \rho} \\ b_6 \\ \frac{\partial b_6}{\partial \rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_5 \\ 2V_{33} + V_{44} - 3 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{11}) \right) \\ b_6 \\ -2V_{22} - V_{11} - 3 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\alpha T_{22}) \right) \end{bmatrix},$$

przy czym

$$(3.41) \quad V_{11} = \frac{\partial(\dot{d})}{\partial \rho},$$

$$V_{22} = \frac{\partial(\dot{b})}{\partial \rho}.$$

Dla określenia występujących w macierzy (3.41) elementów A_i ($i=3, \dots, 8$) przedstawimy je w formie wektora

$$(3.42) \quad \{A_c\} = [A_3, A_4, \dots, A_8]^* = \left[\frac{\partial b_{10}}{\partial \rho}, \frac{\partial b_{20}}{\partial \rho}, \dots, \frac{\partial b_{60}}{\partial \rho} \right]^*.$$

Po dokonaniu zaś operacji różniczkowania dochodzimy do wzoru

$$(3.43) \quad \{A_c\} = [Q^\square] \{A^\square\},$$

gdzie

$$(3.44) \quad [Q^\square] = \begin{bmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ q_1 d_1 & q & 0 & 0 \\ q_1 d_2 & q_1 d_1 & q_2 d_1^2/2 & 0 \\ q_3 d_1^3/6 & q_1 d_2 & q_2 d_1 d_2 & q_2 d_1^2/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$\{A^\square\} = [A_1, A_2, A_1, A_2]^* = \left[\frac{\partial d_1}{\partial \rho}, \frac{\partial d_2}{\partial \rho}, \frac{\partial d_1}{\partial \rho}, \frac{\partial d_2}{\partial \rho} \right] = \left[\frac{w_{10}}{a_0} - \frac{a_1 w_1}{a_0^2}, \frac{w_{11}}{a_0} - \frac{a_2 w_1}{a_0^2}, \dots \right].$$

⁽²⁾ Dla zachowania przejrzystości przeprowadzonych operacji ograniczymy się tutaj do siedmiu wyrazów rozwinięcia (3.26).

Wyrazy macierzy $[Q^\square]$ wynikające z rozwinięcia (3.22) wprowadzono dla skrócenia zapisu macierzy (3.44)₂:

$$(3.45) \quad \begin{aligned} q_1 &= q(q-1), \\ q_2 &= q(q-1)(q-2), \\ q_3 &= q(q-1)(q-2)(q-3). \end{aligned}$$

Pozostałe do określenia wyrazy macierzy $\{A^\square\}$ wyznaczymy z równania pomocniczego

$$(3.46) \quad \{W_\rho\} = [P] \{V\}$$

wynikającego ze wzoru (3.44)

$$(3.47) \quad \{W_\rho\} = \begin{bmatrix} w_{10} \\ w_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial \rho} \\ \frac{\partial a_2}{\partial \rho} \end{bmatrix},$$

$$[P] = \begin{bmatrix} -b_7 & -b_5 & b_6 & b_8 \\ -b_8 & -b_6 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\{V\} = [V_{11}, V_{22}, V_{33}, V_{44}]^* = \left[\frac{\partial d}{\partial \rho}, \frac{\partial b}{\partial \rho}, \frac{\partial a}{\partial \rho}, \frac{\partial c}{\partial \rho} \right]^*$$

Określiśmy zatem, wszystkie funkcje występujące w warunku ortogonalizacyjnym Bubnowa-Galerkina (3.15) z wyjątkiem wielkości \dot{a} i \dot{c} , przez które wyrażają się składowe prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_r, \dot{\epsilon}_\varphi$. Zgodnie ze wzorami (3.5) wielkości \dot{a} i \dot{c} możemy uważać za określone, jeżeli wyznaczymy składową prędkość przemieszczenia płaszczyzny środkowej \dot{u} . Prędkość przemieszczenia \dot{u} wyznaczymy metodą Rungego-Kutty dla przypadku rozważanej tarczy, w której pomijamy stan giętny.

Uzasadnienie tego rodzaju podejścia kryje się w fakcie tożsamościowego spełnienia drugiego z równań Bubnowa-Galerkina (2.5)₂ (o czym wspomniano na początku tego punktu). Problem ten przedyskutowano szczegółowo w odniesieniu do stanu natychmiastowego (w punkcie 2.3 w pracy [4])⁽³⁾.

W celu określenia funkcji $\dot{u} = \dot{u}(\rho, t)$ na drodze numerycznej dokonujemy formalnego różniczkowania względem czasu równań (2.8), następnie po wyeliminowaniu \dot{u} otrzymamy równanie

$$(3.48) \quad \dot{\epsilon}_r = \dot{\epsilon}_\varphi + \rho \frac{\partial \dot{\epsilon}_\varphi}{\partial \rho},$$

do którego podstawimy prawe strony równania konstytutywnego (2.4). Otrzymujemy w ten sposób równanie różniczkowe nieliniowe, rzędu pierwszego, w którym wystę-

⁽³⁾ Zauważmy, że podobne założenie w odniesieniu do geometrycznie nieliniowych płyt kołowo-symetrycznych uczynił A. C. WOLMIR [5].

pują dwie niewiadome σ_r, σ_ϕ . Drugie równanie stanowi warunek równowagi (2.5)₂. Po przekształceniach otrzymujemy układ dwóch równań różniczkowych zwyczajnych, pierwszego rzędu w postaci

$$(3.49) \quad \frac{d\sigma_r}{dp} = \frac{1}{\rho} \left[\sigma_\phi - \sigma_r \left(\frac{\rho}{h} \frac{dh}{dp} + 1 \right) - k\rho^2 \right],$$

$$\frac{d\sigma_\phi}{dp} = \left[1 + \frac{n-1}{4} - \frac{(2\sigma_\phi - \sigma_r)^2}{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2} \right]^{-1} \left\{ \left[\frac{\sigma_r \left(\frac{\rho}{h} \frac{dh}{dp} + 1 \right) - \sigma_\phi}{\rho} + k\rho \right] \times \right.$$

$$\times \left[\frac{n-1}{4} - \frac{(2\sigma_\phi - \sigma_r)(2\sigma_r - \sigma_\phi)}{\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2} - \frac{1}{2} \right] +$$

$$\left. + \frac{3}{2\rho} (\sigma_r - \sigma_\phi) - \frac{1}{A\sigma_e^{n-1}} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\alpha T) \right] \right\}.$$

Układ równań (3.49) wraz z warunkami brzegowymi (3.11) został rozwiązany metodą Rungego-Kutty — przy wykorzystaniu iteracji przedstawionej na schemacie blokowym nr 1 w pracy [4].

Mając określone składowe stanu naprężenia przejdziemy z kolei do wyznaczenia składowej prędkości przemieszczenia \dot{u} . Wyznamy ją z drugiego z równań konstytutywnych (2.4):

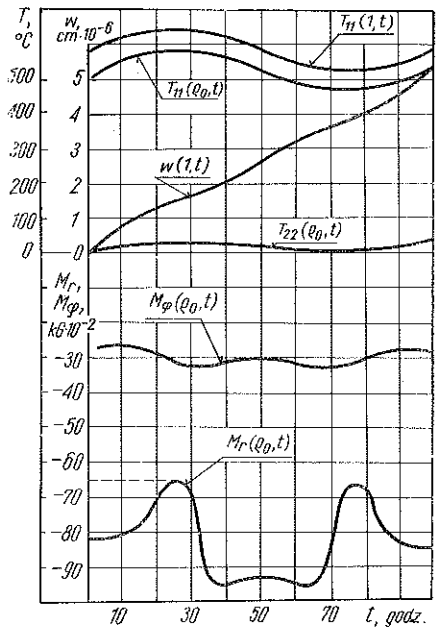
$$(3.50) \quad \dot{u} = \left[A (\sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\phi + \sigma_\phi^2)^{\frac{n-1}{2}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sigma_\phi - \frac{1}{2} \sigma_r \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\alpha T) \right] \rho R.$$

W ten sposób zagadnienia ortogonalizacji sformułowane równaniem (3.14), mające na celu określenie parametru $f_0(t)$, zostało rozwiązane na drodze numerycznego całkowania, przy wykorzystaniu metody iteracyjnej przedstawionej w pracy [4].

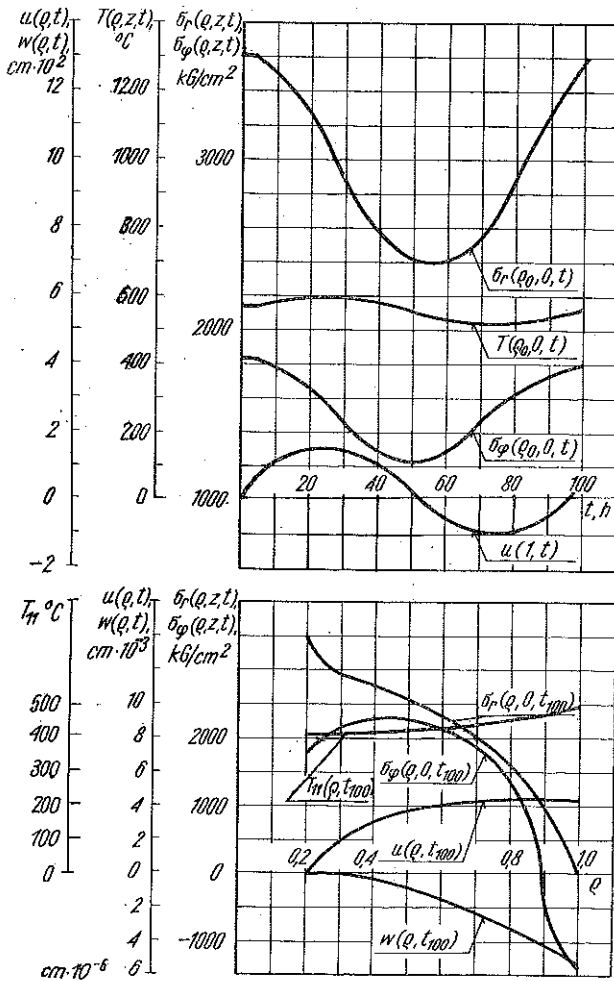
Wyniki rozważań numerycznych przedstawiono w formie wykresu dla danych: $n=3, A=0,58 \cdot 10^{-15} (\text{cm}^2/\text{kG})^3 \text{godz.}^{-1}, R=25 \text{ cm}, p=20 \text{ kG/cm}^2, \omega=1200 \text{ l/sek}$. Założono sinusoidalny charakter zmiany temperatury w czasie. Przyjęty rozkład temperatury $T=T(\rho, z, t)$ przedstawiono odpowiednio na rys. 2 i 3.

Rys. 2 przedstawia zmianę ugięcia w czasie w przypadku małych wahań temperatury dla $\rho=1$ oraz zmianę jednostkowych momentów gnących w czasie w ślad



Rys. 2.

za wahaniami temperatury w utwierdzeniu. (Rys. 3 u góry) przedstawia rozkład naprężeń promieniowych i obwodowych oraz przemieszczenia promieniowego powierzchni środkowej w czasie. U dołu przedstawiono rozkład tych wielkości



Rys. 3.

oraz ugięcia w po czasie $t=100$ godz jako funkcji bezwymiarowej zmiennej promieniowej ρ . Jak wynika z przedstawionych rezultatów, nawet niewielkie zmiany temperatury mają istotny wpływ na rozkład naprężeń i przemieszczeń wirującej tarczy. Szczególnie jest to widoczne w przypadku naprężeń, których rozkład pokazano na rys. 3 dla $z=0$ i $\rho=\rho_0$ (w utwierdzeniu).

Obliczenia były przeprowadzone na maszynie cyfrowej IBM-370 znajdującej się w Kombinacie Huty Stalowa Wola.

4. WNIOSKI

Przedstawione w naszej pracy rozwiązanie problemu rozkładu naprężeń i przemieszczeń w zginanej i wirującej tarczy w warunkach zmiennego w czasie obciążenia cieplnego — ujawnia szereg interesujących cech, różnicujących ten problem w stosunku do rozwiązania dla przypadku ustalonego pola temperatury. O ile pulsacje naprężeń w czasie można uważać za efekt oczekiwany, o tyle zmiana w czasie wartości przemieszczeń posiada duże znaczenie praktyczne z punktu widzenia żywotności tarczy w szczególności, gdy kryterium tej żywotności stanowi dopuszczalna wartość przemieszczenia promieniowego zewnętrznego brzegu tarczy.

Przeprowadzone obliczenia wykazały również, że wprawdzie amplituda wahań przemieszczenia promieniowego $u(\rho, t)$ nie rośnie w czasie, wzrastają natomiast wartości tego przemieszczenia w kierunku dodatnim, co można wytłumaczyć faktem «nałożenia» dwóch czynników wyężenia: zmiennego w czasie pola temperatury oraz sił masowych.

Jak wynika z przedstawionych rezultatów, zmiana temperatury w czasie, przy równoczesnej zmienności wzdłuż promienia oraz grubości, wywiera istotny wpływ na przebieg jednostkowych momentów zginających M_r i M_θ , jak również na zmianę ugięć w czasie. Zarówno ilościowe jak i jakościowe rezultaty różnią się zasadniczo od rozwiązań dla przypadków, w których temperatura jest stała. Mamy tu więc do czynienia ze zginaniem termicznym, mogącym mieć istotne znaczenie w przypadku gwałtownych zmian temperatury w czasie ze względu na poprawność pracy wirującej tarczy.

Rozwiązania powyższe są poprawne w odniesieniu do stosowanego prawa fizycznego. Bardziej ogólne ujęcie problemów termoreologicznych można znaleźć w pracy A. A. ILIUSZYNA i B. E. POBEDRII [2]. Ze względu na złożoność problemu prostsze równanie konstytutywne dawało możliwość uzyskania rozwiązania mogącego znaleźć praktyczne zastosowanie.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. BYCHAWSKI, *Thermal and creep analysis of cylindrical shells under internal pressure*, I Int. Conf. on Structural Mech. in Reactor Technology, 5, Part L, Berlin 1971.
2. A. A. ILIUSZIN, B. E. POBEDRIA, *Osnovy matematičeskoj teorii termoviazkoupugosti*, Moskwa 1970.
3. F. K. G. ODQVIST, *Mathematical theory of creep and creep rupture*, Oxford 1974.
4. J. WALCZAK, *Stany graniczne tarcz wirnikowych w warunkach nieliniowego pełzania*, Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 1977.
5. A. C. WOLMIR, *Gibkije plastinki i oboločki*, Moskwa 1956.
6. M. ŻYCZKOWSKI, *Potenzieren von Verallgemeinerten Potenzreihen mit beliebigen Exponent*, Z. Angew. Math. u. Physik, 12, 6, 572–576, 1961.

Резюме

ТЕРМИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ВРАЩАЮЩИХСЯ ДИСКОВ В СЛУЧАЕ НЕБОЛЬШИХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

В работе показаны системы основных уравнений для физически-нелинейных осесимметрических термически-изгибаемых вращающихся дисков.

Полагая, что распределение температуры является функцией радиуса и толщины диска, преобладающими силами являются массовые силы, материал диска однородный, изотропный, несжимаемый, применена теория малых деформаций, представлено решение для небольших колебаний температуры во времени в условиях нелинейной ползучести.

Решение получено, используя методы Рунге-Кутты и Бубнова-Галеркина. Представлены распределения напряжений и перемещений в функции неизмеримой радиальной переменной и времени. Из представленных результатов численного анализа следует ряд важных выводов. А именно, показано, что процесс изгиба вращающихся дисков может представлять собой большую опасность в связи с разрушением в условиях ползучести и правильности работы конструкций. Пренебрежение гибким состоянием в вычислительном процессе может привести к ошибочной оценке работы вращающихся дисков.

SUMMARY

THERMAL BENDING OF ROTATING DISCS FOR SMALL TIME-DEPENDENT TEMPERATURE OSCILLATION AT NONLINEAR CREEP

The aim of this paper is to present a more adequate approach to the effects of thermal bending of rotating discs. The paper contains a system of basic equations for symmetric bending of physically nonlinear rotating discs. Assuming that the temperature distribution depends on the radius and the thickness of the rotating disc, and that the material of the disc is homogeneous, isotropic and incompressible, the theory of small deflections is available and the mass forces are dominant — a solution for small time-dependent temperature oscillation in creep conditions is presented. The solution is based on the Runge-Kutta and Bubnov-Galerkin methods and the distributions of stresses and displacements are determined as functions of time and of a dimensionless radial variable. Several interesting conclusions may be drawn from the numerical analysis presented. It is shown that thermal bending of rotating discs may lead to considerable effects. Thus, neglecting the state of bending in calculation of jet turbine engines may lead to erroneous results.

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
INSTYTUT LOTNICTWA

Praca została złożona w Redakcji dnia 26 września 1977 r.