ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 28, 2, 289—296, 1980
Polska Akademia Nauk, Instytut Podstawowych Problemów Techniki

HARMONICZNE DRGANIA WYMUSZONE WARSTWY TERMO-PIEZOELEKTRYCZNEJ

KRYSTYNA MAJORKOWSKA-KNAP (PŁOCK)

W pracy rozważa się zagadnienie drgań wymuszonych warstwy termo-piezoelektrycznej, spowodowanych harmonicznymi w czasie zmianami temperatury i potencjału elektrycznego na powierzchniach ograniczających. Rozwiązanie uzyskuje się przy założeniu zależności temperatury i potencjału elektrycznego jedynie od zmiennej x_2 i czasu t.

1. Wprowadzenie

Podstawowe równania liniowej termo-piezoelektryczności dla ośrodka sprężystego, jednorodnego i anizotropowego, napisane w kartezjańskim układzie współrzędnych prostokątnych mają postać

$$\begin{gathered}
c_{ijkl}\, u_{k,lj}+e_{kij}\, \varphi_{,kj}-\gamma_{ij}\, \theta_{,j}+X_i=\rho \ddot{u}_i,\\
e_{ikl}\, u_{k,li}-\epsilon_{ik}\, \varphi_{,ki}+p_i^*\, \theta_{,i}=0, \\
k_{ij}\, \theta_{,ij}-c_E\, \dot{\theta}-T_0\, (\gamma_{ij}\, \dot{\varepsilon}_{ij}-p_i^*\, \dot{\varphi}_{,i})=-W, \qquad i,j,k,l=1,2,3,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem przemieszczenia, $\mathbf{X}$ wektorem sił masowych, ρ gęstością ciała, ε_{ij} tensorem odkształcenia, φ potencjałem elektrycznym, $\theta=T-T_0$ przyrostem temperatury, T^0 temperaturą stanu naturalnego ciała, W ilością ciepła wytworzonego w jednostce czasu i objętości. Stałe materiałowe c_{ijkl}, e_{kij}, ϵ_{ik} są współczynnikami odpowiednio sztywności sprężystej, piezoelektrycznymi i dielektrycznymi, γ_{ij}, k_{ij}, c_E oznaczają kolejno współczynniki ciśnienia termicznego, przewodnictwa cieplnego oraz ciepło właściwe przy stałym odkształceniu i stałym E_i oraz p_i^* współczynniki piroelektryczne.

Równania (1.1) zostały otrzymane dzięki eliminacji naprężeń i indukcji elektrycznej z równań ruchu i pola elektrycznego

$$\sigma_{ji,j}+X_i=\rho\ddot{u}_i, \qquad D_{i,i}=0 \tag{1.2}$$

przy wykorzystaniu związków konstytutywnych

$$\begin{gathered}
\sigma_{ij}=c_{ijkl}\, \varepsilon_{kl}-\gamma_{ij}\, \theta-e_{kij}\, E_k,\\
S=\gamma_{ij}\, \varepsilon_{ij}+\frac{c_E}{T_0}\, \theta+p_i^*\, E_i,\\
D_i=e_{ikl}\, \varepsilon_{kl}+p_i^*\, \theta+\epsilon_{ik}\, E_k, \qquad E_k=-\varphi_{,k}
\end{gathered} \tag{1.3}$$

oraz definicji tensora odkształcenia

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{1.4}$$

W równaniach (1.2) i (1.3) σ_{ij} oznacza tensor naprężenia, $\mathbf{D}$ wektor indukcji elektrycznej, E wektor natężenia pola elektrycznego oraz S entropię.

Równania (1.1) upraszczają się znacznie dla zagadnień jednowymiarowych. Jeżeli przyjąć że wektor przemieszczenia ($\mathbf{u} = u_1, u_2, u_3$) oraz że potencjał elektryczny φ i temperatura θ zależą jedynie od zmiennych x_2 i czasu t,

$$u_i \equiv u_i(x_2, t), \qquad \varphi \equiv \varphi(x_2, t), \qquad \theta \equiv \theta(x_2, t), \tag{1.5}$$

to będziemy mieć do czynienia z następującym układem równań, napisanym w nowej notacji z wielu względów wygodniejszej:

$$\begin{aligned}
&c_{66}\, u_{1,22} + c_{26}\, u_{2,22} + c_{46}\, u_{3,22} - \gamma_6\, \theta_{,2} + e_{26}\, \varphi_{,22} = \rho \ddot{u}_1, \\
&c_{26}\, u_{1,22} + c_{22}\, u_{2,22} + c_{24}\, u_{3,22} - \gamma_2\, \theta_{,2} + e_{22}\, \varphi_{,22} = \rho \ddot{u}_2, \\
&c_{46}\, u_{1,22} + c_{24}\, u_{2,22} + c_{44}\, u_{3,22} - \gamma_4\, \theta_{,2} + e_{24}\, \varphi_{,22} = \rho \ddot{u}_3, \\
&e_{26}\, u_{1,22} + e_{22}\, u_{2,22} + e_{24}\, u_{3,22} + p_2^*\, \theta_{,2} - \epsilon_{22}\, \varphi_{,22} = 0, \\
&k_2\, \theta_{,22} - c_E\, T_0 - T_0\, (\gamma_2\, \dot{u}_{2,2} - p_2^*\, \dot{\varphi}_{,2}) = -W.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Odpowiednie związki konstytutywne mają postać

$$\begin{aligned}
&T_1 = c_{12}\, u_{2,2} - \gamma_1\, \theta + e_{21}\, \varphi_{,2}, && S = \gamma_2\, u_{2,2} + \frac{c_E}{T_0}\theta - p_2^*\, \varphi_{,2}, \\
&T_2 = c_{22}\, u_{2,2} - \gamma_2\, \theta + e_{22}\, \varphi_{,2}, && \\
&T_3 = c_{23}\, u_{2,2} - \gamma_3\, \theta + e_{23}\, \varphi_{,2}, && D_1 = e_{12}\, u_{2,2} + p_1^*\, \theta - \epsilon_{12}\, \varphi_{,2}, \\
&T_4 = c_{24}\, u_{2,2} - \gamma_4\, \theta + e_{24}\, \varphi_{,2}, && D_2 = e_{22}\, u_{2,2} + p_2^*\, \theta - \epsilon_{22}\, \varphi_{,2}, \\
&T_5 = c_{25}\, u_{2,2} - \gamma_5\, \theta + e_{25}\, \varphi_{,2}, && D_3 = e_{32}\, u_{2,2} + p_3^*\, \theta - \epsilon_{23}\, \varphi_{,2}. \\
&T_6 = c_{26}\, u_{2,2} - \gamma_6\, \theta + e_{26}\, \varphi_{,2}, &&
\end{aligned} \tag{1.7}$$

W równaniach (1.6) i (1.7) wykorzystano podstawienia

$$\begin{aligned}
&c_{ijkl} = c_{pq}, \quad && \gamma_{ij} = \gamma_p, \quad && e_{ikl} = e_{iq}, \quad && \sigma_{ij} = T_{ij} = T_p, \\
&\varepsilon_{ij} = S_p, && k_{ij} = k_p, && \text{gdy} \quad i = j, && p = 1, 2, 3, \\
&2\varepsilon_{ij} = S_p, && 2k_{ij} = k_p, && \text{gdy} \quad i \neq j, && p = 4, 5, 6.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Z równaniami (1.1) należy związać warunki brzegowe i początkowe. Jako warunki brzegowe przyjmuje się dane przemieszczenia lub obciążenia, dany potencjał elektryczny lub ładunki powierzchniowe na powierzchni ograniczającej ciało:

$$\begin{aligned}
&u_i = U_i(\mathbf{x}, t), \qquad && p_i = \sigma_{ji}\, n_j = \bar{P}_i(\mathbf{x}, t), \\
&\varphi = \Phi(\mathbf{x}, t), && D_k\, n_k = -\kappa_e, \qquad \mathbf{x} \in \partial B.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Cieplne warunki brzegowe to dana temperatura albo gradient temperatury, albo dana funkcja reprezentująca swobodną wymianę ciepła na powierzchni:

$$\theta = m(\mathbf{x}, t), \quad \frac{\partial \theta}{\partial n} = l(\mathbf{x}, t), \quad \left(\frac{\partial}{\partial n} + \alpha\right)\theta(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \partial B. \tag{1.10}$$

Jako warunki początkowe przyjmuje się rozkłady przemieszczeń i ich prędkości oraz rozkład temperatury w pewnej chwili czasowej początkowej, np. w chwili $t = t_0$:

$$u_i(\mathbf{x}, t_0) = g_i(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i(\mathbf{x}, t_0) = h_i(\mathbf{x}), \quad \theta(\mathbf{x}, t_0) = k(\mathbf{x}), \quad x \in B. \tag{1.11}$$

W warunkach (1.9)-(1.11) $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym normalnym na brzegu ∂B rozpatrywanego obszaru B, κ_e powierzchniową gęstością ładunku elektrycznego, $\mathbf{p}$ wektorem sił powierzchniowych, a $U_i, P_i, \Phi, m, l, f, g_i, h_i$ i k są danymi funkcjami.

2. Zagadnienie drgań wymuszonych harmonicznych warstwy termo-piezoelektrycznej

Rozpatrzmy warstwę sprężystą o grubości $2h$, rozciągającą się nieograniczenie w płaszczyźnie przechodzącej przez osie x_1, x_3, wykonującą drgania wymuszone harmoniczne. Przyczyną drgań jest potencjał elektryczny i temperatura (harmonicznie zmienne w czasie) przyłożone na brzegach:

$$\begin{aligned} \varphi &= \pm\varphi_0 e^{-i\omega t} \quad \text{dla} \quad x_2 = \pm h, \\ \theta &= \pm T_0 e^{-i\omega t} \quad \text{dla} \quad x_2 = \pm h. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Zakładamy, że warstwa jest ośrodkiem termo-piezoelektrycznym, kryształem klasy 2 (oś symetrii równoległa do Ox_2) układu krystalograficznego jednoskośnego. Ponadto zakładamy, że w obrębie warstwy brak jest sił masowych i źródeł ciepła ($\mathbf{X} = 0$, $W = 0$), a brzegi $x_2 = \pm h$ są wolne od naprężeń, co daje następujący warunek:

$$T_2 = \sigma_{22} = \partial_2 (c_{22} u_2 + e_{22} \varphi) - \gamma_2 \theta = 0 \quad \text{dla} \quad x_2 = \pm h. \tag{2.2}$$

Uwzględniliśmy tu fakt, że składowe wektora przemieszczenia $u_1 = 0$, $u_3 = \text{const}$.

Następnie przyjmujemy, że potencjał elektryczny φ i temperatura θ zależą jedynie od zmiennych x_2 i czasu t. W związku z tym i przy uwzględnieniu znacznej redukcji stałych materiałowych dla rozpatrywanego ośrodka [3] równania termo-piezoelektryczności mają postać:

$$\begin{aligned} c_{22} u_{2,22} + e_{22} \varphi_{,22} - \gamma_2 \theta_{,2} &= \rho \ddot{u}_2, \\ e_{22} u_{2,22} - \epsilon_{22} \varphi_{,22} + p_2^* \theta_{,2} &= 0, \\ k_2 \theta_{,22} - c_E \dot{\theta} - T_0 (\gamma_2 \dot{u}_{2,2} - p_2^* \dot{\varphi}_{,2}) &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

W dalszych rozważaniach pominiemy w równaniu $(2.3)_2$ ostatni wyraz $p_2^* \theta_{,2}$ oraz w równaniu $(2.3)_3$ ostatni wyraz $T_0 (\gamma_2 \dot{u}_{2,2} - p_2 \varphi_{,2})$. Czynimy to kierując się analogią do teorii naprężeń cieplnych i popełniając niewielki błąd:

Wstawiając do równań (2.3)

$$u_2(x_2, t) = U_2(x_2) e^{-i\omega t}, \quad \varphi(x_2, t) = \Phi(x_2) e^{-i\omega t}, \quad \theta(x_2, t) = \theta^0(x_2) e^{-i\omega t}, \tag{2.4}$$

otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\partial_2^2 (c_{22} U_2 + e_{22} \Phi) - \partial_2 \gamma_2 \theta^0 + \omega^2 \rho U_2 = 0, \\
(2.5)\qquad &\partial_2^2 (e_{22} U_2 - \epsilon_{22} \Phi) = 0, \\
&\theta^0 (\partial_2^2 + i\lambda^2) = 0, \qquad \lambda^2 = \frac{\omega c_E}{k_2}.
\end{aligned}
$$

Rozwiązaniem równania $(2.5)_3$ jest funkcja

$$
(2.6)\qquad \theta^0 (x_2) = A e^{-\varepsilon x_2} (\cos \varepsilon x_2 + i \sin \varepsilon x_2) + B e^{\varepsilon x_2} (\cos \varepsilon x_2 - i \sin \varepsilon x_2), \qquad \varepsilon = \left(\frac{\omega c_E}{2k_2}\right)^{\frac{1}{2}},
$$

która po wykorzystaniu warunku brzegowego $(2.1)_2$ ma postać

$$
(2.7)\qquad \theta^0 (x_2) = \frac{T_0 (i \operatorname{ch} \varepsilon x_2 \sin \varepsilon x_2 - \operatorname{sh} \varepsilon x_2 \cos \varepsilon x_2)}{i \operatorname{ch} \varepsilon h \sin \varepsilon h - \operatorname{sh} \varepsilon h \cos \varepsilon h}.
$$

Wykorzystując (2.7) oraz równanie $(2.5)_2$, otrzymujemy z $(2.5)_1$ równanie różniczkowe niejednorodne o postaci

$$
(2.8)\qquad (\partial_2^2 + \eta^2)\, U_2 (x_2) = R (x_2),
$$

gdzie

$$
\eta^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\bar{c}_{22}}, \qquad \bar{c}_{22} = c_{22} + \frac{e_{22}^2}{\epsilon_{22}},
$$

$$
\begin{aligned}
R (x_2) &= \frac{\gamma_2}{\bar{c}_{22}} \partial_2 \theta^0 (x_2) = \\
&= \frac{\gamma_2 T_0 \varepsilon\, [i (\operatorname{sh} \varepsilon x_2 \sin \varepsilon x_2 + \operatorname{ch} \varepsilon x_2 \cos \varepsilon x_2) - \operatorname{ch} \varepsilon x_2 \cos \varepsilon x_2 + \operatorname{sh} \varepsilon x_2 \sin \varepsilon x_2]}{\bar{c}_{22} (i \operatorname{ch} \varepsilon h \sin \varepsilon h - \operatorname{sh} \varepsilon h \cos \varepsilon h)}.
\end{aligned}
$$

Zajmiemy się rozwiązaniem równania (2.8).

Ponieważ prawa strona równania ma wartość zespoloną, więc $U_2 (x_2)$ jest funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych

$$
(2.9)\qquad U_2 (x_2) = f (x_2) + i g (x_2).
$$

Zatem równanie (2.8) można przepisać w postaci układu równań

$$
(2.10)\qquad
\begin{aligned}
&\partial_2^2 f (x_2) + \eta^2 f (x_2) = R_1 (x_2), \\
&\partial_2^2 g (x_2) + \eta^2 g (x_2) = R_2 (x_2),
\end{aligned}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
R_1 (x_2) = \operatorname{Re} R (x_2) = \frac{\gamma_2 T_0}{2\bar{c}_{22}} \varepsilon \{ e^{\varepsilon x_2} [(a+b) \cos \varepsilon x_2 + (b-a) \sin \varepsilon x_2] + \\
+ e^{-\varepsilon x_2} [(a+b) \cos \varepsilon x_2 + (b-a) \sin \varepsilon x_2] \},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 (x_2) = \operatorname{Im} R (x_2) = \frac{\gamma_2 T_0}{2\bar{c}_{22}} \varepsilon \{ e^{\varepsilon x_2} [(-a+b) \cos \varepsilon x_2 - (a+b) \sin \varepsilon x_2] + \\
+ e^{-\varepsilon x_2} [(-a+b) \cos \varepsilon x_2 + (a+b) \sin \varepsilon x_2] \},
\end{aligned}
$$

$$
a = \frac{\operatorname{sh} \varepsilon h \cos \varepsilon h}{\operatorname{sh}^2 \varepsilon h + \sin^2 \varepsilon h}, \qquad b = \frac{\operatorname{ch} \varepsilon h \sin \varepsilon h}{\operatorname{sh}^2 \varepsilon h + \sin^2 \varepsilon h}.
$$

Rozwiązania ogólne równań niejednorodnych (2.10) mają postacie następujące:

$$f(x_2)=C\sin\eta x_2+D\cos\eta x_2+e^{\varepsilon x_2}(a_1\cos\varepsilon x_2+a_2\sin\varepsilon x_2)+$$
$$+e^{-\varepsilon x_2}(b_1\cos\varepsilon x_2+b_2\sin\varepsilon x_2),\tag{2.11}$$
$$g(x_2)=L\sin\eta x_2+M\cos\eta x_2+e^{\varepsilon x_2}(c_1\cos\varepsilon x_2+c_2\sin\varepsilon x_2)+$$
$$+e^{-\varepsilon x_2}(d_1\cos\varepsilon x_2+d_2\sin\varepsilon x_2),$$

gdzie

$$a_1=\frac{G\varepsilon\,[(a+b)\,\eta^2-2\varepsilon^2\,(b-a)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},\qquad a_2=\frac{G\varepsilon\,[(b-a)\,\eta^2+2\varepsilon^2\,(a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},$$

$$b_1=\frac{G\varepsilon\,[(a+b)\,\eta^2+2\varepsilon^2\,(-b+a)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},\qquad b_2=\frac{G\varepsilon\,[(-b+a)\,\eta^2-2\varepsilon^2\,(a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},$$

$$c_1=\frac{G\varepsilon\,[(-a+b)\,\eta^2+2\varepsilon^2\,(a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},\qquad c_2=\frac{G\varepsilon\,[-(a+b)\,\eta^2+2\varepsilon^2\,(-a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},$$

$$d_1=\frac{G\varepsilon\,[(-a+b)\,\eta^2+2\varepsilon^2\,(a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},\qquad d_2=\frac{G\varepsilon\,[(a+b)\,\eta^2-2\varepsilon^2\,(-a+b)]}{\eta^4+4\varepsilon^4},$$

$$G=\frac{\gamma_2 T_1}{2\bar{c}_{22}}.$$

Zatem rozwiązaniem równania (2.8) będzie funkcja

$$U_2(x_2)=C\sin\eta x_2+D\cos\eta x_2+e^{\varepsilon x_2}(a_1\cos\varepsilon x_2+a_2\sin\varepsilon x_2)+$$
$$+e^{-\varepsilon x_2}(b_1\cos\varepsilon x_2+b_2\sin\varepsilon x_2)+i\,[L\sin\eta x_2+M\cos\eta x_2+$$
$$+e^{\varepsilon x_2}(c_1\cos\varepsilon x_2+c_2\sin\varepsilon x_2)+e^{-\varepsilon x_2}(d_1\cos\varepsilon x_2+d_2\sin\varepsilon x_2)].\tag{2.12}$$

W rozwiązaniu tym C, D, L, M oznaczają stałe, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Przejdźmy do rozwiązania równania $(2.5)_2$. W wyniku dwukrotnego scałkowania tego równania i po uwzględnieniu wzoru (2.12) otrzymujemy

$$\Phi(x_2)=\frac{e_{22}}{\epsilon_{22}}\{C\sin\eta x_2+D\cos\eta x_2+e^{\varepsilon x_2}(a_1\cos\varepsilon x_2+a_2\sin\varepsilon x_2)+$$
$$+e^{-\varepsilon x_2}(b_1\cos\varepsilon x_2+b_2\sin\varepsilon x_2)+i\,[L\sin\eta x_2+M\cos\eta x_2+$$
$$+e^{\varepsilon x_2}(c_1\cos\varepsilon x_2+c_2\sin\varepsilon x_2)+e^{-\varepsilon x_2}(d_1\cos\varepsilon x_2+d_2\sin\varepsilon x_2)]\}+Nx_2+P.\tag{2.13}$$

Z warunków brzegowych $(2.1)_1$ wniosimy, że funkcja $\Phi(x_2)$ jest funkcją antysymetryczną, co powoduje, że stałe $D=0$, $M=0$, $P=0$.

Wykorzystanie warunku brzegowe (2.2) dla $x_2=h$ prowadzi do równania

$$\eta C\cos\eta h+e^{\varepsilon h}\,\varepsilon\,[(a_1+a_2)\cos\varepsilon h+(a_2-a_1)\sin\varepsilon h]+e^{-\varepsilon h}\,\varepsilon\,[(b_2-b_1)\cos\varepsilon h-$$
$$-(b_2+b_1)\sin\varepsilon h]+i\,\{\eta L\cos\eta h+e^{\varepsilon h}\,\varepsilon[(c_1+c_2)\cos\varepsilon h+(c_2-c_1)\sin\varepsilon h]+$$
$$+e^{-\varepsilon h}\,\varepsilon\,[(d_2-d_1)\cos\varepsilon h-(d_2+d_1)\sin\varepsilon h]\}+\frac{\epsilon_{22}}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}(e_{22}N-\gamma_2 T_0)=0.\tag{2.14}$$

Z warunku brzegowego $(2.1)_1$ dla $x_2=h$ otrzymujemy związek

$$\frac{e_{22}}{\epsilon_{22}}\{C\sin\eta h+e^{\varepsilon h}(a_1\cos\varepsilon h+a_2\sin\varepsilon h)+e^{-\varepsilon h}(b_1\cos\varepsilon h+ +b_2\sin\varepsilon h)+i[L\sin\eta h+e^{\varepsilon h}(c_1\cos\varepsilon h+c_2\sin\varepsilon h)+ +e^{-\varepsilon h}(d_1\cos\varepsilon h+d_2\sin\varepsilon h)]\}+Nh=\varphi_0. \tag{2.15}$$

Z równań (2.14) i (2.15) określimy wielkość $\bar{C}=C+iL$:

$$\bar{C}=\frac{1}{\frac{e_{22}^2}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\sin\beta-\beta\cos\beta}\left\{\frac{1}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\times\right. \times\Big[(\varphi_0 e_{22}-h\gamma_2 T_0)\epsilon_{22}-e_{22}^2\{e^{\varepsilon h}(a_1\cos\varepsilon h+a_2\sin\varepsilon h)+ +e^{-\varepsilon h}(b_1\cos\varepsilon h+b_2\sin\varepsilon h)+i[e^{\varepsilon h}(c_1\cos\varepsilon h+c_2\sin\varepsilon h)+ +e^{-\varepsilon h}(d_1\cos\varepsilon h+d_2\sin\varepsilon h)]\}\Big]+h\varepsilon\Big[e^{\varepsilon h}[(a_1+a_2)\cos\varepsilon h+ +(a_2-a_1)\sin\varepsilon h]+e^{-\varepsilon h}[(b_2-b_1)\cos\varepsilon h-(b_2+b_1)\sin\varepsilon h]+ +i\{e^{\varepsilon h}[(c_1+c_2)\cos\varepsilon h+(c_2-c_1)\sin\varepsilon h]+ \left.+e^{-\varepsilon h}[(d_2-d_1)\cos\varepsilon h-(d_2+d_1)\sin\varepsilon h]\}\Big]\right\},\qquad \beta=\eta h. \tag{2.16}$$

Mając $\bar{C}$ możemy określić stałe C i L:

$$C=\mathrm{Re}\,\bar{C}=\frac{1}{\frac{e_{22}^2}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\sin\beta-\beta\cos\beta}\left\{\frac{1}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\times\right. \times\Big[(\varphi_0 e_{22}-h\gamma_2 T_0)\epsilon_{22}-e_{22}^2\{e^{\varepsilon h}(a_1\cos\varepsilon h+a_2\sin\varepsilon h)+ +e^{-\varepsilon h}(b_1\cos\varepsilon h+b_2\sin\varepsilon h)\}\Big]+h\varepsilon\Big[e^{\varepsilon h}[(a_1+a_2)\cos\varepsilon h+ \left.+(a_2-a_1)\sin\varepsilon h]+e^{-\varepsilon h}[(b_2-b_1)\cos\varepsilon h-(b_2+b_1)\sin\varepsilon h]\Big]\right\},$$

$$L=\mathrm{Im}\,\bar{C}=\frac{1}{\frac{e_{22}^2}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\sin\beta-\beta\cos\beta}\left\{-\frac{e_{22}^2}{c_{22}\epsilon_{22}+e_{22}^2}\times\right. \times[e^{\varepsilon h}(c_1\cos\varepsilon h+c_2\sin\varepsilon h)+e^{-\varepsilon h}(d_1\cos\varepsilon h+d_2\sin\varepsilon h)]+ +h\varepsilon\{e^{\varepsilon h}[(c_1+c_2)\cos\varepsilon h+(c_2-c_1)\sin\varepsilon h]+ \left.+e^{-\varepsilon h}[(d_2-d_1)\cos\varepsilon h+(d_2+d_1)\sin\varepsilon h]\}\right\}. \tag{2.17}$$

Stałą całkowania N można wyznaczyć ze wzoru (2.14) lub (2.15), wykorzystując wzory $(2.17)_{1,2}$.

Zestawmy na koniec funkcje rozwiązujące układ równań (2.3) (przy pominięciu ostatnich wyrazów w równaniach $(2.3)_{2,3}$):

$$(2.18)\qquad u_2(x_2, t) = \{C \sin \eta x_2 + e^{\varepsilon x_2}(a_1 \cos \varepsilon x_2 + a_2 \sin \varepsilon x_2) + e^{-\varepsilon x_2}(b_1 \cos \varepsilon x_2 + b_2 \sin \varepsilon x_2) + i\,[L \sin \eta x_2 + e^{\varepsilon x_2}(c_1 \cos \varepsilon x_2 + c_2 \sin \varepsilon x_2) + e^{-\varepsilon x_2}(d_1 \cos \varepsilon x_2 + d_2 \sin \varepsilon x_2)]\}\, e^{-i\omega t},$$

$$\varphi(x_2, t) = \left\{\frac{e_{22}}{\epsilon_{22}}\{C \sin \eta x_2 + e^{\varepsilon x_2}(a_1 \cos \varepsilon x_2 + a_2 \sin \varepsilon x_2) + e^{-\varepsilon x_2}(b_1 \cos \varepsilon x_2 + b_2 \sin \varepsilon x_2) + i\,[L \sin \eta x_2 + e^{\varepsilon x_2}(c_1 \cos \varepsilon x_2 + c_2 \sin \varepsilon x_2) + e^{-\varepsilon x_2}(d_1 \cos \varepsilon x_2 + d_2 \sin \varepsilon x_2)]\} + N x_2\right\} e^{-i\omega t},$$

$$\theta(x_2, t) = \frac{T_0\,(i \operatorname{ch} \varepsilon x_2 \sin \varepsilon x_2 - \operatorname{sh} \varepsilon x_2 \cos \varepsilon x_2)}{i \operatorname{ch} \varepsilon h \sin \varepsilon h - \operatorname{sh} \varepsilon h \cos \varepsilon h}\, e^{-i\omega t}.$$

Tutaj C, L, N są stałymi całkowania poprzednio określonymi. Ze wzoru $(2.18)_1$ można wyciągnąć wniosek, że jeśli stałe $C \to \infty$, $L \to \infty$, to $u_2 \to \infty$, a w przypadku rezonansu mamy

$$(2.19)\qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{e_{22}^2 + c_{22}\epsilon_{22}}{e_{22}^2}\,\beta.$$

W rozpatrywanym zagadnieniu temperatura $\theta\,(x_2, t)$ jest niezależna od pola przemieszczeń i pola elektrycznego, wpływa natomiast zarówno na jedno, jak i na drugie pole. Łatwo zauważyć jest wpływ pola elektrycznego i temperatury na pole przemieszczeń oraz wpływ pola przemieszczeń i temperatury na potencjał elektryczny.

Literatura cytowana w tekście

1. W. Nowacki, *Dynamiczne zagadnienia termosprężystości*, PWN, Warszawa 1966
2. R. D. Mindlin, *On the equations of motion of piezoelectric crystals*, Problems of Continuum Mechanics SIAM, Philadelphia, Pennsylwania 1961.
3. I. F. Nye, *Physical properties of crystals*, The Clarendon Press, Oxford 1960.

Р е з ю м е

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТЕРМО-ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ

В работе рассматривается задача вынужденных колебаний термо-пьезоэлектрического слоя, вызванных гармоническими во времени изменениями температуры и электрического потенциала на ограничивающих поверхностях. Решение получается при предположении зависимости температуры и электрического потенциала только от переменной x_2 и времени t.

SUMMARY

HARMONIC FORCED VIBRATIONS OF A THERMO-PIEZO-ELECTRIC LAYER

The problem of forced vibrations of a thermo-piezo-electric layer is considered; the vibrations are produced by harmonic changes of temperature and electric potential at the bounding surfaces. The solutions are obtained under the assumption that the temperature and the electric potential are functions of the only two variables: x_2 and time t.

FILIA POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ
W PŁOCKU

Praca została złożona w Redakcji dnia 2 listopada 1978 r.