ROZPRAWY INŻYNIERSKIE • ENGINEERING TRANSACTIONS • 29, 4, 629—640, 1981
Polska Akademia Nauk • Instytut Podstawowych Problemów Techniki

O PEWNYM DYNAMICZNYM ZAGADNIENIU SZCZELINY W OŚRODKACH SPREŻYSTYM I SPREŻYSTO-PLASTYCZNYM

ANDRZEJ NEIMITZ (KIELCE)

Poddano analizie proces propagacji półnieskończonej szczeliny w nieograniczonym ośrodku sprężystym i sprężysto-plastycznym modelowanym w sposób podany przez Dugdale'a. Rozwiązanie dla naprężeń i przemieszczeń w płaszczyźnie propagacji podano dla trzeciego sposobu obciążenia. Obciążenie ośrodka realizowano przez siłę skupioną przyłożoną do powierzchni szczeliny. Przez analogie zaproponowano rozwiązanie dla pierwszego sposobu obciążenia.

WSTĘP

Problem pękania ciał sprężystych bądź sprężysto-plastycznych jest problemem dość skomplikowanym, szczególnie jeśli analizie podlega nie tyle sam proces utraty stabilności przez szczelinę, co proces propagacji szczeliny. Złożoność problemu polega na tym, że przy prędkościach uzyskiwanych przez szczeliny w wyżej wymienionej klasie ciał nie można pominąć efektów bezwładnościowych. W analizie zagadnień dotyczących propagacji szczeliny w ośrodku sprężystym można wyodrębnić cztery grupy problemów:

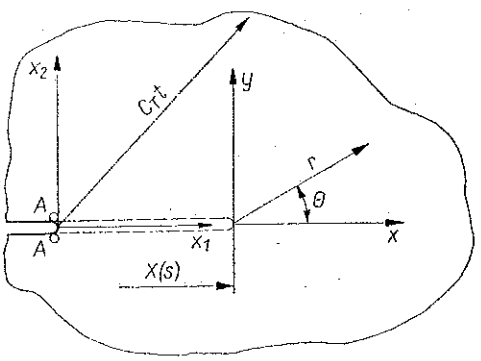
a) *quasi*-statyczne obciążenie ciała i dynamiczna propagacja szczeliny,
b) dynamiczne obciążenie ciała i dynamiczna propagacja szczeliny,
c) dynamiczne obciążenie ciała i *quasi*-statyczna propagacja szczeliny,
d) *quasi*-statyczne obciążenie ciała i *quasi*-statyczna propagacja szczeliny.

W każdej z wyżej wymienionych grup zagadnień można analizować różne zadania, zmieniając geometrię ośrodka i szczeliny lub sposób obciążania ciała bądź szczeliny.

Każda z czterech grup zagadnień znalazła swoje miejsce wśród prac w mechanice pękania. Grupa pierwsza to przede wszystkim prace J. D. ACHENBACHA [1, 2 i 3] i L. B. FREUNDA [4, 5, 6 i 7], gdzie analizowano wszystkie trzy sposoby pękania ciał sprężystych obciążonych w nieskończoności. Ciało sprężysto-plastyczne opisane modelem Dugdale'a i obciążone w nieskończoności analizowano w pracach [8 i 9].

Grupy druga i trzecia dyskutowane były w pracach J. D. ACHENBACHA [1 i 10] i L. B. FREUNDA [11] w zakresie ciał sprężystych. Wreszcie ostatnia grupa zagadnień była jak do tej pory najliczniej reprezentowana w grupie prac dotyczących propagacji szczelin w ośrodkach sprężystych i sprężysto-plastycznych.

W przedstawionej pracy zajęto się dość specyficznym zagadnieniem. Przeanalizowano problem szczeliny półnieskończonej w ośrodku nieograniczonym (dopuszcza się ograniczoność ośrodka, jednakże w takiej odległości, aby odbita fala od powierzchni zewnętrznej nie dotarła z powrotem, zakłócając pole mechaniczne w czasie, w którym prowadzona jest analiza) obciążonej na jej powierzchni siłą skupioną, nieruchomą, wg trzeciego sposobu pękania (mode III). Problem szczelin obciążanych siłami skupionymi na ich powierzchni ma istotne znaczenie dla analitycznego opisu zjawisk występujących w pracach eksperymentalnych, dotyczących badania zatrzymania szczeliny po jej szybkim ruchu (przykładowo por. pracę [12]). Wprawdzie trzeci sposób pękania jest trudny do zrealizowania na drodze eksperymentu, jednakże dużo łatwiejszy do analizy teoretycznej. Uzyskane więc wyniki wraz z innymi, wcześniej otrzymanymi dla sposobu pierwszego, mogą stać się podstawą do pewnych uogólnień bez potrzeby rozwiązywania bezpośredniego znacznie trudniejszych zagadnień. Tak więc rezultatem niniejszej pracy będą wzory określające naprężenie przed wierzchołkiem szczeliny poruszającej się w sposób dynamiczny w ośrodkach sprężystych i sprężysto-plastycznych, rozwarcie szczeliny i pewne geometryczne parametry szczeliny Dugdale'a. Szczelina obciążona jest siłą skupioną w sposób podany na rys. 1.



Rys. 1

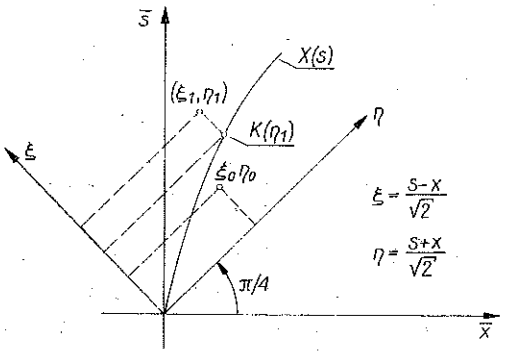
1. Rozwiązanie dla ciała sprężystego

Bez wnikania w szczegóły stosowanej metody rozwiązania, którą drobiazgowo opisano w pracy [1], stwierdzimy tylko, że polega ona na tym, iż pole mechaniczne wokół wierzchołka szczeliny jest superpozycją pola statycznego, istniejącego przed momentem pojawienia się ruchu szczeliny oraz pola dynamicznego, niesionego przez falę sprężystą generowaną przez poruszający się wierzchołek szczeliny. Rozwiązanie równania falowego w postaci

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \qquad s=c_T t,$$

musi spełnić następujące warunki brzegowe (rys. 2):

$$\text{(1.1)}\qquad \begin{aligned} &\text{dla} \quad y=0 \quad \text{i} \quad 0<x<X(s): \tau_{yz}=-f(x,s), \\ &\text{dla} \quad y=0 \quad \text{i} \quad -\infty<x<0: \tau_{yz}=0. \end{aligned}$$



Rys. 2

Ponieważ ruch jest antysymetryczny, przeto również

$$\text{(1.1')}\qquad \text{dla} \quad y=0 \quad \text{i} \quad x\geqslant X(s): w=0,$$

gdzie s oznacza czasopodobną zmienną $s=c_T t$, t oznacza czas, c_T prędkość fali poprzecznej, $X(s)$ funkcję określającą położenie wierzchołka szczeliny.

Rozwiązanie takie jest analogiczne do rozwiązania zagadnienia półprzestrzeni sprężystej z warunkami początkowymi opisującymi stan bezruchu i warunkami brzegowymi w postaci

$$\text{(1.2)}\qquad \text{dla} \quad y=0: \tau_{yz}=\mu\frac{\partial G}{\partial y}=\delta(x-\bar{x})\,\delta(s-\bar{s}),$$

gdzie G oznacza funkcję rozwiązującą równanie falowe przy założonych warunkach brzegowych i początkowych (funkcję Greena), $\delta(\cdot)$ oznacza dystrybucję Diraca, $\bar{x}$ współrzędną położenia wierzchołka szczeliny (rys. 2), $\bar{s}$ drugą współrzędną położenia wierzchołka szczeliny.

Przemieszczenie, które jest rozwiązaniem powyższego zagadnienia określimy następującym wzorem:

$$\text{(1.3)}\qquad w(x,y,s)=\frac{1}{\mu\pi}\int\limits_S\int\frac{q(\bar{x},\bar{s})}{r}\,d\bar{x}\,d\bar{s},$$

gdzie r oznacza odległość między źródłem zakłóceń i punktem obserwacji, $q(x,s)=\tau_{yz}$ rozkład naprężeń wzdłuż trajektorii szczeliny naprężeń istniejących przed propagacją (naprężenie «usunięte» przez poruszającą się szczelinę) i w czasie propagacji (naprężenie przed szczeliną).

Korzystając teraz z warunków brzegowych (1.1) można, po wykonaniu szeregu obliczeń [1 i 8], określić rozwarcie szczeliny Δw mierzone w dowolnym punkcie i naprężenie τ w płaszczyźnie ruchu szczeliny przed wierzchołkiem szczeliny:

$$\Delta w(\xi_1, \eta_1) = \int_{K(\eta_1)}^{\xi_1} \frac{d\xi}{(\xi_1 - \xi)^{1/2}} \int_{\xi}^{\eta_1} \frac{f(\xi, \eta)\, d\eta}{(\eta_1 - \eta)^{1/2}}, \tag{1.4}$$

$f(\xi, \eta)$ oznacza rozkład sił usuniętych przez poruszającą się szczelinę, sił, które istniały tuż przed momentem pojawienia się ruchu szczeliny.

Znaczenie pozostałych symboli przedstawiono na rys. 2. Mamy również

$$\tau(x, s) = 1/\pi \frac{(1-\beta)^{1/2}}{r^{1/2}} \int_0^{X(s)} \frac{f(v, s - X(s) + v)}{[X(s) - v]^{1/2}}\, dv + O\,[x - X(s)]^{1/2}, \tag{1.5}$$

gdzie $\beta = c/c_T$ oznacza względną prędkość szczeliny, c bezwzględną prędkość szczeliny, r odległość punktu obserwacji od wierzchołka szczeliny.

Jak wykazano w szeregu prac [10 i 13], nie trzeba znać pola naprężeń i przemieszczeń w całej przestrzeni wokół wierzchołka szczeliny, aby móc wnioskować o możliwości ruchu szczeliny w ośrodku sprężystym. Wystarczy znać naprężenie w płaszczyźnie ruchu szczeliny przed wierzchołkiem lub rozwarcie szczeliny, aby posłużyć się kryterium energetycznym bądź krytyczną wartością współczynnika intensywności naprężeń, bądź też kryterium krytycznej wartości rozwarcia wierzchołkowego.

Przyjmijmy obecnie, że funkcja $f(x, s - X(s) + x)$ ma postać $A(s)\, H(s)\, \delta(x)$, gdzie $\delta(\cdot)$ jest funkcją Diraca, $H(\cdot)$ funkcją Heaviside'a, $A(s)$ siłą skupioną, działającą w płaszczyźnie x w kierunku osi z z jednej strony szczeliny i w kierunku osi $-z$ z drugiej strony szczeliny. Wykorzystując obraną postać funkcji obciążenia $f(\cdot)$ oraz wyrażenie (1.5) łatwo znajdziemy naprężenia przed wierzchołkiem propagującej się szczeliny w płaszczyźnie propagacji:

$$\tau(x, s) = 1/(2\pi)^{1/2} \frac{1}{r^{1/2}} \left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{dT(S)}{ds}\right)^{1/2} \frac{A(s)}{[T(s)]^{1/2}} \right\}, \tag{1.6}$$

gdzie $T(s)$ jest równaniem trajektorii wierzchołka szczeliny. Wyrażenie w nawiasie klamrowym oznaczymy k_{III} i nazwiemy dynamicznym współczynnikiem intensywności naprężeń (WIN).

Analogiczne zadanie do powyżej rozwiązanego dla przypadku *quasi*-statycznego ma postać

$$\tau(x, s) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{r^{1/2}} \left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{A(s)}{(b)^{1/2}} \right\}, \tag{1.7}$$

gdzie $b(s)$ jest odległością punktu przyłożenia siły $A(s)$ od wierzchołka szczeliny. Rozwiązanie to uzyskano, opierając się na literaturze [14].

Jak łatwo zauważyć statyczny i dynamiczny współczynnik intensywności naprężeń są również powiązane ze sobą w sposób analogiczny do przypadku obciążenia ośrodka w nieskończoności:

$$k_{\mathrm{III}} = (1 - \beta(s))\, K_{\mathrm{III}}. \tag{1.8}$$

Z równań (1.6) i (1.7) wynika oczywisty wniosek, że na to, aby szczelina w założony sposób mogła się poruszać, wymagany jest stały wzrost siły $A(s)$. Gdy siła $A(s)$ będzie stała (dead load) również szczelina będzie stabilna ze względu na malejący z czasem (drogą) współczynnik WIN. Ruch szczeliny mógłby się jedynie odbywać kosztem innych rodzajów energii zmagazynowanych w ośrodku, bądź dostarczonych z zewnątrz.

Znajdźmy z kolei funkcję określającą siłę, która musi zostać przyłożona do powierzchni szczeliny, aby wywołać jej ruch wzdłuż założonej trajektorii. Dla prostoty przyjmijmy trajektorię w kształcie linii prostej, czyli ruch będzie się odbywał ze stałą prędkością:

$$T(s)=\frac{s}{m_T}. \tag{1.9}$$

Oczywiście, dla znalezienia siły musimy posłużyć się wybranym kryterium propagacji, które przyjmiemy w postaci

$$k_{\mathrm{III}}=K_{\mathrm{III}\,D}, \tag{1.10}$$

gdzie $K_{\mathrm{III}\,D}$ jest krytycznym współczynnikiem WIN dla poruszającej się szczeliny (dynamiczny odpowiednik $K_{\mathrm{III}\,C}$), przy czym jest to na ogół funkcja prędkości.

Podstawiając (1.9) do nawiasu klamrowego (1.6) i przyrównując wyrażenie w nawiasie do $K_{\mathrm{III}\,D}$, po przekształceniu otrzymamy

$$A(s)=K_{\mathrm{III}\,D}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}\,[T(s)]^{1/2}=K_{\mathrm{III}\,D}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(1-\beta)^{-1/2}\,(\beta s)^{1/2}. \tag{1.11}$$

Dla innej trajektorii otrzymamy oczywiście inną postać na siłę $A(s)$.

Rozwiązując natomiast proste równanie różniczkowe przy warunkach początkowych zakładających bezruch szczeliny, można dla ustalonego obciążenia $A(s)$ określić trajektorię szczeliny. Równanie ma postać

$$\frac{dT(s)}{ds}+T(s)\,a(s)-1=0, \tag{1.12}$$

gdzie

$$a(s)=\frac{(K_{\mathrm{III}\,D})^2\,\frac{\pi}{2}}{[A(s)]^2}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest następująca funkcja:

$$T(s)=\left[\int a^{\int a(s)\,ds}\,ds\right]e^{-\int a(s)\,ds}. \tag{1.13}$$

Dla pełnego opisu ruchu analizowanej szczeliny znajdziemy wartość rozwarcia jej powierzchni. Wzór (1.4) po wstawieniu przyjętego obciążenia przybierze postać

$$\Delta w(\xi_1\,\eta_1)=-\frac{2}{\mu\pi\sqrt{2}}\int_{L(\eta_1)}^{\xi_1}\frac{d\xi}{[(\xi_1-\xi)]^{1/2}}\int_{\xi}^{\eta_1}\frac{A\left(\frac{\eta+\xi}{\sqrt{2}}\right)H\left(\frac{\eta+\xi}{\sqrt{2}}\right)\delta\left(\frac{\eta-\xi}{\sqrt{2}}\right)d\eta}{(\eta_1-\eta)^{1/2}}. \tag{1.14}$$

Aby znaleźć tę całkę, musimy już na tym etapie ustalić postać siły $A(s)=A[(\eta+\xi)/\sqrt{2}]$. Jest to możliwe, jeśli wykorzystamy wcześniejsze rozważania dotyczące naprężeń. Przyjmijmy więc że postać $A(s)$ określa wzór (1.11). Po przekształceniach i obliczeniach sprowadzimy całkę (1.14) do postaci

$$\Delta w(\xi_1,\eta_1)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{K_{\mathrm{III}D}}{\mu}\frac{2^{1/4}(\beta)^{1/2}}{(1-\beta)^{1/2}}\int_{L(\eta_1)}^{\xi_1}\frac{\xi^{1/2}\,d\xi}{[(\xi_1-\xi)(\eta_1-\xi)]^{1/2}}. \tag{1.15}$$

Po przekształceniach funkcja rozwarcia szczeliny przyjmie następującą postać:

$$\Delta w(\xi_1,\eta_1)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{2^{1/4}}{\mu}\frac{K_{\mathrm{III}D}(\beta)^{1/2}}{(1-\beta)^{1/2}}\times \tag{1.16}$$
$$\times\left\{2(\eta_1)^{1/2}[F(\delta,q)-E(\delta,q)]+2\left\langle\frac{[\xi_1-L(\eta_1)]\,L(\eta_1)}{\eta_1-L(\eta_1)}\right\rangle^{1/2}\right\},$$

gdzie $F(\delta,q)$ oznaczą całkę eliptyczną pierwszego rodzaju, $E(\delta,q)$ całkę eliptyczną drugiego rodzaju,

$$\delta=\arcsin\left\{\frac{\eta_1[\xi_1-L(\eta_1)]}{\xi_1[\eta_1-L(\eta_1)]}\right\}^{1/2},$$
$$q=\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)^{1/2}. \tag{1.17}$$

Współrzędne η_1 i ξ_1 wybieramy dowolnie (pamiętając o zależnościach na rys. 2); są to współrzędne punktu leżącego na powierzchni szczeliny, tzn. dla $y=0$.

$L(\eta_1)$ można zaś łatwo obliczyć ze wzoru

$$\frac{\eta_1-L(\eta_1)}{\sqrt{2}}=X\left[\frac{\eta_1+L(\eta_1)}{\sqrt{2}}\right]. \tag{1.18}$$

Dla ciała idealnie sprężystego, w przeciwieństwie do sprężysto-plastycznego, wzór (1.16) nie ma głębszego zastosowania w teoriach związanych z propagacją szczelin.

2. Rozwiązanie dla ciała sprężysto-plastycznego

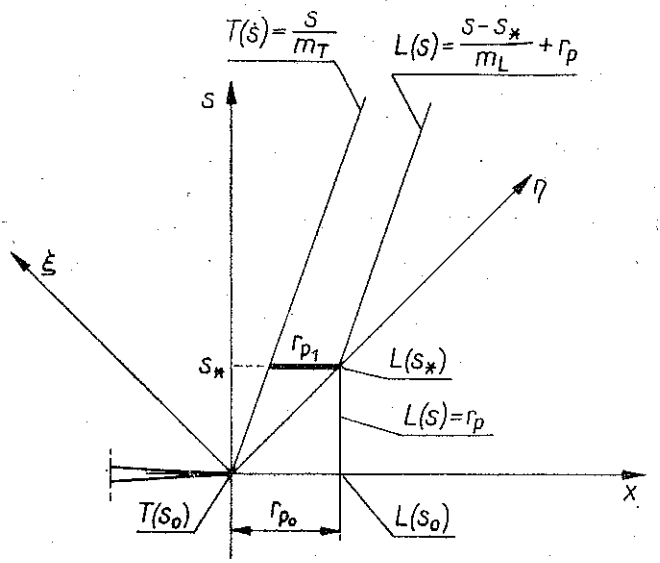
W pracach [8 i 9] wykazano, że metoda obliczeń stosowana w niniejszej pracy jest również bardzo wygodna dla pewnego modelu ciała sprężysto-plastycznego, w którym znajduje się szczelina. Mowa tu o modelu Dugdale'a.

Dla przypomnienia wspomnimy, że Dugdale sprowadził w swym modelu obszar plastyczny wokół szczeliny do jednowymiarowego (zagadnienie płaskie) obszaru działania sił kohezji tuż przed wierzchołkiem szczeliny. Po takim założeniu szczelina sprowadzona została do szczeliny o skorygowanej długości o długość strefy plastycznej r_p. W strefie tej działają siły kohezji. «Zmodyfikowana» szczelina nadal znajduje się w obszarze sprężystym i spełnione są wszystkie prawa rządzące takim obszarem.

W Stanach Zjednoczonych w laboratoriach Westinghouse wykonano szereg obliczeń numerycznych [15] szacujących błąd uzyskany przy stosowaniu teorii

sprężystości do zagadnień szczeliny ze strefą plastyczną. Okazuje się, że jeśli iloraz r_p/a (gdzie a oznacza długość szczeliny) jest mniejszy niż 0,02, to poziom dokładności obliczeń jest wyższy niż 90% bez względu na kształt strefy plastycznej. Można więc przypuszczać, że wprowadzenie do obliczeń poprawki w postaci działających sił kohezji zwiększy poziom dokładności.

Zajmijmy się z kolei analizą ruchu szczeliny Dugdale'a, obciążonej siłą skupioną. Dla ułatwienia posłużmy się rys. 3. Założono, że propagacja «fizycznej» szczeliny odbywa się ze stałą, ale wysoką prędkością. W czasie $s=0$ wierzchołek $T(s_0)$ zaczyna ruch (przypomnijmy, że $s=tc_T$). Sygnał w ośrodku może rozchodzić się z maksymalną prędkością równą prędkości dźwięku, czyli dopiero po czasie $s=s_*=r_p$ wierzchołek strefy plastycznej $L(s_0)$ zareaguje na zmienioną sytuację fizyczną i rozpocznie się poruszać wzdłuż $L(s)$.



Rys. 3

Tok naszych obliczeń nie ulegnie zmianie. Wykorzystamy znowu wzory (1.4) i (1.5) z tą różnicą, że na miejsce $f(x, s)$ wstawimy funkcję

$$(2.1)\qquad f(x,s)=-A(s)\,\delta(x)\,H(s)+\tau_f\,H[x-T(s)]\,H[L(s)-x]\,H(s),$$

gdzie τ_f przyjmiemy jako wartość stałą równą, np. σ_0 (granicy plastyczności dla analizowanego ciała).

Najpierw określmy naprężenie przed wierzchołkiem szczeliny. Rozwijając całkę (1.4) z pierwszym wyrazem wyrażenia (2.1), otrzymamy wynik podobny do wzoru (1.6):

$$(2.2)\qquad \tau(x,s)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{1}{(r)^{1/2}}\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(1-\frac{dL}{ds}\right)^{1/2}\frac{A(s)}{[L(s)]^{1/2}}\right\}.$$

Różnica polega jedynie na tym, że $L(s)$ określa trajektorię wierzchołka strefy plastycznej. W naszym przypadku dla przedziału czasowego $[0, s_*)$ naprężenie ma postać

$$\tau(x,s)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{(r)_{1/2}}\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{A(s)}{(r_{p0})^{1/2}}\right\}, \tag{2.3}$$

natomiast dla czasu $s>s_*$

$$\tau(x,s)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{(r)^{1/2}}\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}(1-\beta_L)^{1/2}A(s)\left[\beta_L s+r_{p0}(1-\beta_L)\right]^{-1/2}\right\}. \tag{2.4}$$

Przez β_L oznaczać będziemy prędkość względną wierzchołka strefy plastycznej, a przez β_T prędkość względną wierzchołka szczeliny «fizycznej».

Całkę (1.4) dla drugiego wyrazu w (2.1) znajdziemy łatwo [8]:

$$\tau(x,s)=-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{(r)^{1/2}}\left\{2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{1-\beta_L}{1-\beta_T}\right)^{1/2}\sigma_0(r_p)^{1/2}\right\}. \tag{2.5}$$

Wykorzystując warunek Dugdale'a na współczynniki intensywności naprężenia, który mówi, że ten współczynnik równa się zeru — dla zlikwidowania osobliwości naprężeń w wierzchołku szczeliny — znajdziemy długość strefy plastycznej. Dodając wyrażenia (2.5) i (2.2) i przyrównując wynik do zera, otrzymamy

$$r_p=\frac{(K_{\mathrm{III}D})^2\pi}{\sigma_0^2 8}\left(\frac{1-\beta_T}{1-\beta_L}\right). \tag{2.6}$$

W granicy, jeśli $s\to s_*$ oraz $\beta_L=1$, można znaleźć

$$r_{p1}=r_{p0}(1-\beta_T), \tag{2.7}$$

gdzie $r_{p0}=(K_{\mathrm{III}D})^2\pi/8\sigma_0^2$. Tę samą zależność znajdzie się z analizy trójkątów $T(s_0)$, $L(s_0)$, $L(s_*)$ i $T(s_0)$, $T(s_*)$, $L(s_*)$ (rys. 3). Wielkość ta jest analogiczna do uzyskanej dla przypadku *quasi*-statycznego, obliczonego np. na podstawie książki [14]. Dla przypadku *quasi*-statycznego $K_{\mathrm{III}D}$ zastąpimy przez $K_{\mathrm{III}C}$ ($\lim_{\beta\to 0} K_{\mathrm{III}D}=K_{\mathrm{III}C}$).

Tak więc w naszym konkretnym przypadku $r_{p0}=(K_{\mathrm{III}C})^2\pi/8\sigma_0^2$, ponieważ w przedziale czasu $[0;s_*]$ $\beta_L=0$.

Z równania (2.6) wynika wniosek, że jeśli założymy, aby oba wierzchołki $T(s)$ i $L(s)$ poruszały się po linii prostej, to ich prędkości muszą być równe. Uzyskujemy wówczas ruch ustalony szczeliny i znajdziemy $r_p=r_{p1}$. Mając powyższe na uwadze, z równania (2.7) wynika, że wraz ze wzrostem prędkości szczeliny długość strefy plastycznej zdąża do zera, dla ruchu ustalonego.

Dla przypadku szczeliny ze strefą plastyczną istotne staje się znalezienie rozwarcia szczeliny przy końcu strefy plastycznej. Wielkość tę można by porównać do stałej materiałowej δ_{COD} (*crack opening displacement*) szukając potwierdzenia przyjętego kryterium propagacji. Do obliczeń wykorzystano wzór (1.4). Na miejsce

$f(x, s)$ wstawiono wyrażenie (2.1). Obliczenie całki (1.4) dla drugiej części (prawej strony wyrażenia (2.1)) nie przedstawia większych trudności [8], a wynik jest następujący:

$$\Delta w_{\sigma 0} = -\frac{4}{\pi}\,\frac{\sigma_0}{\mu}\,\frac{1}{1+\beta_L}\left(\frac{1+\beta_T}{1-\beta_T}\right)^{1/2} r_p\,. \tag{2.8}$$

Nieco bardziej złożone jest obliczenie składowej Δ w pochodzącej od siły $A(s)$, którą dla analizowanej trajektorii zapiszemy w postaci

$$A(s) = K_{\mathrm{III}\,D}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}(1-\beta_L)^{-1/2}\,[\beta_L\, s + r_p\,(1-\beta_L)]^{1/2}\,. \tag{2.9}$$

Po zmianie zmiennych i wykonaniu pierwszego całkowania otrzymamy następującą całkę:

$$\Delta w_A(\xi_1, \eta_1) = -\frac{2}{\mu\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} K_{\mathrm{III}\,D}\,(1-\beta_L)^{-1/2}\int\limits_{L(\eta_1)}^{\xi_1}\frac{[\beta_L\sqrt{2}\,\xi + r_p\,(1-\beta_L)]^{1/2}}{[(\xi_1-\xi)\,(\eta_1-\xi)]^{1/2}}\,d\xi\,. \tag{2.10}$$

Po wykonaniu całkowania

$$\Delta w_A(\xi_1, \eta_1) = -\frac{2^{5/4}}{\mu\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} K_{\mathrm{III}\,D}\left(\frac{\beta_L}{1-\beta_L}\right)^{1/2} \times \tag{2.11}$$

$$\times\left\{2\sqrt{\eta_1 + \frac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}}\,[F(\delta, q) - E(\delta, q)] + 2\left\langle\frac{[\eta_1 - L(\eta_1)]\left[L(\eta_1) + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}\right]}{L(\eta_1) + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}}\right\rangle^{1/2}\right\},$$

gdzie symbole $F(\delta, q)$ i $E(\delta, q)$ oznaczają całki eliptyczne pierwszego i drugiego rodzaju, przy czym

$$\delta = \arcsin\left\{\frac{\left[\eta_1 + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}\right][\xi_1 - L(\eta_1)]}{\left[\xi_1 + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}\right][\eta_1 - L(\eta_1)]}\right\}^{1/2},$$

$$q = \left\{\frac{\left[\xi_1 + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}\right]}{\eta_1 + \dfrac{r_p\,(1-\beta_L)}{\sqrt{2}\,\beta_L}}\right\}^{1/2}. \tag{2.12}$$

Przechodząc do układu osi współrzędnych s, x można otrzymać

$$L(\eta_1)=\frac{\eta_1(m_L-1)}{(m_L+1)}+\sqrt{2}\frac{s_*}{(m_L+1)}-\sqrt{2}\,m_L\frac{r_p}{(m_L+1)} \tag{2.13}$$

oraz

$$\eta_1=\frac{(m_T+1)\,s}{\sqrt{2}\,m_T},\qquad \xi_1=\frac{(m_T-1)\,s}{\sqrt{2}\,m_T}, \tag{2.14}$$

gdzie $m_T=1/\beta_T$, $m_L=1/\beta_L$ oraz gdzie s oznacza dowolną chwilę czasu. Całkowite rozwarcie szczeliny obliczymy dodając stronami dla danej chwili wzory (2.8) i (2.11)

$$\Delta w=\Delta w_A+\Delta w_{\sigma_0}. \tag{2.15}$$

W pracy [1] rozwiązano podobne zagadnienie, lecz dla sposobu pierwszego pękania, przyjmując że siła A jest niezmienna w czasie oraz że ciało jest doskonale sprężyste. Otrzymane rozwiązanie można przekształcić do postaci

$$(\sigma_{22})_A=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{(r)^{1/2}}\left\{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}k_{\alpha\beta}\frac{A}{[L(s)]^{1/2}}\right\}. \tag{2.16}$$

Funkcja w nawiasie klamrowym określa współczynnik WIN, który również jest związany ze statycznym współczynnikiem WIN za pomocą wzoru

$$k_{\mathrm{I}}=k_{\alpha\beta}\,K_{\mathrm{I}},$$

gdzie

$$k_{\alpha\beta}=\frac{1-(C_L/C_R)\,\alpha}{s_1(\alpha,\beta)\,(1-\alpha)^{1/2}}$$

oraz gdzie c_R oznacza prędkość fal Rayleigha, c_L prędkość fal wzdłużnych, $\alpha=c/c_L$, c oznacza bezwzględną prędkość szczeliny

$$s_+(\alpha,\beta)=\exp\left\{-\frac{\alpha}{\pi}\int_a^b\tan^{-1}[f(\zeta)]\frac{d\zeta}{\zeta+1}\right\},$$

$$f(\zeta)=\frac{4\zeta^2}{[2\zeta^2\,\alpha-(c_L/c_T)\,\beta-\alpha\beta^2\,\zeta^2-2\zeta\beta^2]^2},$$

$$a=1/(1-\alpha),\qquad b=1/(c_T/c_L-\alpha),$$

gdzie c_T oznacza prędkość fal poprzecznych oraz β oznacza c/c_T. Można by z kolei, wykorzystując pełne analogie między propagacją szczelin wg sposobu pierwszego i trzeciego przy obciążeniu ciała w nieskończoności [8] oraz analogie między wzorami (1.6) i (2.16) — uogólnić rozważania dla ciała *quasi*-kruchego.

Wykorzystując prace [8 i 16] określimy wpływ sił kohezji τ_f na naprężenie σ_{22} przed wierzchołkiem szczeliny:

$$(\sigma_{22})_{\sigma_0}=-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{(r)^{1/2}}\left\{2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\sigma_0\,(r_p)^{1/2}\right\}. \tag{2.17}$$

Średnicę strefy plastycznej znajdziemy przyrównując wypadkowy współczynnik WIN do zera:

$$(k_{\mathrm{I}})_A+(k_{\mathrm{I}})_{\sigma_0}=0,$$

$$r_p=\frac{[k_{\alpha\beta}]^2 A^2}{4\sigma_0^2 [L(s)]}. \tag{2.18}$$

W pracy potwierdzono występowanie analogii w opisie ruchu szczelin w ośrodku sprężysto-plastycznym dla pierwszego i trzeciego sposobu obciążenia siłą skupioną. Analogie te występują we wzorach na dynamiczne współczynniki intensywności naprężeń, jak również we wzorach opisujących rozwarcie poruszających się szczelin. Analogie te można by było przenosić na inne kształty próbek ze szczelinami, co mogłoby mieć praktyczne znaczenie w razie konieczności wykonania obliczeń w krótkim czasie. Opis trzeciego sposobu zniszczenia jest prostszy i znalezienie rozwiązania jest łatwiejsze od analogicznego rozwiązania zagadnienia płaskiego.

Literatura cytowana w tekście

1. J. D. Achenbach, Mechanics Today, **1**, 1–57, 1972.
2. J. D. Achenbach, J. of Elasticity, **3**, 4, 277–288, 1973.
3. J. D. Achenbach, *Theoretical and applied mechanics*. W. T. Koiter, ed., North-Holland Publ. Comp., 71–87, 1976.
4. L. B. Freund, *Mechanics today*, **3**, S. Nemat-Nasser, 55–91, 1976.
5. L. B. Freund, *Dynamic crack propagation*, in The Mechanics of Fracture, AMD, **19**, 105–134.
6. L. B. Freund, J. Mech. Phys. Solids, **20**, 129–140, 1972.
7. L. B. Freund, J. Mech. Phys. Solids, **20**, 141–152, 1972.
8. J. D. Achenbach, A. Neimitz, in: Engineering Fracture Mech., **14**, 385–395, 1981.
9. A. Neimitz, Arch. Mech. **33**, 6, 1981.
10. J. D. Achenbach, *Contribution to the theory of aircraft structures*, Delft University Press, 379–397, Delft 1972.
11. L. B. Freund, J. Mech. Phys. Solids, **21**, 47, 1973.
12. G. T. Hahn, R. G. Kaanninen, A. R. Rosenfield, ASTM STP 601, 209–233, 1976.
13. F. Erdogan, *Fracture*, **2**, H. Liebovitz, ed., Academic Press, 1968.
14. H. Tada, P. C. Paris, G. R. Irwin, *The stress analysis of cracks*, Del Research Corporation, St. Louis 1973.
15. J. Eftis, H. Liebovitz, Engineering Fracture Mech., **7**, 101–135, 1975.
16. J. W. Craggs, J. Mech. Phys. Solids, **8**, 66–75, 1960.

Резюме

О НЕКОТОРОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ЩЕЛИ В УПРУГИХ И УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Подвергнут анализу процесс распространения полубесконечной щели в неограниченных упругих и упруго-пластических средах, моделированных способом приведенным Дюгдейлом. Решение для напряжений и перемещений в плосскости распространения приведено для третьего спозоба нагружения. Нагружение среды реализовалось через сосредоточеченную силу, приложенную к поверхности щели. По аналогии предложено решение для первого способа нагружения.

SUMMARY

ON A CERTAIN CRACK PROBLEM IN ELASTIC AND ELASTIC-PLASTIC MEDIA

The analysis of propagation of a semi-infinite crack in an infinite elastic and elastic-plastic body was carried out. In the analysis of the elastic-plastic body a model with a strip zone of yielding (Dugdale model) was used. The solution for stresses and displacements in the crack propagation plane for the Mode III case was given. The body was loaded by concentrated forces acting on the surfaces of the crack. Using some analogies, the solution for the Mode I case was proposed.

INSTYTUT TECHNOLOGII MASZYN
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, KIELCE

Praca została złożona w Redakcji w dniu 5 grudnia 1980 r.