

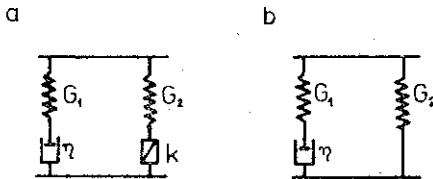
STREFA UPLASTYCZNIENIA CIAŁA M/V W RURZE GRUBOŚCIENNEJ ⁽¹⁾

MIECZYŚLAW STACHOŃ (WROCLAW)

Rozważono zagadnienie nieściśliwej, nieskończenie długiej rury grubościennej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego. Do opisu własności mechanicznych materiału rury przyjęto model M/V . Rozwiązano zagadnienia brzegowe w obu obszarach rury częściowo uplastycznionej. Rozwiązania uwzględniają zmianę w czasie granicy między tymi obszarami. Uzyskano równanie umożliwiające jej określenie w dowolnej chwili czasu.

1. WSTĘP

Model M/V pokazany na rys. 1 został zaproponowany przez I. KISIELA do opisu zachowania się podłoża pod wpływem wymuszonych drgań tarczy [4]. Badaniu tego ciała i jego zastosowaniu do rozwiązywania konkretnych zagadnień brzegowych poświęcono niewiele prac.



Rys. 1

Związki fizyczne dla tego ciała przedstawione w [4] dotyczą jednoosiowego stanu naprężenia i odkształcenia. Możliwości zastosowania tego modelu w praktyce inżynierskiej do opisu własności mechanicznych ośrodków rzeczywistych rozważono w pracy [6]. Rozwiązaniu konkretnych zagadnień brzegowych dla tego ciała poświęcone są m.in. prace [7 i 8].

Model M/V (rys. 1a) stanowi równoległe połączenie modelu Maxwella i Saint-Venanta. Z tego względu obciążenie ciała M/V rozłożone jest na te dwa modele. Jeżeli wartość obciążenia nie powoduje przekroczenia nośności elementu plastycznego, to model M/V zachowuje się jak liniowe ciało standardowe (rys. 1b). I. Kisiel traktował element plastyczny ciała M/V jako rodzaj «przełącznika» z modelu stan-

⁽¹⁾ Praca wykonana z kredytów przyznanych przez IPPT PAN w ramach badań nad problemem międzyresortowym MR. I-23.

dardowego na model cieczy Maxwella z pewnym oporem ścinania. Dla tak rozumianego ciała M/V w powyższych pracach zaproponował inżynierski sposób określania zasięgu strefy upłynnienia ośrodka. Zasięg tego obszaru wyznaczono na podstawie rozwiązania rozważanego zagadnienia dla ciała standardowego. Użytkiwane rozwiązanie pozwalało ustalić okres czasu, po upływie którego w interesującym miejscu obszaru składowe tensora naprężenia panującego w ciele Saint-Venanta spełnią warunek plastyczności. Zagadnienie rozkładu naprężeń i odkształceń w obszarze nieupłynnionym nie było rozważane.

Przyjęte uproszczenia pozwoliły ominąć trudności charakterystyczne dla zagadnień teorii plastyczności, a związane m.in z poszukiwaniem kształtu i zasięgu obszaru uplastycznionego oraz rozwiązaniem podstawowych układów równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych odnoszących się do obu obszarów ośrodka.

Przedstawiony inżynierski sposób określania strefy upłynnienia ośrodka traktowano jako pierwsze przybliżenie. Dotychczas nie było wzmianki w literaturze naukowej na temat stosowanych uproszczeń. Nie wiadomo, czy opisany sposób jest dopuszczalny z inżynierskiego punktu widzenia.

Model M/V był przez I. Kisiela wykorzystywany do opisu zachowania się różnych gruntów. Jednak koncepcja tego modelu może dotyczyć tylko gruntów, których zachowanie się po osiągnięciu w nich stanu granicznego upodabnia się do zachowania się cieczy lepkiej.

Teoria stanów granicznych będąca odmianą teorii plastyczności dość dobrze opisuje wszystkie grunty sypkie, a nawet spoiste. Stosowano ją także do opisu skał. Jednak teoria ta nie uwzględnia deformacji lepkosprężystych występujących prawie we wszystkich gruntach. Aby uwzględnić występowanie w gruntach deformacji plastycznych, a nie tylko lepkich, zaproponowano modyfikację modelu M/V przez uwzględnienie cech plastycznych elementu plastycznego wchodzącego w skład tego ciała [12].

W przypadku zagadnienia jednoosiowego stanu naprężenia i odkształcenia związki fizyczne tego modelu wg obu koncepcji są identyczne. W przyjętym stanie naprężenia, gdy nośność elementu plastycznego zostanie przekroczona, wystąpić powinny istotne różnice w zachowaniu się obu modeli. Ponadto opis zachowania się modelu M/V wg proponowanej koncepcji staje się trudny. O problemach tych wspomina A. DRESCHER w pracy [2].

W pracy niniejszej przedstawiono wyniki badań nad zmodyfikowanym modelem M/V . Jej celem jest uzyskanie pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego nieco bardziej złożonego niż jednowymiarowy stan naprężenia i odkształcenia. Rozwiązanie powinno uwzględniać podział ośrodka na obszary lepkosprężyste i plastyczny oraz ruch rozdzielającej je granicy.

W pracy rozpatrzono zagadnienie nieskończenie długiej rury grubościennej poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego niezmiennego w czasie. O materiale rury założono, że jest nieściśliwy. Spośród gruntów gliny, szczególnie gliny zwięzłe dość dobrze spełniają to założenie zarówno w fazie odkształceń odwracalnych jak i nieodwracalnych. Wymienione założenia i ograniczenie rozważań do płaskiego

stanu odkształcenia powodują, że związki fizyczne ciała M/V , które przyjęto do opisu własności materiału rury, sprowadzają się do takiej postaci, jak dla przypadku jednowymiarowego stanu naprężenia. Daje to okazję do porównania wyników dotyczących zasięgu strefy upłynnienia ośrodka uzyskanych wg procedury przedstawionej powyżej z wynikami uzyskanymi w niniejszej pracy. W dalszym ciągu w punkcie 2 przytoczono podstawowe zależności między składowymi tensora naprężenia i odkształcenia występujące w modelu M/V .

W punkcie 3 i 4 rozwiązano zagadnienie quasi-statycznego płynięcia wspomnianej rury grubościennej. W punkcie 4 rozpatrzono zagadnienie rury częściowo uplastycznionej uwzględniając rozwój strefy uplastycznienia przez rozwiązanie zagadnień brzegowych w obu obszarach. Wybór zadania podyktowany został szerokim zastosowaniem praktycznym jego wariantów. Szczególna symetria zadania pozwala przewidywać kształt granicy stref w postaci okręgu, co umożliwiła uzyskanie pełnego rozwiązania zagadnienia brzegowego.

W punkcie 5 przedstawiono wyniki przykładu liczbowego ilustrującego uzyskane w punktach 3 i 4 rozwiązanie.

2. O ZWIĄZKACH FIZYCZNYCH MODELU M/V

Obciążenie przekazywane na model M/V przejmowane jest częściowo przez element Maxwella a częściowo przez element Saint-Venanta. Zachodzi więc następujący związek:

$$(2.1) \quad s_{ij} = s_{ij}^M + s_{ij}^V, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

gdzie s_{ij} , s_{ij}^M , s_{ij}^V oznaczają składowe dewiatora naprężenia odpowiednio w modelu M/V , elemencie Maxwella i elemencie Saint-Venanta. Ze względu na szeregowe połączenie elementu sprężystego G_1 i lepkiego η panuje w nich jednakowe naprężenie s_{ij}^M . Analogicznie, w ciele Saint-Venanta element sprężysty G_2 i plastyczny k przenoszą naprężenie s_{ij}^V . Składowe dewiatora prędkości odkształcenia spełniają zależność

$$(2.2) \quad \dot{e}_{ij} = \dot{e}_{ij}^{G_1} + \dot{e}_{ij}^{\eta} = \dot{e}_{ij}^{G_2} + \dot{e}_{ij}^k.$$

W powyższym związku i w dalszym ciągu pracy kropka oznacza różniczkowanie względem czasu. Wielkości \dot{e}_{ij} , $\dot{e}_{ij}^{G_1}$, \dot{e}_{ij}^{η} , $\dot{e}_{ij}^{G_2}$, \dot{e}_{ij}^k są składowymi dewiatora prędkości odkształcenia odpowiednio w modelu M/V , elemencie sprężystym G_1 , lepkiem η , sprężystym G_2 i plastycznym k .

Związki fizyczne poszczególnych elementów są następujące:

$$(2.3) \quad s_{ij}^M = 2G_1 e_{ij}^{G_1}, \quad s_{ij}^M = 2\eta \dot{e}_{ij}^{\eta}, \quad s_{ij}^V = 2G_2 e_{ij}^{G_2}.$$

O elemencie plastycznym zakłada się, że odpowiada nieściśliwemu ciału sztywno idealnie plastycznemu z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego postaci

$$(2.4) \quad s_{ij}^V s_{ij}^V = 2k^2.$$

W związkach (2.3) i (2.4) G_1 , G_2 , η , k oznaczają odpowiednio moduły Kirchhoffa elementów sprężystych, lepkość postaciową i granicę plastyczności przy czystym ścinaniu. W zależności (2.4) przyjęto konwencję sumacyjną.

Związki fizyczne elementu plastycznego przyjmuje się w postaci prawa płynięcia stowarzyszonego z warunkiem (2.4):

$$(2.5) \quad \dot{e}_{ij}^k = \lambda s_{ij}^V,$$

gdzie λ jest pewnym dodatnio określonym współczynnikiem mającym wymiar prędkości, który na podstawie zależności (2.4) i (2.5) można przedstawić w postaci

$$\lambda = \frac{\sqrt{\frac{1}{2} \dot{e}_{ij}^k \dot{e}_{ij}^k}}{k}.$$

Gdy składowe dewiatora naprężenia panującego w elemencie plastycznym nie spełniają warunku plastyczności (2.4), to element ten nie odkształca się. Wówczas całkowite odkształcenia modelu są wynikiem odkształceń elementów sprężystych G_1 , G_2 i elementu lepkiego η . Model zachowuje się jak ciało standardowe. Związki fizyczne tego modelu są następujące [5]:

$$(2.6) \quad \Gamma_2 T \dot{e}_{ij} + c_{ij} = \frac{1}{2G_2} (T \dot{s}_{ij} + s_{ij}),$$

gdzie

$$\Gamma_2 = \frac{G_1 + G_2}{G_2}, \quad T = \frac{\eta}{G_1}.$$

Dewiator naprężenia w ciele Saint-Venanta zmienia się wtedy zgodnie z zależnością

$$(2.7) \quad s_{ij}^V = 2G_2 e_{ij}.$$

3. ZAGADNIENIE RURY GRUBOŚCIENNEJ

3.1. Sformułowanie zadania

Poniżej przedstawiono rozwiązanie zagadnienia nieściśliwej, nieskończonej długiej rury grubościennej poddanej działaniu tylko ciśnienia wewnętrznego niezmiennego w czasie. Zadanie traktowane jest jako *quasi*-statyczne z pominięciem wpływu sił masowych. O materiale rury zakłada się, że jest izotropowy i jednorodny, a jego własności opisuje ciało M/V . Rozważania ograniczono do płaskiego stanu odkształcenia i liniowych związków geometrycznych. Ponadto przyjęto, że wartość ciśnienia wewnętrznego jest taka, iż uplastycznienie na wewnętrznej powierzchni rury zaczyna się po upływie określonego czasu od chwili przyłożenia obciążenia.

Zagadnienie rozważane będzie w układzie współrzędnych walcowych r , φ , z . Ze względu na przyjęte założenia rozwiązanie zagadnienia nie zależy od współrzędnych φ , z .

Stan naprężenia w rurze jest następujący:

$$\sigma_r = \sigma_r(r, t), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\varphi(r, t), \quad \sigma_z = \sigma_z(r, t), \quad \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{zr} = 0.$$

Składowe tensora odkształcenia mają postać

$$(3.1) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{zr} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi z} = 0,$$

gdzie $u(r, t)$ oznacza składową promieniową wektora przemieszczenia. Jedynym równaniem równowagi, które nie jest tożsamościowo spełnione w warunkach zadania jest równanie następujące:

$$(3.2) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0,$$

z następującymi warunkami brzegowymi:

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = -p_0 H(t), \quad \sigma_r(r, t)|_{r=b} = 0,$$

gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a, a symbole r , a , b oznaczają odpowiednio bieżący, wewnętrzny i zewnętrzny promień rury.

3.2. Rozwiązanie zagadnienia rury nieuplastycznionej

Przed uplastycznieniem ośrodek zachowuje się jak ciało standardowe. Rozwiązanie zagadnienia dla tego stanu uzyskane zostanie przez zastosowanie zasady odpowiedniości [3]. W rozwiązaniu dla przypadku sprężystego dokona się zamiany stałych sprężystych przez odpowiednie operatory [3], których postać otrzyma się dzięki zastosowaniu przekształcenia Laplace'a do związków fizycznych ciała standardowego.

W stanie sprężystym rozwiązanie ma postać [10]

$$(3.3) \quad \sigma_r = \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\varphi) = \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2}, \quad u = \frac{p_0 a^2 b^2}{2G (b^2 - a^2) r}.$$

Wobec założenia płaskiego stanu odkształcenia $\varepsilon_z = 0$ i nieściśliwości ośrodka w warunkach zadania związki fizyczne ciała standardowego (2.6) sprowadzają się do równania

$$(3.4) \quad \Gamma_2 T \ddot{s}_r + \varepsilon_r = \frac{1}{2G_2} (T \dot{s}_r + s_r).$$

Odpowiednikiem odwrotności modułu Kirchhoffa $1/G$ jest w tym przypadku operator [3 i 12]

$$(3.5) \quad \psi_2 = \frac{1 + Ts}{G_2 (1 + \Gamma_2 Ts)},$$

gdzie s jest zmienną przekształcenia Laplace'a.

Ze względu na to, że stan naprężenia w rozwiązaniu sprężystym nie zależy od stałych sprężystych, stan naprężenia dla ciała standardowego jest identyczny z (3.3).

Zmianie ulegnie jedynie składowa promieniowa wektora przemieszczenia. Korzystając ze wspomnianej zasady odpowiedniości, po wstawieniu na miejsce $1/G$ w rozwiązaniu (3.3)₄ operatora określonego wzorem (3.5) i wykonaniu transformacji odwrotnej [1], otrzymuje się następującą postać tej składowej:

$$u(r, t) = \frac{p_0 a^2 b^2}{2G_2 (b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_1} e^{-\frac{t}{\Gamma_2 T}} \right) \frac{1}{r},$$

gdzie

$$\Gamma_1 = \frac{G_1 + G_2}{G_1}.$$

Składowe dewiatora odkształcenia są postaci

$$(3.6) \quad \varepsilon_r(r, t) = -\frac{p_0 a^2 b^2}{2G_2 (b^2 - a^2)} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_1} e^{-\frac{t}{\Gamma_2 T}} \right) \frac{1}{r^2}, \quad \varepsilon_\varphi = -\varepsilon_r.$$

Do momentu uplastycznienia materiału rury, naprężenie w ciele Saint-Venanta na podstawie (2.7) i (3.6) zmienia się w czasie następująco:

$$(3.7) \quad s_r^y(r, t) = -\frac{p_0 a^2 b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_1} e^{-\frac{t}{\Gamma_2 T}} \right) \frac{1}{r^2}, \quad s_\varphi^y = -s_r^y.$$

Warunek uplastycznienia materiału rury po uwzględnieniu (3.7) przyjmuje postać

$$(3.8) \quad p_0^2 \frac{a^4 b^4}{(b^2 - a^2)^2 r^4} \left(1 - \frac{1}{\Gamma_1} e^{-\frac{t}{\Gamma_2 T}} \right)^2 = k^2.$$

Na podstawie osiowej symetrii zagadnienia można założyć, że granica strefy uplastycznionej i nieuplastycznionej ma w przekroju poprzecznym rury kształt okręgu. Ze wzoru (3.8) wynika, że uplastycznienie najwcześniej nastąpi na wewnętrznej powierzchni rury $r=a$. Czas, po którym to nastąpi przy danej wartości ciśnienia p_0 , na mocy (3.8) wynosi

$$(3.9) \quad t_{kr} = -\Gamma_2 T \ln \left\{ \Gamma_1 \left[1 - \frac{k (b^2 - a^2)}{p_0 b^2} \right] \right\}.$$

W dalszym ciągu pracy oznaczenie t_{kr} rozumieć należy jako czas określony według wzoru (3.9).

4. ZAGADNIENIA RURY CZĘŚCIOWO UPLASTYCZNIONEJ

4.1. Rozwiązanie w obszarze nieuplastycznionym

Strefa, w której nie nastąpiło uplastycznienie materiału rury, może być określona przez nierówność

$$(4.1) \quad \rho(t) < r < b,$$

gdzie $\rho(t)$ oznacza promień strefy uplastycznienia odpowiadający chwili t . Układ równań zagadnienia w obszarze (4.1) tworzą następujące równania:

1. Równanie równowagi (3.2) z warunkiem brzegowym

$$(4.2) \quad \sigma_r(r, t)|_{r=b} = 0.$$

Na granicy stref $r = \rho(t)$ musi być spełniony warunek

$$(4.3) \quad s_r^V(\rho) = k,$$

gdyż

$$s_r^V = -s_\phi^V \quad \text{i} \quad s_z^V = 0.$$

Z (3.3)₁ wynika, że w chwili $t = t_{kr}$ mamy

$$(4.4) \quad \sigma_r(r, t)|_{t=t_{kr}} = -\frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right).$$

2. Warunek nieściśliwości

$$(4.5) \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 0.$$

3. Związki fizyczne (3.4).

Rozwiązanie równania (4.5) po uwzględnieniu (2.7), (3.1)₁ i (4.3) ma postać:

$$(4.6) \quad u(r, t) = \frac{k\rho^2(t)}{2G_2 r}.$$

Wykorzystując rozkład składowej tensora naprężenia na część dewiatorową i kulistą, równanie równowagi (3.2) można przedstawić w postaci:

$$(4.7) \quad \frac{\partial s_r}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial r} + \frac{2s_r}{r} = 0.$$

Dodanie stronami równania (4.7) i równania otrzymanego z (4.7) przez obustronne różniczkowanie względem czasu i pomnożenie przez T oraz wykorzystanie związku (3.4) z uwzględnieniem (3.1)₁ i (4.6), prowadzi do następującego równania:

$$(4.8) \quad \frac{\partial}{\partial r} (T\dot{\sigma}_0 + \sigma_0) = 0.$$

Wynikiem dodawania rozwiązań równań (4.8) względem σ_0 oraz (3.4)₁ względem s_r oraz wykorzystania warunków (4.2) i (4.4), jest następująca postać składowej promieniowej tensora naprężenia:

$$(4.9) \quad \sigma_r(r, t) = \left[-G_2 k \left(\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{G_1 k}{G_2 T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_k}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}.$$

Z równania równowagi (3.2) wynika

$$(4.10) \quad \sigma_{\varphi}(r, t) = \left[\Gamma_2 k \left(\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{G_1 k}{G_2 T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_{kr}}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}.$$

Rozwiązanie równania (4.8) po uwzględnieniu warunków brzegowo-początkowych ma postać

$$(4.11) \quad \sigma_0(r, t) = \left[\Gamma_2 k \left(\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{G_1 k}{G_2 T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_{kr}}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] \frac{1}{b^2} + \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}.$$

Szczegółowy opis sposobu uzyskania powyższego rozwiązania zawiera praca [12].

4.2. Rozwiązanie w obszarze uplastycznionym

W obszarze uplastycznionym

$$a < r < \rho(t),$$

układ równań zagadnienia tworzą następujące równania:

1. Równanie równowagi (3.2) z warunkiem brzegowym

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = -p_0 H(t).$$

Na granicy stref powinien być spełniony warunek ciągłości składowej promieniowej wektora przemieszczenia:

$$u^l(r, t)|_{r=\rho(t)} = u^p(r, t)|_{r=\rho(t)},$$

gdzie $u^l(r, t)$ i $u^p(r, t)$ oznaczają składową promieniową wektora przemieszczenia odpowiednio w obszarze nieuplastycznionym i uplastycznionym. Podobnie jak poprzednio w chwili $t=t_{kr}$ powinien być spełniony warunek (4.4).

2. Warunek nieściśliwości (4.5).

3. Związki fizyczne.

Ze wzorów (2.1), (2.2) i (2.3) dla ciała M/V oraz przyjętych założeń (płaski stan odkształcenia i nieściśliwość ośrodka) wynika, że w obszarze tym związki fizyczne ciała M/V sprowadzają się do postaci takiej samej jak dla przypadku jednowymiarowego.

Na podstawie (2.2) i (2.3) otrzymuje się następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\dot{s}_z^M}{2G_1} + \frac{s_z^M}{2\eta} = \dot{e}_z.$$

Rozwiązanie powyższego równania i wykorzystanie (2.1) prowadzi do wzoru

$$s_z^V = s_z - 2G_1 e^{-\frac{t}{T}} \int_0^t \dot{\epsilon}_z \cdot e^{\frac{\tau}{T}} d\tau, \quad \text{gdzie } t > t_{kr}.$$

Na podstawie założenia płaskiego stanu odkształcenia ($\epsilon_z = 0$ i $e_z = 0$) i nieściśliwości ośrodka przed i po uplastycznieniu, z powyższej zależności wynika, że $s_z^V = 0$, $s_r^V = -s_\phi^V$, a związki fizyczne ciała M/V sprowadzają się do postaci takiej samej jak dla stanu jednowymiarowego (por. np. [2]):

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\dot{s}_r}{2G_1} + \frac{s_r - k}{2\eta}.$$

Rozwiązanie zagadnienia w tym obszarze, uzyskane w analogiczny sposób do zastosowanego w punkcie 4.1, ma postać

$$\begin{aligned} u(r, t) &= \frac{k\rho^2(t)}{2G_2 r}, \\ \sigma_r(r, t) &= \frac{G_1 k}{G_2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left[\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_{kr}}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] + \\ &\quad + \left(1 - e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) \left(-p_0 + 2k \ln \frac{r}{a} \right) - \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}, \\ \sigma_\phi(r, t) &= \frac{G_1 k}{G_2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) \left[\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_{kr}}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] + \\ &\quad + \left(1 - e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) \left(-p_0 + 2k + 2k \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}, \\ \sigma_o(r, t) &= \frac{G_1 k}{G_2} \left[\rho^2(t) - a^2 e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} - \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \int_{t_{kr}}^t \rho^2 e^{\frac{\tau}{T}} d\tau \right] \frac{1}{a^2} + \\ &\quad + \left(1 - e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) \left(-p_0 + k + 2k \ln \frac{r}{a} \right) + \frac{p_0 a^2}{b^2 - a^2} e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

4.3. Rozszerzanie się obszaru uplastycznego

Każdej chwili $t > t_{kr}$ odpowiada określony promień uplastycznienia rury. Zależność tego promienia od czasu wynika z ciągłości składowej promieniowej tensora naprężenia na granicy obszarów:

$$\sigma_r^i(r, t)_{r=\rho(t)} = \sigma_r^p(r, t)_{r=\rho(t)},$$

gdzie σ_r^i i σ_r^p oznaczają składowe promieniowe tensora naprężenia odpowiednio w obszarze nieuplastycznym i uplastycznym. Z tego warunku wynika równa-

nie całkowite, które po obustronnym różniczkowaniu względem czasu sprowadza się do następującego równania różniczkowego:

$$(4.13) \quad \dot{\rho} \left[\frac{G_1 k}{G_2} \rho \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{k}{b^2} \rho - k \frac{a^2}{\rho^3} e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} - \frac{k}{\rho} \left(1 - e^{-\frac{t-t_{kr}}{T}} \right) \right] = \\ = \frac{k}{2T} - \frac{k}{2T} \frac{\rho^2}{b^2} - \frac{p_0}{2T} + \frac{k}{T} \cdot \ln \frac{\rho}{a}.$$

Równanie (4.13) jest nieliniowym równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu o zmiennych współczynnikach. Ponieważ spełnia ono założenia twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania równania różniczkowego zwyczajnego [11], do jego rozwiązywania można z powodzeniem stosować metody przybliżone.

W wielu zagadnieniach praktycznych, w których wystarcza znajomość końcowego zasięgu strefy uplastycznienia, promień obszaru uplastycznionego można określić z następującego równania przestępnego:

$$(4.14) \quad \frac{p_0}{k} - 1 + \frac{\rho^2}{b^2} - 2 \ln \frac{\rho}{a} = 0.$$

Równanie (4.14) wynika z (4.13), gdy $t \rightarrow \infty$. Podstawiając w równaniu (4.14) $\rho = b$ otrzymuje się ciśnienie

$$p_0 = 2k \ln \frac{b}{a},$$

przy którym po upływie nieskończenie długiego czasu materiał rury w całym jej przekroju uplastyczni się.

W warunkach rozważanego zagadnienia rury grubościennej przedstawiony we wstępie pracy inżynierski sposób określania zasięgu strefy uplastycznienia sprowadza się do wykorzystania wzorów (3.7) i (3.8) po podstawieniu $r = \rho$. Czas, po którym promień strefy uplastycznienia osiągnie wartość $\rho(t)$, wyznaczano ze wzoru:

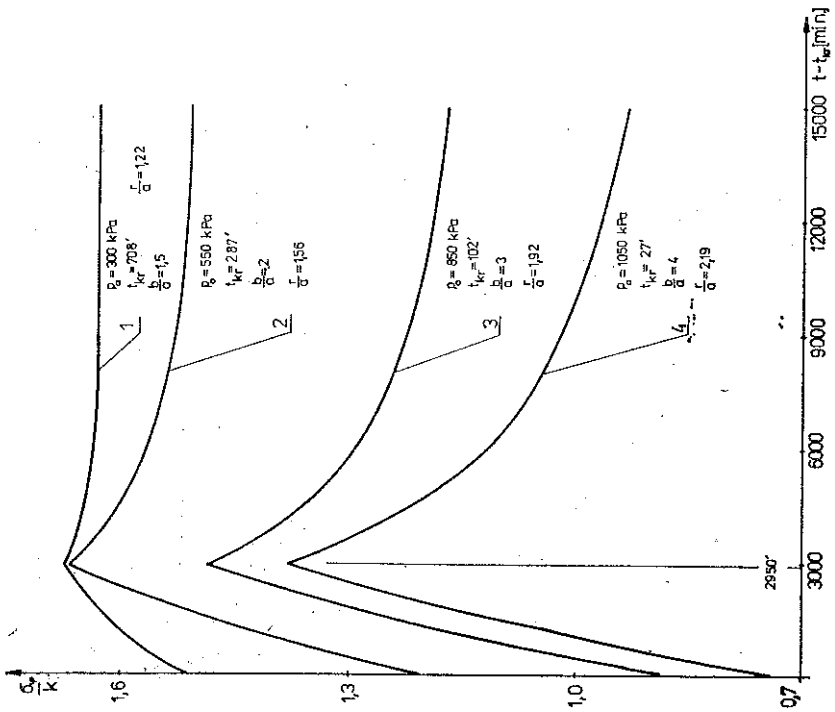
$$(4.15) \quad t = -T \ln \left\{ \Gamma_1 \left[1 - \frac{k(b^2 - a^2)\rho^2}{p_0 a^2 b^2} \right] \right\}.$$

Na podstawie (4.15) ciśnienie wewnętrzne, przy którym po nieskończeniu długim czasie uplastycznienie nastąpi w całym przekroju rury, wynosi

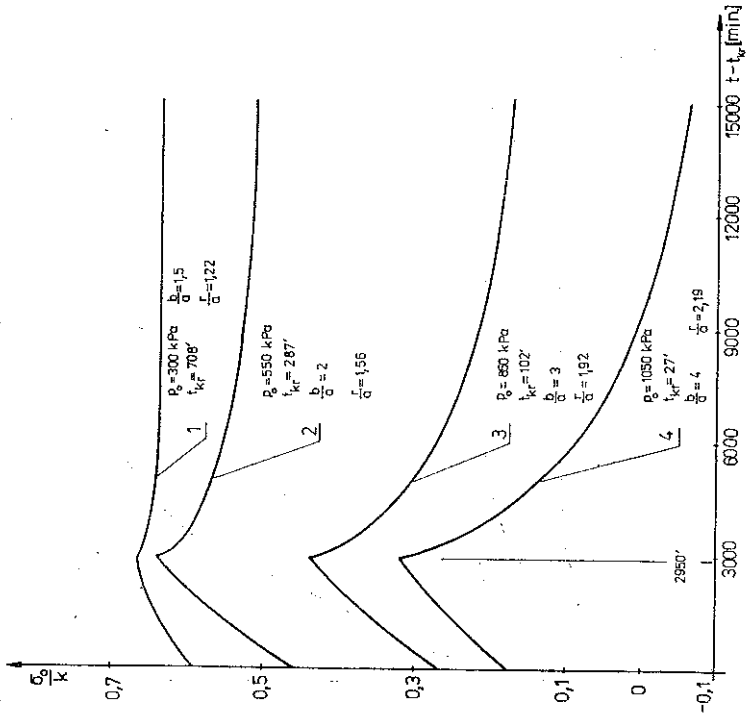
$$p_0 = k \frac{b^2 - a^2}{a^2}.$$

5. PRZYKŁAD LICZBOWY

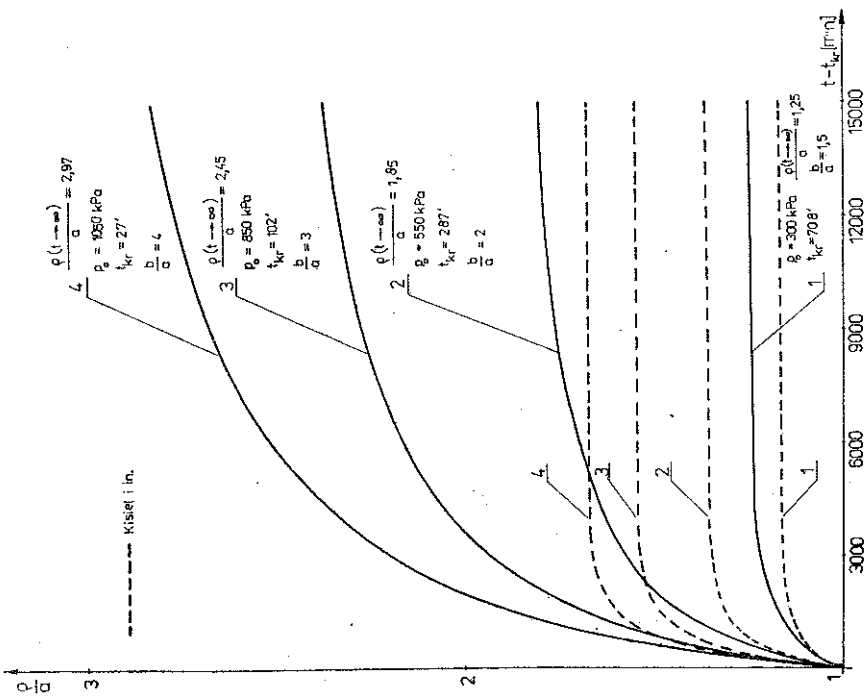
Przedstawimy wyniki liczbowe ilustrujące rozwiązanie zagadnienia uzyskane poprzednio. Do obliczeń przyjęto następujące parametry modelu: $G_1 = 40$ MPa, $G_2 = 20$ MPa $\eta = 600$ GN/m², $k = 400$ kPa. Obliczenia przeprowadzono dla kilku



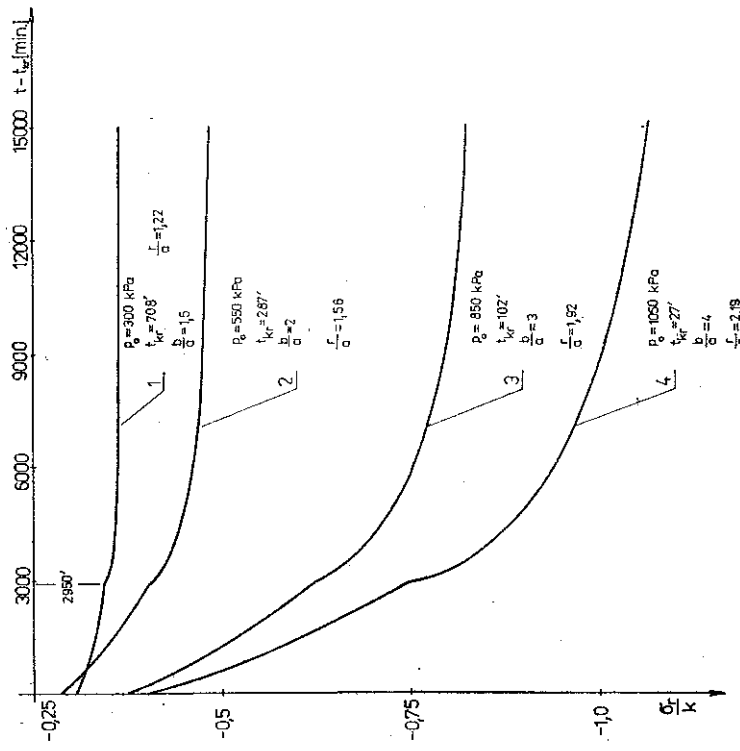
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 2



Rys. 3

wariantów grubości rury. Przyjęto następujące dane: $b/a=1,5, 2, 3, \text{ i } 4$. Dla poszczególnych wariantów grubości rury przyjęto odpowiednio wartości ciśnienia wewnętrznego 300 kPa, 550 kPa, 850 kPa i 1050 kPa. Ciśnienia dobrano tak, że uplastycznienie na wewnętrznej powierzchni rury nastąpi po upływie pewnego skończonego okresu czasu, a całkowite jej uplastycznienie nie nastąpi nawet po nieskończeniu długim czasie.

Zasięg strefy uplastycznienia materiału rury w zależności od czasu przedstawiono na rys. 2. Linia ciągłą na tym rysunku naniesiono wyniki numerycznego rozwiązania równania (4.13) metodą Runge'go-Kutty czwartego rzędu [9]. Przybliżony błąd bezwzględny [9], z jakim określono promień uplastycznienia rury, jest rzędu 10^{-5} . Dla porównania, krzywe narysowane linią przerywaną oznaczają wartości promienia uplastycznienia określone stosowaną dotychczas metodą. Na rysunkach 3, 4 i 5 przedstawiono zależność składowych tensora naprężenia odpowiednio σ_r , σ_ϕ i σ_θ od czasu. Wartości tych funkcji określono na podstawie odpowiednich wzorów (4.9), (4.10), (4.11) i (4.12).

Całkę występującą w tych wzorach obliczano numerycznie metodą trapezów. Na rysunkach tych zaznaczono wartości r/a , dla których określono zmienność funkcji σ_r , σ_ϕ i σ_θ w zależności od czasu. Wartości r/a dla poszczególnych wariantów grubości rury dobrano tak, że po upływie czasu odpowiednio $t_{kr}+2950$ min. od chwili przyłożenia obciążenia promień strefy uplastycznienia osiągnie wartość $\rho(t_{kr}+2950')=r$. Dane dotyczące rozkładu składowych tensora naprężenia i składowej promieniowej dewiatora odkształcenia w przekroju rury zawiera praca [12].

6. UWAGI KOŃCOWE

W rozwiązaniem zagadnieniu, wobec przyjętych założeń, związki fizyczne ciała M/V po uplastycznieniu zredukowały się do związku fizycznego tego ciała dla przypadku jednowymiarowego. Umożliwiło to ocenę przybliżenia przedstawionej w punkcie 1 procedury określenia zasięgu strefy uplastycznienia ośrodka M/V . Na podstawie analizy wyników liczbowych przedstawionych na rys. 2 można wnioskować, iż ten sposób postępowania z inżynierskiego punktu widzenia wpływa ujemnie na zapas bezpieczeństwa i nie powinien być stosowany.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Г. Дѣч, *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования*, Наука, Москва 1971.
2. A. DRESCHER, *Analiza pewnego modelu ciała sprężysto-lepko-plastycznego*, Rozpr. Inż., 15, 4, 713-729, 1967.
3. Y. C. FUNG, *Podstawy mechaniki ciała stałego*, PWN, Warszawa 1969.
4. I. KISIEL, *Drgania wymuszone tarczy na pewnym podłożu reologicznym*, Księga Jubileuszowa prof. dra inż. W. Wierzbickiego, PAN, Warszawa 1959.
5. I. KISIEL, S. DMITRUK, B. LYSIK, *Zarys reologii gruntów. Nośność i stateczność gruntów*, t. II, Arkady, Warszawa 1966.

6. I. KISIEL, *Możliwości stosowania modelu M/V w praktyce inżynierskiej*, II Sesja Naukowa Wydziału Bud. Łąd. Politechniki Wrocławskiej, PWN, Wrocław 1963.
7. I. KISIEL, *Działanie obciążenia na grunt o modelu M/V . Kilka praktycznie ważnych przypadków zadania płaskiego*, Arch. Hydrot., 11, 4, 457-480, 1964.
8. I. KISIEL, *Development of plastic zones around a hole in a half-plane*, Proc. 4th Conf. on Soil Mechanics, 437-444, Budapest 1971.
9. Д. Мак-Кракен, У. Дори, *Численные методы и программирование на ФОРТРАНЕ*, Мир, Москва 1977.
10. W. OLSZAK, P. PERZYNA, A. SAWCZUK red, Z. MARCINIAK, Z. MRÓZ, J. RYCHLEWSKI, W. SZCZEPIŃSKI, W. URBANOWSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa 1965.
11. Д. С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва 1970.
12. M. STACHOŃ, *Strefa upłynnienia ciała M/V w rurze grubościennej*, Rozprawa doktorska, Komunikat I-10 PWr K-291/78, Wrocław 1978.

Резюме

ЗОНА ПЛАСТИЧНОСТИ ТЕЛА M/V В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ

Рассмотрена задача несжимаемой, бесконечно длинной, толстостенной трубы, подвергнутой действию внутреннего давления. Для описания механических свойств материала трубы принята модель M/V . Решена граничная задача в обеих областях частично пластической трубы. Решения учитывают изменение во времени границы между этими областями. Получено уравнение дающее возможность определить ее в произвольный момент времени.

SUMMARY

PLASTIC ZONE OF THE M/V BODY IN A THICK-WALLED TUBE

The paper presents the problem of an incompressible, infinitely long thick-walled tube subjected to internal pressure. The mechanical properties of the material are assumed according to the M/V model. The boundary value problem is solved in the both regions of the partly plasticized tube. The solutions take into account the variation of the interface in time. The equation derived enables the determination of its position at every instant of time.

POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT GEOTECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 29 marca 1980 r.