

## PŁYTY W UJĘCIU MECHANIKI CIAŁ Z WIĘZAMI

MARIA M A R K S (WARSZAWA)

W niniejszej pracy sformułowano zagadnienie analizy płyt sprężystych w ujęciu mechaniki ciał z więzami. Wyprowadzono we współrzędnych krzywoliniowych podstawowy układ równań pozwalający na otrzymanie rozwiązania przy postulowanej funkcji deformacji. Sformułowano kryterium oceny dokładności rozwiązań na podstawie wielkości sił reakcyjnych, które określają rozmiary niespełnienia równań ruchu i warunków brzegowych mechaniki ośrodków ciągłych w jej klasycznym sformułowaniu. Rozważania zilustrowano przykładem rozwiązania zagadnienia płyty kołowej przy dwóch szczególnych przypadkach funkcji przemieszczeń.

### WSTĘP

Mechanika ośrodka ciągłego z więzami, która stanowi ogólniejsze sformułowanie mechaniki continuum, została przedstawiona przez WOŹNIAKA w pracach [1 oraz 9–15] jako odpowiednik mechaniki układów punktów materialnych z więzami. Więzy mają wyrażać właściwości fizyczne ciał, np. nieściśliwość, nieodkształcalność w pewnym kierunku lub na pewnej powierzchni albo hipotezy narzucone na ruch ciał lub stan naprężenia w celu uproszczenia matematycznego opisu problemu.

W rozwiązaniach takich zagadnień występują na ogół siły reakcyjne objętościowe i powierzchniowe, które określają odpowiednio niespełnienie równań ruchu i warunków brzegowych mechaniki ośrodków ciągłych w jej klasycznym sformułowaniu.

Opierając się na pracach WOŹNIAKA [1, 9, 10 i 12] przedstawiono zagadnienie płyt w ujęciu mechaniki ciał z więzami oraz wyprowadzono ze współrzędnych krzywoliniowych podstawowy układ równań pozwalający na otrzymanie rozwiązania przy postulowanej funkcji deformacji. Następnie wyprowadzono układ równań, przyjmując funkcję deformacji w postaci szeregu potęgowego zmiennej «pionowej».

Sformułowano kryterium oceny poprawności «rozwiązań przybliżonych» na podstawie stosunku średnich i maksymalnych składowych sił reakcyjnych do maksymalnego wyteżenia w płycie. Jako zastosowanie wprowadzonych rozważań rozwiązano zagadnienie płyty kołowej przy dwóch szczególnych przypadkach funkcji przemieszczeń. Przyjmując funkcję przemieszczeń wg uogólnionej teorii Reissnera otrzymano «rozwiązanie przybliżone» natomiast w wyniku przyjęcia innej postaci funkcji przemieszczeń otrzymano «rozwiązanie ściśle». Przez «rozwiązanie przybliżone» rozumiane jest w tej pracy rozwiązanie problemu mechaniki continuum z więzami, w którym występują siły reakcyjne. Natomiast «rozwiązaniem ścisłym» nazwane jest takie rozwiązanie, w którym wszystkie siły reakcyjne są równe zeru,

czyli rozwiązanie zgodne z rozwiązaniem klasycznej mechaniki continuum. Określenie «rozwiązanie przybliżone» jest określeniem umownym, ponieważ każde takie rozwiązanie jest rozwiązaniem ścisłym mechaniki continuum ciał z więzami wobec spełnienia wszystkich równań i warunków.

Z «rozwiązaniem przybliżonym» i «dokładnym» łączy się pojęcie «błędu». «Błędami» w naprężeniach i przemieszczeniach nazwane są umownie różnice między składowymi naprężeń i przemieszczeń wyznaczonymi z rozwiązania mechaniki continuum z więzami i klasycznej mechaniki continuum.

Zagadnienie oceny dokładności rozwiązań w teorii płyt i powłok bez wprowadzania pojęcia sił reakcyjnych rozpatrywane było w szeregu prac, między innymi [3, 4 i 5].

F. JOHN przedstawił propozycję oszacowania rozwiązań przybliżonych równań nieliniowej teorii powłok [3]. F. John wykazał, że błąd, z jakim rozwiązanie trójwymiarowej teorii spełnia te równania, pozwala określić obszar, w którym rozwiązanie zagadnienia trójwymiarowego może być aproksymowane przez rozwiązanie równań dwuwymiarowych.

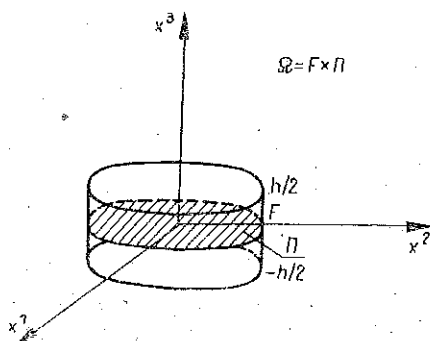
Interesującą koncepcję oszacowania zmodyfikowanego przemieszczenia Kirchhoffa sformułował KOITER w pracy [5]. Postać tego przemieszczenia wynika z klasycznej liniowej teorii powłok i szczególnego warunku odkształcalności w kierunku pionowym. Oszacowanie błędu, czyli różnicy między przemieszczeniem uzyskanym z rozwiązania dokładnego trójwymiarowej teorii sprężystości a zmodyfikowanym przemieszczeniem Kirchhoffa, otrzymano przez porównanie energii sprężystych związanych z tymi rozwiązaniami. Koiter wykazał, że znajomość jedynie rozwiązania klasycznej teorii powłok umożliwia ściśle oszacowanie błędu.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przedmiotem rozważań są płyty sprężyste w ujęciu mechaniki ciał z więzami. Rozpatrywane są tu więzy typu ograniczeń narzuconych na funkcje deformacji.

Rozpatrywane ciało w konfiguracji odniesienia zajmuje obszar  $\Omega$ , który można przedstawić w postaci  $\Omega = F \times \pi$ , gdzie  $\pi$  jest powierzchnią środkową, a  $F$  odcinkiem

$\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$  (rys. 1).



Rys. 1

Funkcja  $\chi^k = \chi^k(\mathbf{X}, t)$ ,  $k=1, 2, 3$  jest funkcją deformacji ciała, przy czym  $\mathbf{X} = (X^K, X^3)$ ,  $(X^K) \in \pi$ ,  $K=1, 2$ ,  $X^3 \in F$  są współrzędnymi materialnymi, a  $t \in R$  jest współrzędną czasową. W ogólnym przypadku układ współrzędnych  $X^K$  jest dowolny.

Założono także, że funkcje deformacji mają następującą postać:

$$(2.1) \quad \chi^m(X^K, X^3, t) = \varphi^m(X^K, X^3, t, q^\mu(X^K, t)),$$

przy czym  $\varphi^m$  są znanymi funkcjami różniczkowalnymi, a funkcje  $q^\mu$ ,  $\mu=1, \dots, n$ , zwane współrzędnymi uogólnionymi, są poszukiwanymi funkcjami różniczkowalnymi wyznaczającymi ruch całego ciała.

Funkcje  $q^\mu$  mogą być niezależne lub związane dodatkowo zależnościami typu

$$\alpha_\nu(X^K, t, q^\mu(X^K, t), q_{\nu K}^\mu(X^K, t)) = 0, \quad \nu=1, 2, \dots, \alpha.$$

W płytach zależnością taką może być np. założenie, że włókna materialne normalne do powierzchni środkowej w konfiguracji odniesienia pozostają stałe normalne.

W pracy tej rozpatrywany jest przypadek, gdy funkcje  $q^\mu$  są niezależne.

Podstawowy układ równań na poszukiwane funkcje  $q^\mu$  wynika z następującego warunku idealności więzów: suma prac wszystkich sił reakcyjnych na wirtualnych przemieszczeniach  $\delta\chi$  jest równa zeru:

$$\oint_{\partial\Omega} s_m \delta\chi^m dS + \int_{\Omega} r_m \delta\chi^m dV = 0.$$

Zgodnie z (2.1)

$$\delta\chi^m = \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} \delta q^\mu,$$

gdzie  $r_m$  oznaczają siły reakcyjne objętościowe, a  $s_m$  siły reakcyjne powierzchniowe. Warunek idealności więzów po uwzględnieniu postulowanych równań ruchu i warunków brzegowych ciał z więzami jest równoważny zasadzie prac wirtualnych. Tym samym zasada prac wirtualnych może być podstawowym postulatem przyjętym w celu uzyskania układu równań, pozwalającego na wyznaczenie funkcji  $q^\mu$  [1].

Uwzględniając fakt, że  $\Omega = F \times \pi$ ,  $\partial\Omega = (\partial F \times \pi) \cup (F \times \partial\pi)$  i  $dV = dF d\pi$ , warunkowi idealności więzów możemy nadać następującą postać:

$$\int_{\pi} \left[ \int_F r_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} dF + \int_{\partial F} s_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} d(\partial F) \right] \delta q^\mu d\pi + \int_{\partial\pi} \int_F s_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} \delta q^\mu dF d(\partial\pi) = 0.$$

Powyższy warunek powinien być spełniony przez dowolną różniczkowalną funkcję  $\delta q^\mu$  w  $\pi \times R$ . Wobec tego

$$(2.2) \quad \int_F r_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} dF + \int_{\partial F} s_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} d(\partial F) = 0 \quad \text{dla} \quad (X^K) \in \pi, \quad t \in R$$

oraz

$$(2.3) \quad \int_F s_m \frac{\partial\varphi^m}{\partial q^\mu} dF = 0 \quad \text{dla} \quad (X^K) \in \partial\pi, \quad t \in R.$$

Po wyznaczeniu sił reakcyjnych z równań ruchu i warunków brzegowych

$$(2.4) \quad \begin{aligned} r_m &= \rho \ddot{\varphi}_m - (\rho b_m + T_{m|K}^K + T_{m,3}^3) & \text{w} & \quad \Omega = F \times \pi, \quad t \in R; \\ s_m &= T_m^K n_K - p_m & \text{dla} & \quad F \times \partial\pi, \quad t \in R; \\ s_m &= T_m^3 n_3 - p_m & \text{dla} & \quad \partial F \times \pi, \quad t \in R \end{aligned}$$

po podstawieniu (2.4) do (2.2) i po zastosowaniu twierdzenia o dywergencji otrzymujemy następujący związek, który powinien być spełniony, gdy  $(X^K) \in \pi$ ,  $t \in R$ :

$$(2.5) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( T_m^K \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} \right)_{|K} dX^3 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_m^K \left( \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} \right)_{|K} dX^3 - \\ - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_m^3 \left( \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} \right)_{,3} dX^3 + p_m \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} \Big|_{X^3 = \frac{h}{2}} - p_m \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} \Big|_{X^3 = -\frac{h}{2}} + \\ + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} dX^3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \ddot{\varphi}_m \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} dX^3,$$

gdzie  $T_m^i$  jest tensorem naprężenia Pioli-Kirchhoffa.

Jeśli  $(X^K) \in \partial\pi$ ,  $t \in R$ , to powinny być spełnione zgodnie z (2.3) następujące warunki brzegowe:

$$(2.6) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_m^K \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} n_K dX^3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m \frac{\partial \varphi^m}{\partial q^\mu} dX^3,$$

gdzie  $\mathbf{n}$  oznacza wektor zewnętrzny normalny do  $\partial\pi$ .

Równania (2.5) i (2.6) wraz z równaniem konstytutywnym stanowią podstawowy układ równań płyt, traktowanych jako ciała z więzami. Równania te w krzywoliniowym układzie współrzędnych  $X^K$  zostały otrzymane podobnie jak w pracach WOŹNIAKA [9 i 10] w układzie współrzędnych prostokątnych. Przecinek oznacza tu pochodną cząstkową, a kreska pionowa pochodną kowariantną:

$$\Gamma_{m,3}^3 = \frac{\partial T_m^3}{\partial X^3},$$

$$T_{m|K}^K = \frac{\partial T_m^K}{\partial X^K} + \Gamma_{\sigma K}^K T_m^\sigma - \Gamma_{mK}^\sigma T_\sigma^K$$

oraz  $\Gamma_{ij}^m$  symbol Christoffela.

W dalszych rozważaniach przyjęto funkcję deformacji  $\chi$  w następującej postaci:

$$(2.7) \quad \chi^m(X^K, X^3, t) = \sum_{\alpha=0}^t \psi_{(\alpha)}^m(X^K, t) (X^3)^\alpha.$$

Przyjmując jako współrzędne uogólnione  $q^m$  funkcje  $\psi_{(\alpha)}^m$ ,  $\alpha=0, \dots, l$ , otrzymano z równań (2.5) następujący układ  $l+1$  równań ruchu:

$$(2.8) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_m^K)_{|K} dX^3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m dX^3 + p_m^{(+)} - p_m^{(-)} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \psi_{(0)}^m}, \quad \alpha=0;$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T_m^K (X^3)^\alpha)_{|K} dX^3 - \alpha \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_m^3 (X^3)^{\alpha-1} dX^3 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_m (X^3)^\alpha dX^3 +$$

$$+ p_m^{(+)} \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha - p_m^{(-)} \left(-\frac{h}{2}\right)^\alpha = \frac{d}{dt} \frac{\partial x}{\partial \psi_{(\alpha)}^m}, \quad \alpha=1, \dots, l,$$

gdzie

$$x = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=0}^l \sum_{\beta=0}^l \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho (X^3)^\alpha (X^3)^\beta dX^3 \right) \psi_{(\alpha)}^k \psi_{k(\beta)},$$

$$p_m^{(+)} = p_m^{(+)}(X^K, t), \quad \text{jeśli} \quad X^3 = \frac{h}{2},$$

$$p_m^{(-)} = p_m^{(-)}(X^K, t), \quad \text{jeśli} \quad X^3 = -\frac{h}{2}.$$

Warunki brzegowe (2.6) przyjmują następującą postać:

$$(2.9) \quad \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T_m^K (X^3)^\alpha dX^3 \right) n_k = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_m (X^3)^\alpha dX^3, \quad \alpha=0, 1, \dots, l.$$

Jeśli przy  $\alpha=\alpha_1$  funkcja  $\psi_{(\alpha_1)}^m=0$ , to nie występuje ona w równaniu (2.7) i  $\partial \varphi^m / \partial \psi_{(\alpha_1)}^m=0$ ; wobec tego zgodnie z (2.5) i (2.6) równania ruchu (2.8) i warunki brzegowe (2.9) przy  $\alpha=\alpha_1$  znikają (są spełnione tożsamościowo).

W przypadku szczególnym, gdy  $l=1$ , uzyskujemy funkcję

$$(2.10) \quad \chi(X^K, X^3, t) = \psi_{(0)}(X^K, t) + \psi_{(1)}(X^K, t) X^3.$$

Równania więzów postaci (2.10) są przedstawione w pracach [1, 9 i 12]. Teoria płyt oparta na więzach typu (2.10) jest nazwana uogólnioną teorią Reissnera.

W dalszych rozważaniach funkcję deformacji wyrażono przez wektor przemieszczenia:

$$\chi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t),$$

gdzie  $\mathbf{X}=(X^K, X^3)$  jest położeniem wektora cząsteczki ciała w konfiguracji odniesienia, a  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  jest przemieszczeniem z konfiguracji odniesienia.

Wobec założenia, że  $\mathbf{u}$  jest przemieszczeniem nieskończenie małym, tensor naprężenia Pioli-Kirchhoffa w konfiguracji aktualnej pokrywa się z tensorem naprężenia Cauchy'ego.

Przyjęcie funkcji deformacji płyt w postaci (2.7) na tyle upraszcza matematyczny opis zagadnienia, że możliwe jest uzyskanie rozwiązania. Znając funkcję deformacji można wyznaczyć tensor naprężenia oraz siły reakcyjne (2.4), które są efektem wprowadzonych więzów będących więzami urojonymi. Otrzymane siły reakcyjne można interpretować jako układ «fikcyjnych» obciążeń, które należy dodatkowo przyłożyć, aby otrzymać rozwiązanie równań teorii sprężystości.

### 3. KRYTERIUM OCENY DOKŁADNOŚCI ROZWIĄZAŃ

W celu oszacowania otrzymanego rozwiązania w ramach teorii z więzami należy wprowadzić normę w przestrzeni sił reakcyjnych. Norma ta może być porównywana z odpowiednią normą w przestrzeni sił masowych i powierzchniowych:

$$(3.1) \quad \|r, s\| \leq \varepsilon \|b, p\|.$$

W przypadku istnienia więzów brzegowych wywołujących reakcje  $\tilde{s}$ , warunek (3.1) powinien być zmodyfikowany w sposób następujący:

$$(3.2) \quad \|r, s - \tilde{s}\| \leq \varepsilon \|b, p + \tilde{s}\|.$$

Na podstawie tej koncepcji sformułowano różne kryteria oceny dokładności rozwiązań przybliżonych. Na przykład w pracach [2 i 8] porównano największe wartości sił reakcyjnych z największymi obciążeniami.

Na podstawie takich kryteriów, zastosowanych do płyt o realnych wymiarach, stałych materiałowych i obciążeniach, należałoby ocenić negatywnie nie tylko techniczną teorię płyt, ale również uogólnioną teorię Reissnera. Ponadto otrzymujemy wniosek, że im mniejszy jest stosunek wysokości płyt do pozostałych ich wymiarów, tym teorie przybliżone gorzej opisują stan deformacji płyt.

Rozpatrzmy więc odmienny sposób oceny dokładności rozwiązań uzyskiwanych za pomocą przybliżonych teorii płyt, który nie prowadzi do takich wniosków.

Stopień dokładności rozwiązania uzyskanego za pomocą teorii z więzami określony jest przez średnie i maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń w następujący sposób:

$$(3.3) \quad \eta_{ij} = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega},$$

$$\theta_i = \frac{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}| d\Omega}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega}.$$

$$(3.4) \quad \kappa_{ij} = \frac{\max_{\mathbf{X} \in \Omega} |\sigma_{ij}^{(d)} - \sigma_{ij}^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\sigma_{ij}^{(d)}| d\Omega},$$

$$p_i = \frac{\max_{\mathbf{X} \in \Omega} |u_i^{(d)} - u_i^{(p)}|}{\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |u_i^{(d)}| d\Omega},$$

gdzie  $\sigma_{ij}^{(d)}$  oznacza składową naprężenia wyznaczoną w sposób ścisły,  $\sigma_{ij}^{(p)}$  składową naprężenia wyznaczoną w sposób przybliżony,  $u_i^{(d)}$  składową przemieszczenia wyznaczoną w sposób ścisły oraz  $u_i^{(p)}$  składową przemieszczenia wyznaczoną w sposób przybliżony.

Do kryterium oceny dokładności przyjęto cztery następujące wielkości:

$$(3.5) \quad \gamma_{\alpha} = \frac{g_{\alpha}}{\sigma_0}, \quad \delta_{\alpha} = \frac{f_{\alpha}}{\sigma_0}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Wielkości  $g_{\alpha}$  i  $f_{\alpha}$  charakteryzujące średnie i maksymalne wartości poziomych i pionowych składowych sił reakcyjnych wyznaczone są na podstawie wzorów:

$$(3.6) \quad g_1 = \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} dS_b,$$

$$g_2 = \frac{\beta_1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_3| d\Omega + \frac{\beta_2}{|\pi|} \int_{\pi} |s_3| d\pi + \frac{\beta_3}{|S_b|} \int_{S_b} |s_3| dS_b,$$

$$f_1 = \beta_1 \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} \sqrt{r_1^2 + r_2^2} + \beta_2 \sup_{\mathbf{X} \in \pi \times \partial F} \sqrt{s_1^2 + s_2^2} + \beta_3 \sup_{\mathbf{X} \in F \times \partial \pi} \sqrt{s_1^2 + s_2^2},$$

$$f_2 = \beta_1 \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} |r_3| + \beta_2 \sup_{\mathbf{X} \in \pi \times \partial F} |s_3| + \beta_3 \sup_{\mathbf{X} \in F \times \partial \pi} |s_3|,$$

przy czym  $s_b = \partial \pi \times F$ ,  $|\Omega|$ ,  $|\pi|$ ,  $|S_b|$  oznaczają miary odpowiednich obszarów oraz  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  stałe dodatnie.

Poszczególne wyrazy we wzorach (3.6) powinny być odniesione do tej samej powierzchni. W teorii płyt dogodnie jest odnieść wielkości  $g_{\alpha}$ ,  $f_{\alpha}$  do powierzchni środkowej, co uzyskujemy przyjmując  $\beta_1 = h$ ,  $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = |S_b|/|\pi|$ . Natomiast  $\sigma_0$  określa maksymalne wyteżenie płyty. W zależności od materiału, z jakiego płyta jest wykonana, wyteżenie należy określać za pomocą odpowiedniej hipotezy wyteżeniowej [7]. W najprostszym przypadku można przyjmować, że wyteżenie jest określone przez maksymalną składową stanu naprężenia. Wielkości  $f_{\alpha}$  i  $g_{\alpha}$  można, np. porównać z największą składową naprężenia  $\sigma_{11}$  w środku rozpiętości płyty prostokątnej lub  $\sigma_{rr}$  w środku płyty kołowej. Składowe te obciążone są zwykle małymi błędami, nawet jeżeli są wyznaczone za pomocą najprostszej teorii.

Aby można powyższe kryterium stosować do określenia dokładności rozwiązań przybliżonych bez znajomości ścisłych, niezbędne jest «wyskalowanie» kryterium, czyli określenie funkcji

$$(3.7) \quad \eta_{ij} = F_{ij}(\gamma_\alpha), \quad \theta_i = G_i(\gamma_\alpha)$$

na podstawie przykładów rozwiązanych przy założeniu różnych typów więzów i rozwiązań ścisłych.

Na podstawie funkcji (3.7) dysponując wyznaczonymi parametrami  $\gamma_\alpha$ , można ocenić średnie błędy składowych naprężenia i przemieszczenia w innych rozwiązaniach przybliżonych. Porównanie  $\delta_\alpha$  i  $\gamma_\alpha$  pozwala natomiast na ocenę największych błędów składowych stanu naprężenia i przemieszczenia.

#### 4. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁYTY KOŁOWEJ WG UOGÓLnionej TEORII REISSNERA

Funkcję przemieszczeń niezależną od czasu w układzie współrzędnych walcowych  $r, \theta, z$  przyjęto wg uogólnionej teorii Reissnera (2.7) przy  $l=1$  [6] w następującej postaci:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} u_r &= \psi_r(r, \theta) + d_r(r, \theta)z, \\ u_\theta &= \psi_\theta(r, \theta) + d_\theta(r, \theta)z, \\ u_z &= \psi_z(r, \theta) + d_z(r, \theta)z. \end{aligned}$$

Równania równowagi zgodnie z (2.8) przy  $l=1$  we współrzędnych fizycznych przyjmują następującą postać:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} \right) + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right] dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_r dz + p_r^{(+)} - p_r^{(-)} &= 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial (r \sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{r\theta} \right] dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho r b_\theta dz + r p_\theta^{(+)} - r p_\theta^{(-)} &= 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \sigma_{\theta z} \right) + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] dz + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_z dz + p_z^{(+)} - p_z^{(-)} &= 0, \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} \right) + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right] z dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz + \\ + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_r z dz + p_r^{(+)} \frac{h}{2} + p_r^{(-)} \frac{h}{2} &= 0, \end{aligned}$$



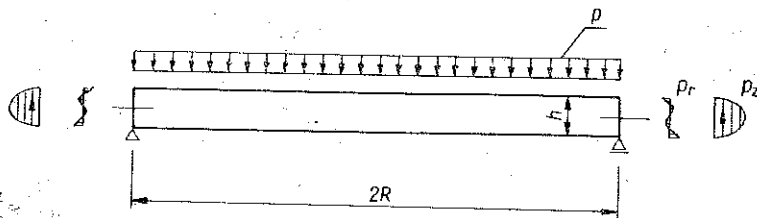
$$\begin{aligned}
 (4.2) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial(r\sigma_{r\theta})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + \sigma_{r\theta} \right] z dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r\sigma_{\theta z} dz + \\
 + \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho r b_{\theta} z dz + p_{\theta}^{(+)} r \frac{h}{2} + p_{\theta}^{(-)} r \frac{h}{2} = 0, \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \sigma_{\theta z} \right) + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] z dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} dz - \\
 - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho b_z z dz + p_z^{(+)} \frac{h}{2} + p_z^{(-)} \frac{h}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

Natomiast zgodnie z równaniami (2.9) przy  $l=1$  na brzegu o normalnej zewnętrznej  $\mathbf{n}=(1, 0, 0)$ ,  $r|_{\partial(\pi)}=R$  trzeba spełnić następujące warunki brzegowe:

$$\begin{aligned}
 (4.3) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_r dz, & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} z dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_r z dz, \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta} dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_{\theta} dz, & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r\theta} z dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_{\theta} z dz, \\
 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z dz, & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} z dz &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z z dz.
 \end{aligned}$$

Przyjęto, że na płytę działają następujące obciążenia (rys. 2): na powierzchni górnej  $z=h/2$  i dolnej  $z=-h/2$

$$(4.4) \quad p_r^{(+)}=p_r^{(-)}=p_{\theta}^{(+)}=p_{\theta}^{(-)}=p_z^{(-)}=0, \quad p_z^{(+)}=-p;$$



Rys. 2

na powierzchni bocznej  $r=R$

$$p_r = (2+\nu) p \frac{z}{h} \left( \frac{3}{20} - \frac{z^2}{h^2} \right),$$

$$p_\theta = 0,$$

$$p_z = \frac{3pR}{h} \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right)$$

oraz siły masowe  $\mathbf{b}=0$ .

Przy tak przyjętych obciążeniach w przypadku materiału sprężystego, izotropowego i jednorodnego równania (4.2) można sprowadzić do następujących równań zawierających funkcje  $\psi_r$ ,  $d_r$ ,  $\psi_z$  i  $d_z$

$$(4.5) \quad \begin{aligned} (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \psi_r \right) + \nu \frac{\partial d_z}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) - \frac{2(1+\nu)p}{Eh} &= 0, \\ \frac{(1-\nu)h^2}{6(1-2\nu)} \left( \frac{\partial^2 d_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial d_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} d_r \right) - \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) &= 0, \\ \frac{h^2}{24} \left( \frac{\partial^2 d_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial d_z}{\partial r} \right) - \frac{\nu}{1-2\nu} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \psi_r \right) - \frac{1-\nu}{1-2\nu} d_z - \frac{(1+\nu)p}{2E} &= 0. \end{aligned}$$

Powyższy układ równań można rozdzielić na dwa układy równań zawierające po dwie niewiadome. Po podstawieniu do równania (4.5)<sub>2</sub> pochodnej  $\partial \psi_z / \partial r$  wyznaczonej z (4.5)<sub>3</sub> uzyskujemy następujące równanie:

$$\frac{\partial^3 d_r}{\partial r^3} + \frac{2}{r} \frac{\partial^2 d_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial d_r}{\partial r} + \frac{1}{r^3} d_r = \frac{12(1+\nu)(1-2\nu)p}{(1-\nu)Eh^3}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja

$$d_r(r) = C_1 r + C_2 r \ln r + C_3 r^{-1} + \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)p}{4(1-\nu)Eh^3} r^3.$$

Funkcja  $u_r$  określona wzorem  $u_r = \psi_r + d_r$  z musi znikać przy  $r=0$ . Stąd wynika, że  $C_3=0$ . Wobec tego

$$(4.6) \quad \begin{aligned} d_r(r) &= C_1 r + C_2 r \ln r + \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)p}{4(1-\nu)h^3 E} r^3, \\ \psi_z(r) &= -\frac{1}{2} C_1 r^2 + \left( \frac{(1-\nu)h^2}{3(1-2\nu)} \ln r + \frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{2} r^2 \ln r \right) C_2 + \\ &\quad + \frac{(1+\nu)p}{2Eh} \left( 1 - \frac{3(1-2\nu)}{8(1-\nu)h^2} r^2 \right) r^2 + F. \end{aligned}$$

Funkcje  $\psi_r(r)$  i  $d_z(r)$  można wyznaczyć z układu równań (4.5)<sub>1</sub> i (4.5)<sub>4</sub>. Po scałkowaniu równania (4.5)<sub>1</sub> i wykorzystaniu zależności

$$(4.7) \quad \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} = -\frac{\nu}{1-\nu} d_z + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} A_1,$$

w równaniu (4.5)<sub>4</sub> uzyskano następujące równanie:

$$\frac{\partial^2 d_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial d_z}{\partial r} - \beta^2 d_z = \frac{24\nu(1+\nu)}{(1-\nu)Eh^2} A_1 + \frac{12(1+\nu)p}{Eh^2},$$

gdzie

$$\beta^2 = \frac{24}{(1-\nu)h^2}.$$

Jest to równanie Bessela, którego rozwiązanie ma następującą postać:

$$d_z = \frac{D_1}{\beta} I_0(\beta r) + \frac{D_2}{\beta} K_0(\beta r) - \frac{\nu(1+\nu)}{E} A_1 - \frac{(1-\nu^2)p}{2E}.$$

Symbole  $I_0(\beta r)$  i  $K_0(\beta r)$  oznaczają zmodyfikowane funkcje Bessela zerowego rzędu. Ponieważ przy  $r \rightarrow 0$   $K_0(\beta r) \rightarrow \infty$ , przeto przyjęto  $D_2 = 0$ . Znając postać funkcji  $d_z$  można z równania (4.7) wyznaczyć ogólnie funkcję  $\psi_r$ , która ma następującą postać:

$$\psi_r = \frac{A_2}{r} - \frac{\nu h^2}{24} D_1 I_1(\beta r) + \frac{(1-\nu^2)}{2E} A_1 r + \frac{\nu(1+\nu)p}{4E} r.$$

Ze względu na własność funkcji  $u_r$  trzeba przyjąć  $A_2 = 0$ . Znając funkcje  $\psi_r$ ,  $d_r$ ,  $\psi_z$  i  $d_z$  można wyznaczyć składowe tensora naprężenia:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\nu E h^2}{24(1+\nu)} \frac{1}{r} I_1(\beta r) D_1 + \frac{1+\nu}{2} A_1 - \frac{\nu p}{4} + \\ &\quad + \left\{ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [C_1 + (1-\nu + \ln r) C_2] + \frac{3(3-2\nu)p}{4(1-\nu)h^3} r^2 \right\} z, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{1}{\beta} \left[ I_0(\beta r) - \frac{1}{\beta r} I_1(\beta r) \right] D_1 + \frac{1+\nu}{2} A_1 - \frac{\nu p}{4} + \\ &\quad + \left\{ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [C_1 + (\nu + \ln r) C_2] + \frac{3(1+2\nu)p}{4(1-\nu)h^3} r^2 \right\} z, \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \frac{1}{\beta} I_0(\beta r) D_1 - \frac{p}{2} + \\ &\quad + \left\{ \frac{2\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ C_1 + \left( \frac{1}{2} + \ln r \right) C_2 \right] + \frac{3\nu p}{(1-\nu)h^3} r^2 \right\} z, \\ \sigma_{rz} &= \frac{p}{2h} r + \frac{(1-\nu)Eh^2}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{r} C_2 + \frac{E}{2(1+\nu)} D_1 I_1(\beta r) z, \\ \sigma_{r\theta} &= \sigma_{\theta z} = 0. \end{aligned}$$

Stałe  $C_1, C_2, D_1, A_1$  wyznaczone z następujących równań, wynikających z warunków brzegowych (4.3):

$$\begin{aligned} \frac{\nu E h^2}{24(1+\nu)} \frac{1}{R} I_1(\beta R) D_1 + \frac{1+\nu}{2} A_1 - \frac{\nu p}{4} &= 0, \\ \frac{(1-\nu) E h^3}{6(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{1}{R} C_2 &= 0, \\ \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [C_1 + (1-\nu + \ln R) C_2] + \frac{3(3-2\nu)p}{4(1-\nu)h^3} R^2 &= 0, \\ I_1(\beta R) D_1 &= 0. \end{aligned}$$

Z równań tych otrzymano

$$C_1 = -\frac{3(3-2\nu)(1+\nu)(1-2\nu)pR^2}{4(1-\nu)Eh^3}, \quad C_2 = 0, \quad D_1 = 0, \quad A_1 = \frac{\nu p}{2(1+\nu)}.$$

Po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych  $\rho = r/R$ ,  $\zeta = z/h$  i wykorzystaniu wyznaczonych stałych, składowe stanu przemieszczenia mają następującą postać:

$$u_r = \frac{p}{2E} R \rho \left\{ \nu - \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 [3-2\nu-\rho^2] \zeta \right\},$$

$$u_\theta = 0,$$

$$u_z = \frac{p}{2E} R \left\{ -(1+\nu) \frac{R}{h} (1-\rho^2) \left[ 1 + \frac{3(1-2\nu)}{8(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (5-4\nu-\rho^2) \right] - \frac{h}{R} \zeta \right\},$$

a składowe naprężenia (na podstawie (4.8))

$$\sigma_{rr} = -\frac{3p(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (1-\rho^2) \zeta,$$

$$\sigma_{\theta\theta} = -\frac{3p}{4(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 [3-2\nu-(1+2\nu)\rho^2] \zeta,$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{p}{2} - \frac{3\nu p}{1-\nu} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (3-2\nu-\rho^2) \zeta,$$

$$\sigma_{rz} = \frac{p}{2} \frac{R}{h} \rho,$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0.$$

Mając składowe stanu naprężenia ze wzoru (2.4)<sub>1</sub> można określić siły reakcyjne objętościowe

$$(4.9) \quad \begin{aligned} r_r &= -\frac{6p}{h} \frac{R}{h} \rho \zeta, \\ r_\theta &= 0, \\ r_z &= -\frac{p}{h} \left[ 1 - \frac{3\nu}{1-\nu} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \left( \frac{3-2\nu}{2} - \rho^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.4)<sub>2</sub> wyznaczono siły reakcyjne powierzchniowe działające na  $\partial\pi \times (-h/2, h/2)$ :

$$(4.10) \quad \begin{aligned} s_r &= -(2+\nu) p \left( \frac{3}{20} - \zeta^2 \right) \zeta, \\ s_\theta &= 0, \\ s_z &= p \frac{R}{h} \left( -\frac{1}{4} + 3\zeta^2 \right). \end{aligned}$$

Ze wzoru (2.4)<sub>3</sub> otrzymano siły reakcyjne działające na górną powierzchnię, czyli na  $\pi \times (h/2)$  o normalnej  $\mathbf{n}=(0, 0, 1)$ :

$$(4.11) \quad \begin{aligned} s_r &= \frac{1}{2} p \frac{R}{h} \rho, \\ s_\theta &= 0, \\ s_z &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{3\nu}{1-\nu} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \left( \frac{3-2\nu}{2} - \rho^2 \right) \right] \end{aligned}$$

oraz na powierzchnię dolną czyli na  $\pi \times (-h/2)$  o normalnej  $\mathbf{n}=(0, 0, -1)$ :

$$(4.12) \quad \begin{aligned} s_r &= -\frac{1}{2} p \frac{R}{h} \rho, \\ s_\theta &= 0, \\ s_z &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \frac{3\nu}{1-\nu} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \left( \frac{3-2\nu}{2} - \rho^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Na podstawie wzoru (3.6) obliczono następujące wielkości:

$$\begin{aligned} f_1 &= h \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |r_r| + \sup_{\mathbf{x} \in \pi \times \partial F} |s_r| + \frac{2h}{R} \sup_{\mathbf{x} \in F \times \partial \pi} |s_r| = p \left( \frac{7}{2} \frac{R}{h} - \frac{2+\nu}{10} \frac{h}{R} \right), \\ f_2 &= h \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |r_z| + \sup_{\mathbf{x} \in \pi \times \partial F} |s_z| + \frac{2h}{R} \sup_{\mathbf{x} \in F \times \partial \pi} |s_z|, \\ f_2 &= \begin{cases} -p \left[ \frac{1}{2} + \frac{9\nu(3-2\nu)}{4(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \right] & \text{dla } \frac{R}{h} \geq \sqrt{\frac{1}{3\nu}}, \\ p \left[ \frac{5}{2} - \frac{\nu(1-2\nu)}{(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 \right] & \text{dla } \frac{R}{h} < \sqrt{\frac{1}{3\nu}}, \end{cases} \\ g_1 &= \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_r| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left( \int_{\pi \times (\frac{h}{2})} |s_r| d\pi + \int_{\pi \times (-\frac{h}{2})} |s_r| d\pi \right) + \\ & \quad + \frac{2h}{R} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_r| dS_b = p \left( \frac{4}{3} \frac{R}{h} + \frac{13}{400} (\nu+2) \frac{h}{R} \right), \\ g_2 &= \frac{h}{|\Omega|} \int_{\Omega} |r_z| d\Omega + \frac{1}{2|\pi|} \left( \int_{\pi \times (\frac{h}{2})} |s_z| d\pi + \int_{\pi \times (-\frac{h}{2})} |s_z| d\pi \right) + \frac{2h}{R} \frac{1}{|S_b|} \int_{S_b} |s_z| dS_b, \end{aligned}$$

$$g_2 = \begin{cases} p \left[ \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \nu \left( \frac{R}{h} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right] & \text{dla } \frac{h}{R} \geq \sqrt{\frac{3\nu(3-2\nu)}{2(1-\nu)}}, \\ -3p \left[ \dot{\rho}^2 + \frac{3\nu}{2(1-\nu)} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (-(3-2\nu)\dot{\rho}^2 + \dot{\rho}^4) \right] + \\ + p \left[ \frac{3}{2} - \frac{9}{2} \nu \left( \frac{R}{h} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right], & \text{dla } \sqrt{\frac{3\nu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}} < \frac{h}{R} < \sqrt{\frac{3\nu(3-2\nu)}{2(1-\nu)}}, \\ p \left[ -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \nu \left( \frac{R}{h} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9} \right] & \text{dla } \frac{h}{R} \leq \sqrt{\frac{3\nu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}}, \end{cases}$$

gdzie

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{3-2\nu}{2} - \frac{1-\nu}{3\nu} \left( \frac{h}{R} \right)^2}.$$

Jako wyteżenie  $\sigma_0$  (punkt 3) przyjęto maksymalne  $\sigma_{rr}$ , czyli  $\sigma_{rr}$  dla  $\rho=0$ :

$$\dot{\sigma} = \frac{3(3-2\nu)}{8(1-\nu)} p \left( \frac{R}{h} \right)^2.$$

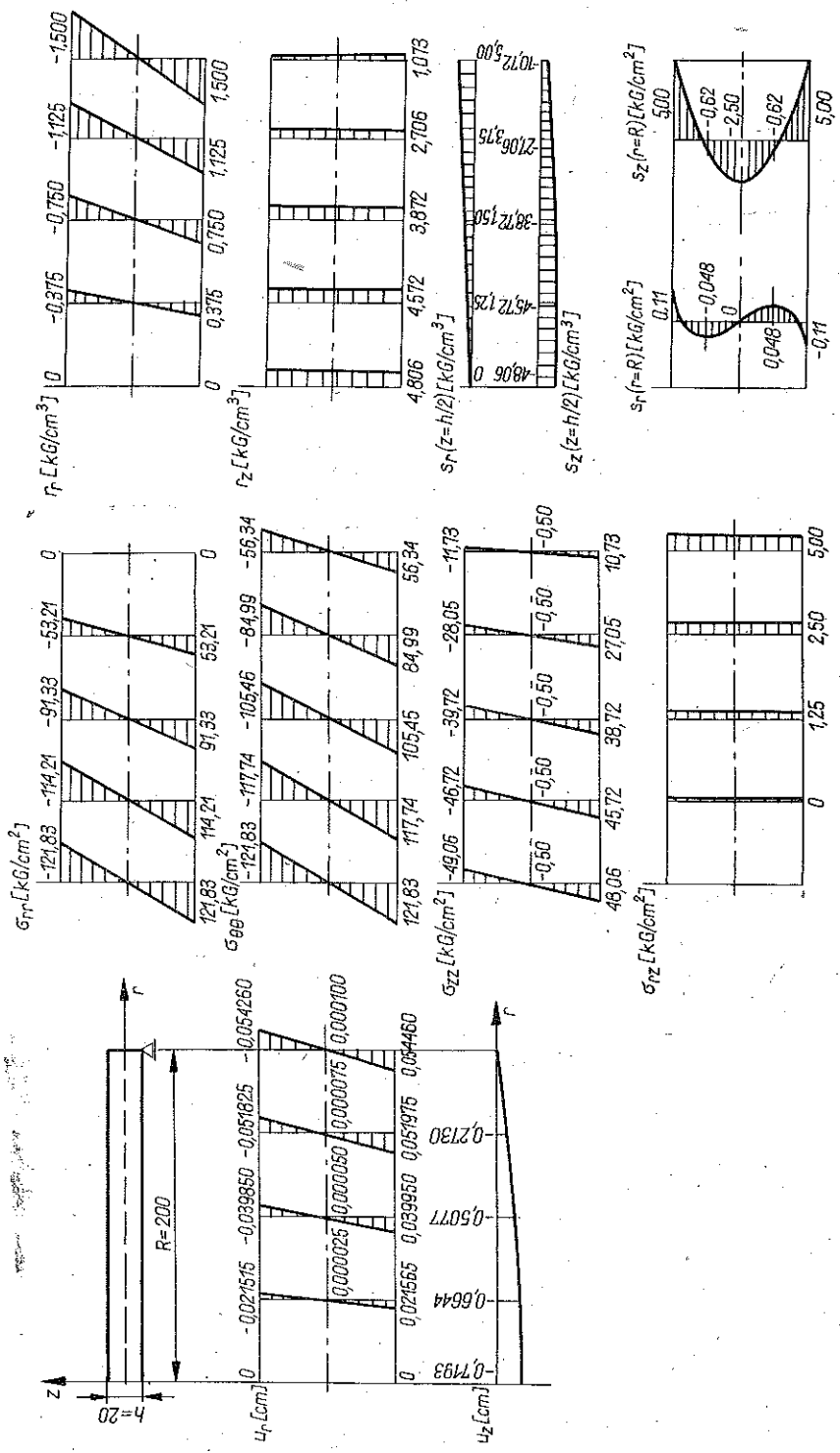
Wtedy

$$\delta_1 = \frac{4(1-\nu)}{3(3-2\nu)} \frac{h}{R} \left[ 7 + \frac{2+\nu}{5} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right],$$

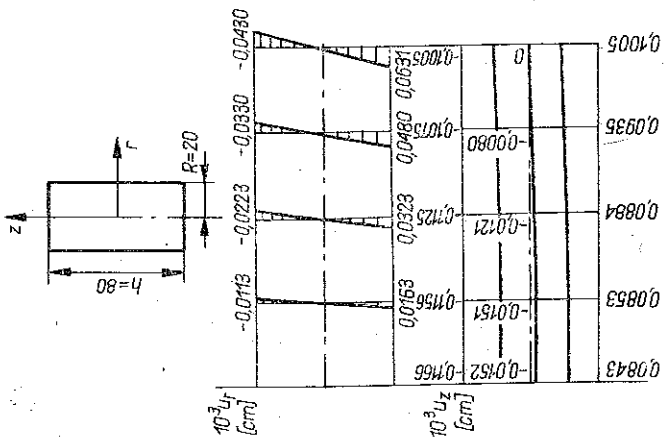
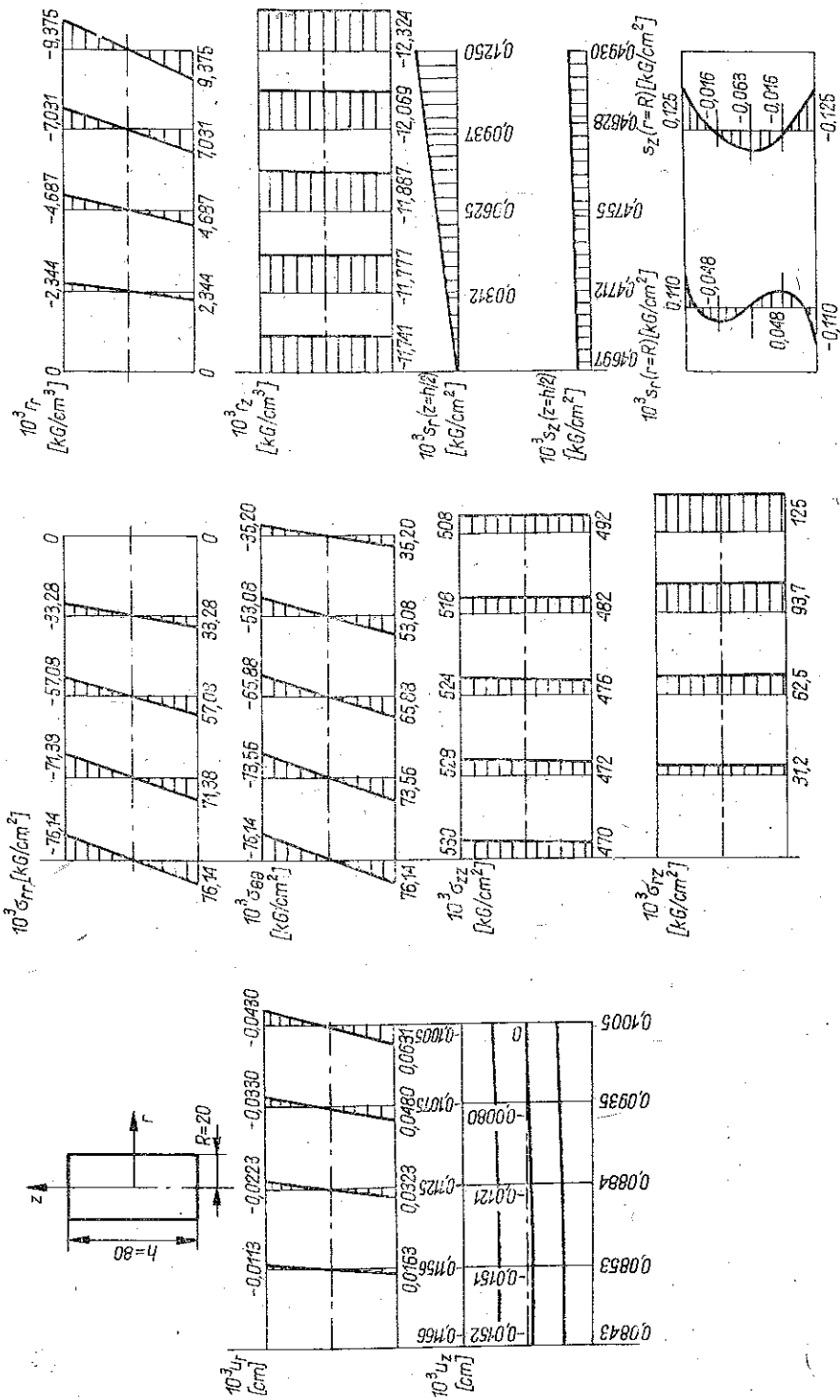
$$\delta_2 = \begin{cases} -\frac{4(1-\nu)}{3(3-2\nu)} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + 6\nu & \text{dla } \frac{R}{h} \geq \sqrt{\frac{1}{3\nu}}, \\ \frac{2}{3-2\nu} \left[ \frac{10}{3} (1-\nu) \left( \frac{h}{R} \right)^2 - 3\nu(1-2\nu) \right] & \text{dla } \frac{R}{h} < \sqrt{\frac{1}{3\nu}}, \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \frac{1-\nu}{3(3-2\nu)} \frac{h}{R} \left[ \frac{32}{3} + \frac{13(2+\nu)}{50} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right],$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} \frac{2(1-\nu)}{3-2\nu} \left[ \frac{2(27+4\sqrt{3})}{27} \left( \frac{h}{R} \right)^2 - 9\nu \right] & \text{dla } \frac{h}{R} \geq \sqrt{\frac{3\nu(3-2\nu)}{2(1-\nu)}}, \\ -\frac{8(1-\nu)}{3-2\nu} \left\{ \left[ \dot{\rho}^2 \left( \frac{h}{R} \right)^2 + \frac{3\nu}{2(1-\nu)} (-(3-2\nu)\dot{\rho}^2 + \dot{\rho}^4) \right] - \right. \\ \left. - \frac{(27+4\sqrt{3})}{54} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + \frac{9}{4} \nu \right\} & \text{dla } \sqrt{\frac{3\nu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}} < \frac{h}{R} < \sqrt{\frac{3\nu(3-2\nu)}{2(1-\nu)}}, \\ \frac{2(1-\nu)}{3-2\nu} \left[ \frac{2(-27+4\sqrt{3})}{27} \left( \frac{h}{R} \right)^2 + 9\nu \right] & \text{dla } \frac{h}{R} \leq \sqrt{\frac{3\nu(1-2\nu)}{2(1-\nu)}}. \end{cases}$$



[101]





*Przykład liczbowy*

Przyjmując dane  $R=200$  cm,  $h=20$  cm,  $p=1$  kG/cm<sup>2</sup>,  $E=200000$  kG/cm<sup>2</sup>,  $\nu=0,2$ , otrzymano

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0,2875, & \gamma_1 &= 0,1094, \\ \delta_2 &= 1,1843, & \gamma_2 &= 0,7268. \end{aligned}$$

Przyjmując inne wymiary płyty:  $R=20$  cm,  $h=80$  cm otrzymano

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 23,0496, & \gamma_1 &= 8,1285, \\ \delta_2 &= 32,5578, & \gamma_2 &= 24,0179. \end{aligned}$$

Na rys. 3 pokazano wykresy przemieszczeń, naprężeń i sił reakcyjnych w przekrojach  $\rho$  równych 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1 dla  $R=200$  cm i  $h=20$  cm, a na rys. 4 pokazano analogiczne wykresy dla  $R=20$  cm,  $h=80$  cm.

5. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PŁYTY KOŁOWEJ W RAMACH TRÓJWYMIAROWEJ TEORII SPRĘŻYSTOŚCI

Założono, że na płytę działają siły określone za pomocą wzorów (4.4). Przyjęto funkcję przemieszczeń w następującej postaci:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} u_r &= \psi_r + d_r z + k_r z^3, \\ u_z &= \psi_z + d_z z + l_z z^2 + m_z z^4, \end{aligned}$$

gdzie  $\psi_r$ ,  $d_r$ ,  $k_r$ ,  $\psi_z$ ,  $d_z$ ,  $l_z$ ,  $m_z$  są funkcjami  $r$ .

Równania równowagi (2.8) dla  $l=4$  przyjmują następującą postać:

$$(5.2) \quad \begin{aligned} & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right] dz = 0, \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] dz - p = 0, \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right] z dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz = 0, \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] z dz - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} dz - p \frac{h}{2} = 0, \\ & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} \right] z^3 dz - 3 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} z^2 dz = 0, \end{aligned}$$

$$(5.2) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] z^2 dz - 2 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} z dz - p \frac{h^2}{4} = 0,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}}{r} \right] z^4 dz - 4 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} z^3 dz - p \frac{h^4}{16} = 0,$$

Natomiast na brzegu  $\partial(\pi)$  o normalnej  $\mathbf{n}=(1, 0, 0)$   $r|_{\partial(\pi)}=R$  trzeba spełnić wynikające z (2.9) następujące warunki brzegowe:

$$(5.3) \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_r dz, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z dz,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_r z dz, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z z dz,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rr} z^3 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_r z^3 dz, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} z^2 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z z^2 dz,$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} z^4 dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p_z z^4 dz,$$

gdzie obciążenia  $p_r, p_z$  określone są przez wzory (4.4)<sub>2,4</sub>.

Równania równowagi (5.2) po uwzględnieniu związków konstytutywnych prowadzą się do następującego układu równań na funkcje  $\psi_r, d_r, k_r, \psi_z, l_z, m_z$ :

$$(5.4) \quad (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} \right) + \nu \frac{\partial d_z}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) \right] +$$

$$+ \frac{h^4}{80} \left( \frac{\partial^2 m_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_z}{\partial r} \right) = \frac{2(1+\nu)p}{Eh},$$

$$\frac{1-\nu}{6} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial d_r}{\partial r} + \frac{d_r}{r} \right) + \frac{\nu}{3} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{(1-\nu)h^2}{40} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \right) -$$

$$- \frac{1-2\nu}{h^2} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) - \frac{1-2\nu}{12} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) + \frac{(-1+10\nu)h^2}{80} \frac{\partial m_z}{\partial r} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 (5.4) \quad [cd.] \quad & \frac{(1-2\nu)h^2}{24} \left( \frac{\partial^2 d_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial d_z}{\partial r} \right) - (1-\nu) d_z - \nu \left( \frac{\partial \psi_r}{\partial r} + \frac{\psi_r}{r} \right) = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)p}{2E}, \\
 & \frac{1-\nu}{10} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial d_r}{\partial r} + \frac{d_r}{r} \right) + \frac{\nu}{5} \frac{\partial l_z}{\partial r} + \frac{(1-\nu)h^2}{56} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \right) + \\
 & + \frac{(-3+14\nu)h^2}{112} \frac{\partial m_z}{\partial r} - \frac{1-2\nu}{h^2} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) - \frac{3(1-2\nu)}{20} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{3h^2}{20} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) \right] + \\
 & + \frac{3h^4}{112} \left( \frac{\partial^2 m_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{1-2\nu} \left[ 8(1-\nu) l_z + 4\nu \left( \frac{\partial d_r}{\partial r} + \frac{d_r}{r} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{12(1-\nu)h^2}{5} m_z + \frac{3\nu h^2}{5} \left( \frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \right) \right] = \frac{6(1+\nu)p}{Eh}, \\
 & \frac{\partial}{\partial r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( d_r + \frac{\partial \psi_z}{\partial r} \right) + \frac{5h^2}{28} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \left( 3k_r + \frac{\partial l_z}{\partial r} \right) \right] + \\
 & + \frac{5h^4}{144} \left( \frac{\partial^2 m_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_z}{\partial r} \right) - \frac{1}{1-2\nu} \left[ 16(1-\nu) l_z + 8\nu \left( \frac{\partial d_r}{\partial r} + \frac{d_r}{r} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{40(1-\nu)h^2}{7} m_z + \frac{10\nu h^2}{7} \left( \frac{\partial k_r}{\partial r} + \frac{k_r}{r} \right) \right] = \frac{10(1+\nu)p}{Eh}.
 \end{aligned}$$

Wykorzystując rozwiązania otrzymane poprzednio, znaleziono następujące rozwiązanie układu równań (5.4) spełniające warunki brzegowe (5.3):

$$\begin{aligned}
 \psi_r &= \frac{\nu p}{2E} r, \\
 d_r &= \frac{3(1-\nu)p}{4Eh} \left[ \frac{1+\nu}{h^2} r^2 - \frac{(3+\nu)R^2}{h^2} - \frac{\nu^2-9\nu-2}{5(1-\nu)} \right] r, \quad k_r = -\frac{(2-\nu)(1+\nu)p}{Eh^3} r, \\
 \psi_z &= \frac{3(1-\nu)p}{8Eh} \left[ \frac{1+\nu}{2h^2} (R^2+r^2) - \frac{(3+\nu)R^2}{h^2} - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\nu^2+11\nu-2}{5(1-\nu)} \right] (R^2-r^2), \quad d_z = -\frac{p}{2E}, \\
 l_z &= \frac{3\nu p}{4Eh} \left[ -\frac{2(1+\nu)}{h^2} r^2 + \frac{3+\nu}{h^2} R^2 - \frac{\nu^2+2\nu+5}{5\nu} \right], \quad m_z = \frac{(1-\nu^2)p}{2Eh^3}.
 \end{aligned}$$

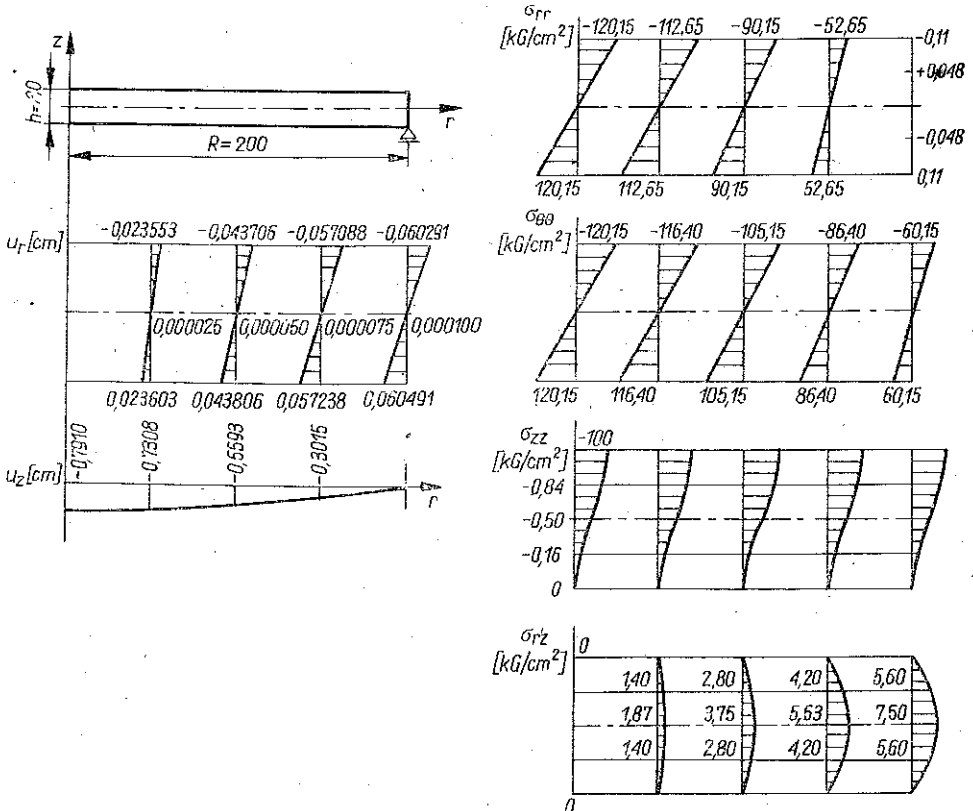
W rozwiązaniem zagadnieniu, po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych  $\rho=r/R$ ,  $\zeta=z/h$ , składowe przemieszczenia wyrażają się następującymi wzorami:

$$\begin{aligned}
 (5.5) \quad u_r &= \frac{p}{2E} R \rho \left\{ \nu + \frac{3(1-\nu)}{2} \left[ (1+\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 - (3+\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{\nu^2-9\nu-2}{5(1-\nu)} \right] \zeta - 2(2-\nu)(1+\nu) \zeta^3 \right\}, \quad u_\theta = 0,
 \end{aligned}$$

$$(5.5) \quad u_z = \frac{p}{2E} R \left\{ \frac{3(1-\nu)}{4} \frac{R}{h} \left[ \frac{1+\nu}{2} \left( \frac{R}{h} \right)^2 (1+\rho^2) - (3+\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 - \frac{\nu^2+11\nu-2}{5(1-\nu)} \right] (1-\rho^2) - \frac{h}{R} \zeta + \frac{3\nu}{2} \left[ -2(1+\nu) \frac{R}{h} \rho^2 + (3+\nu) \frac{R}{h} - \frac{\nu^2+2\nu+5}{5\nu} \frac{h}{R} \right] \zeta^2 + (1-\nu^2) \frac{h}{R} \zeta^4 \right\},$$

a składowe tensora naprężenia są następujące:

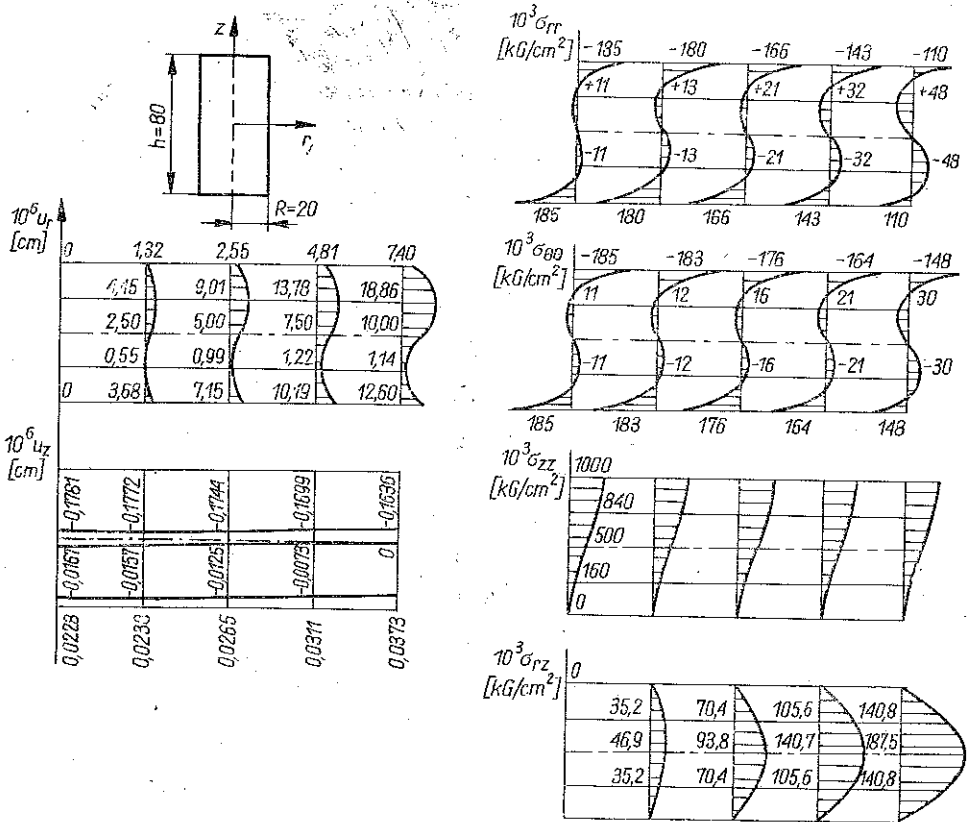
$$(5.6) \quad \begin{aligned} \sigma_{rr} &= p \left\{ \frac{3}{4} \left[ -(3+\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 (1-\rho^2) + \frac{2+\nu}{5} \right] \zeta - (2+\nu) \zeta^3 \right\}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= p \left\{ \frac{3}{4} \left[ (1+3\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 \rho^2 - (3+\nu) \left( \frac{R}{h} \right)^2 + \frac{2+\nu}{5} \right] \zeta - (2+\nu) \zeta^3 \right\}, \\ \sigma_{zz} &= p \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \zeta + 2\zeta^3 \right), \\ \sigma_{rz} &= 3p \frac{R}{h} \left( \frac{1}{4} - \zeta^2 \right) \rho, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0. \end{aligned}$$



Rys. 5

Wszystkie siły reakcyjne zarówno objętościowe (2.4)<sub>1</sub> jak i powierzchniowe (2.4)<sub>2</sub> i (2.4)<sub>3</sub> są równe zeru, a zatem uzyskane rozwiązanie jest ściśle w sensie klasycznej teorii sprężystości.

Na rys. 5 i 6 pokazano wykresy przemieszczeń i naprężeń w przekrojach równych 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1 przyjmując dane jak poprzednio.



Rys. 6

## 6. WNIOSKI Z UZYSKANYCH ROZWIĄZAŃ

Dysponując rozwiązaniem ścisłym płyty kołowej i rozwiązaniem według uogólnionej teorii Reissnera można, na podstawie kryterium wprowadzonego w rozdziale 3, zbadać zależności między  $\gamma_a$  i  $\delta_a$  (3.5) a średnimi i maksymalnymi błędami składowych stanu naprężenia i przemieszczenia.

Wielkości  $\gamma_1$  i  $\delta_1$  maleją do zera, gdy stosunek wysokości płyty do jej szerokości lub średnicy dąży do zera, natomiast  $\gamma_2$  i  $\delta_2$  dążą wówczas do granicy różnej od zera. Wynika stąd, że uogólniona teoria Reissnera nie jest ścisła nawet dla płyt bardzo cienkich.

W przypadku płyty o wymiarach  $R=200$  cm,  $h=20$  cm  $\gamma_\alpha$  i  $\delta_\alpha$  są następujące:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 0,1094, & \delta_1 &= 0,2875, \\ \gamma_2 &= 0,7268, & \delta_2 &= 1,1843.\end{aligned}$$

Wielkościom tym odpowiadają średnie i maksymalne błędy składowych stanu naprężenia i przemieszczenia zestawione w tablicy 1.

Tablica 1

$\sigma_{ij}, u_i$	$\eta_{ij}, \theta_i$	$\kappa_{ij}, \rho_i$
$\sigma_{rr}$	0,016	0,056
$\sigma_{\theta\theta}$	0,017	0,085
$\sigma_{zz}$	18,02	59,187
$\sigma_{rz}$	0,385	1,502
$u_r$	0,090	0,242
$u_z$	0,092	0,196

Z powyższego zestawienia wynika, że na podstawie uogólnionej teorii Reissnera można wyznaczyć składowe przemieszczenia oraz składowe naprężenia  $\sigma_{rr}$  i  $\sigma_{\theta\theta}$ . Uogólniona teoria Reissnera nie może natomiast służyć do wyznaczania naprężeń normalnych  $\sigma_{zz}$ .

Wykres naprężeń stycznych w rozwiązaniu przybliżonym (rys. 3) względem  $z$  przy ustalonym  $r$  ma kształt prostokąta natomiast w rozwiązaniu ścisłym — paraboli (rys. 5). Średnie naprężenia w obu rozwiązaniach są jednakowe, a największe różnice występują na krawędziach płyty przy  $z = \pm h/2$ . Nie ma to jednak istotnego znaczenia ze względu na niewielkie wartości tych naprężeń.

Natomiast rozpatrując płytę o wymiarach  $R=20$  cm,  $h=80$  cm otrzymano następujące wielkości  $\gamma_\alpha$  i  $\delta_\alpha$ :

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= 8,1285, & \delta_1 &= 23,0496, \\ \gamma_2 &= 24,0179, & \delta_2 &= 32,5578,\end{aligned}$$

Wielkościom tym odpowiadają średnie i maksymalne błędy składowych stanu naprężenia i przemieszczenia zestawione w tablicy 2.

Tablica 2

$\sigma_{ij}, u_i$	$\eta_{ij}, \theta_i$	$\kappa_{ij}, \rho_i$
$\sigma_{rr}$	1,0110	3,1429
$\sigma_{\theta\theta}$	0,9557	3,1247
$\sigma_{zz}$	0,3733	0,6059
$\sigma_{rz}$	0,3865	1,5060
$u_r$	0,7136	7,5706
$u_z$	0,4922	1,2335

Wynika stąd, że otrzymane rozwiązanie zagadnienia płyty ( $R=20$  cm,  $h=80$  cm) jest błędne, czego należało się spodziewać, gdyż walec o  $h/R=4$  trudno uważać za płytę.

Gdyby jednak porównać siły reakcyjne z obciążeniami, np. badać stosunki  $g_1$  czy  $g_2$  do maksymalnych obciążeń, to okazałyby się, że stosunki te w płycie i  $h/R=4$  są znacznie mniejsze od odpowiednich stosunków w płycie o  $h/R=0,1$ , co mogłoby prowadzić do fałszywego wniosku, że uogólniona teoria Reissnera lepiej opisuje stan naprężenia i przemieszczenia w płytach grubych niż cienkich.

Natomiast badanie dokładności teorii przybliżonej za pomocą wielkości  $\gamma_\alpha$  i  $\delta_\alpha$ , które określają stosunki średnich i maksymalnych składowych poziomych i pionowych sił reakcyjnych do maksymalnego wyężenia płyty, daje w tym wypadku wynik poprawny.

Mając wyznaczone funkcje  $F_{ij}(\gamma_\alpha)$  i  $G_i(\gamma_\alpha)$  można znając  $\gamma_\alpha$  określić średnie błędy składowych naprężeń i przemieszczeń. Natomiast porównując  $\delta_\alpha$  z  $\gamma_\alpha$  można ocenić maksymalne błędy składowych naprężeń i przemieszczeń. Duże różnice między  $\delta_\alpha$  a  $\gamma_\alpha$  oznaczają istnienie błędów lokalnych znacznie większych od średnich.

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. W. GUTKOWSKI, W. NOWACKI, Cz. WOŹNIAK, *Dźwigary powierzchniowe*, Ossolineum 1975.
2. W. KUFEL, F. PIETRAS, *Ocena dokładności rozwiązań problemów brzegowych sprężystych ciał dyskretyzowanych*, Rozpr. Inż., **22**, 3, 1974.
3. F. JOHN, *Refined interior equations for thin elastic shells*, Comm. Pure Appl. Math., **24**, 1971.
4. W. T. KOITER, *Foundations and basic equations of shell theory, A survey of recent progress*, IUTAM Symposium, Copenhagen 1969.
5. W. T. KOITER, *On the foundations of the linear theory of thin elastic shells, I, II*, Koninkl. Nederl., Akademie Van Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings, Ser. B, **73**, 1970.
6. M. KUCZYŃSKA-MARKS, *Zagadnienie płyty kołowej jako ciała z wewnętrznymi więzami*, Prace IPPT, **47**, 1975.
7. L. STABILINI, *La Plasticità*, Libreria Editrice Politecnica Tamburini, Milano 1961.
8. J. UTKIN, *On the technical theory of thin elastic rods*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. tech., **22**, 1974.
9. Cz. WOŹNIAK, *Nonlinear mechanics of the constrained and discretized material continua*, wykłady w Udine 1973.
10. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media, Part I. General theory*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. tech., **21**, 3, 1973.
11. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media, Part II. Discretized formulation of the continuous media theory*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. tech., **21**, 4, 1973.
12. Cz. WOŹNIAK, *Constrained continuous media, Part. III. Partly discretized bodies*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. tech., **21**, 4, 1973.
13. Cz. WOŹNIAK, *Non-linear mechanics of constrained material continua. I. Foundations of the theory*, Arch. Mech., **26**, 1, 1974.
14. Cz. WOŹNIAK, *Elastic bodies, with constraints imposed on deformations, stresses and momenta*, Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. tech., **22**, 1974.
15. Cz. WOŹNIAK, *Analytical mechanics of elastic media*, wykłady w Udine 1975.

## Резюме

## ПЛИТЫ В ПОДХОДЕ МЕХАНИКИ СО СВЯЗЯМИ

В настоящей работе сформулирована задача анализа упругих плит в подходе механики со связями. Выведена в криволинейных координатах основная система уравнений, позволяющая получить решения, при постулированной функции деформации. Сформулирован критерий оценки точности решений на основе величины сил реакции, которые определяют размеры неудовлетворения уравнений движения и граничных условий механики сплошных сред в ее классической формулировке. Рассуждения иллюстрированы примером решения задачи круговой плиты, при двух частных примерах функций перемещений.

## SUMMARY

## MECHANICS OF PLATES TREATED AS BODIES WITH CONSTRAINTS

The analysis of elastic plates is formulated as a problem of mechanics of bodies with constraints. The fundamental set of differential equations written in curvilinear coordinates is derived which makes it possible to obtain a solution corresponding to a prescribed form of deformation. The accuracy of the solutions is estimated according to a criterion based upon the degree of unfulfillment of the equation of motion and the boundary conditions in their classical formulation. The considerations are illustrated by a solution of the problem of a circular plate with two particular forms of the displacement functions.

POLISH ACADEMY OF SCIENCES  
INSTITUTE OF FUNDAMENTAL TECHNOLOGICAL RESEARCH

*Praca została złożona w Redakcji dnia 17 maja 1978 r.*

---