

WYKORZYSTANIE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH W PROBLEMATYCE HYDRODYNAMICZNEGO SMAROWANIA ŁOŻYSK POROWATYCH

KAROL KRZEMIŃSKI (WARSZAWA)

W artykule przedstawiono algorytm rozwiązania równań ruchu cieczy w łożysku porowatym metodą elementów skończonych. Analiza dotyczy łożyska o skończonej długości pracującego w warunkach tarcia płynnego, w którym przestrzenny ruch cieczy opisany został w szczelinie smarnej równaniem Reynoldsa, a w tulei porowatej równaniem Laplace'a. Podano opis budowy programu obliczeniowego napisanego w języku FORTRAN IV, który umożliwia obliczanie rozkładów ciśnień, nośności łożyska, kąta działania obciążenia oraz współczynnika tarcia dla dowolnego kształtu poprzecznego łożyska porowatego i anizotropowej budowy tulei porowatej.

WAŻNIEJSZE OZNACZENIA

- L długość łożyska,
 U prędkość obwodowa czopa,
 W nośność łożyska,
 $c = R - R_{cz}$ luz promieniowy,
 h wysokość szczeliny smarnej,
 $k_i = \frac{\varphi_i}{\eta_0}$ współczynniki przesączalności będące funkcjami współrzędnych,
 p ciśnienie w filmie smarnym,
 p^* ciśnienie w tulei porowatej,
 w_0 jednostkowy wydatek cieczy prostopadły do powierzchni wewnętrznej tulei porowatej,
 φ przepuszczalność,
 $\varepsilon = \frac{e}{c}$ mimośrodowość względna,
 η_0 lepkość dynamiczna oleju.

1. WSTĘP

Hydrodynamiczne smarowanie łożysk porowatych stanowi ogólniejszy problem w stosunku do smarowania łożysk konwencjonalnych. W odróżnieniu od łożysk konwencjonalnych, gdzie przepływ odbywa się tylko w szczelinie smarnej, w przypadku łożysk porowatych występuje jednoczesny przepływ cieczy w dwóch ośrodkach, tj. w szczelinie smarnej i w tulei porowatej oraz wzajemna cyrkulacja cieczy

smarnej między tymi obszarami. Komplikuje to analizę zjawisk i w znacznym stopniu utrudnia rozwiązanie problemu.

Przedstawiony w pracy algorytm dotyczy rozwiązania metodą elementów skończonych równań cieczy w łożysku porowatym pracującym w warunkach hydrodynamicznego smarowania, kiedy w łożysku występuje tarcie płynne. Dla ustalonego, izotermicznego przepływu cieczy w łożysku porowatym ruch cieczy w szczelinie smarnej można opisać równaniem Reynoldsa, a przepływ cieczy w tulei porowatej równaniem Laplace'a. Dotychczas brak jest ścisłego analitycznego rozwiązania tych równań, a opublikowane rozwiązania numeryczne dotyczą przypadków, w których przyjęto szereg założeń upraszczających dotyczących tak parametrów geometrycznych łożyska jak i warunków brzegowych [2, 10, 11, 12, 13, 15 i 16]. Przyjmowane uproszczenia ułatwiają rozwiązanie zagadnienia, jednakże wyniki takich rozwiązań mają małe znaczenie praktyczne. Obszerne omówienie tych spraw podano w pracach [6, 7, 8 i 9].

Znaczne możliwości rozszerzenia analizy problemu i ominięcia założeń upraszczających daje wykorzystanie do obliczeń numerycznych metody elementów skończonych. W opracowanym programie obliczeniowym istnieje możliwość wprowadzenia dowolnych warunków brzegowych dla filmu smarowego, dowolnych kształtów szczeliny smarnej, jak również anizotropowego rozkładu własności fizycznych w tulei porowatej. Program napisano w języku FORTRAN IV, przez co nadaje się on do eksploatacji na wszystkich nowoczesnych maszynach cyfrowych.

2. RÓWNIANIA RUCHU CIECZY I WARUNKI BRZEGOWE

Ruch cieczy w łożysku porowatym w przypadku ustalonego, izotermicznego przepływu newtonowskiej cieczy nieściśliwej o stałej lepkości, można napisać dla szczeliny smarnej (obszaru Ω_1) równaniem Reynoldsa, a dla tulei porowatej (obszaru Ω_2) równaniem Laplace'a. Dla łożyska o skończonej długości równania te napisane we współrzędnych walcowych (rys. 1) będą miały postać następującą [2 i 6]:

$$(2.1) \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h^3}{12 \eta_0} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12 \eta_0} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} U \frac{dh}{R d\theta} - w_0,$$

$$(2.2) \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(K_\theta \frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(K_r r \frac{\partial p^x}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \right) = 0.$$

Rozwiązanie tych równań przeprowadza się najczęściej przyjmując następujące warunki brzegowe:

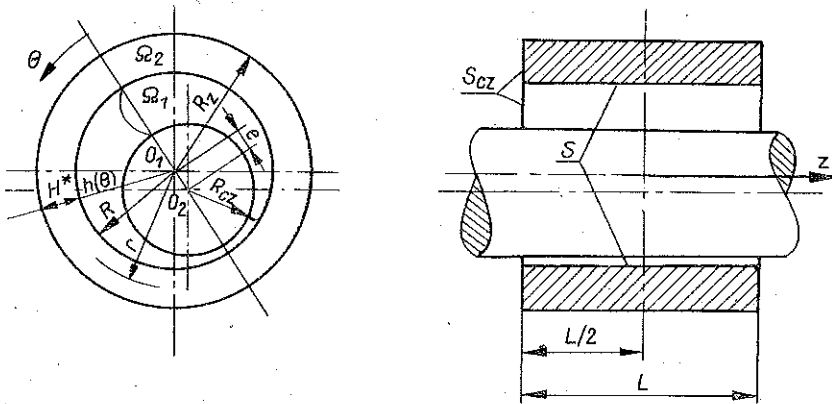
A) Ciśnienie na powierzchniach czołowych łożyska S_{cz} równa się zeru (w analizie rozpatruje się nadciśnienie w stosunku do ciśnienia atmosferycznego).

$$(2.3) \quad p \left(r, \theta, \pm \frac{L}{2} \right) = p^x \left(r, \theta, \pm \frac{L}{2} \right) = 0.$$

B) Tuleja porowata jest wciśnięta w nieprzepuszczalny korpus, a więc gradient ciśnienia na powierzchni zewnętrznej tulei równa się zeru:

$$(2.4) \quad \frac{\partial p^x}{\partial n}(R_z, \theta, z) = 0,$$

gdzie n oznacza normalną do powierzchni.



Rys. 1

C) W przypadku gdy oś czopa jest równoległa do osi tulei, gradient ciśnienia w kierunku osiowym liczony w połowie długości panwi jest równy zeru, tzn.

$$(2.5) \quad \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta, 0) = \frac{\partial p^x}{\partial z}(r, \theta, 0) = 0.$$

D) Przez powierzchnię wewnętrzną tulei S odbywa się cyrkulacja cieczy między szczeliną smarną, a tuleją porowatą i z warunku ciągłości przepływu otrzymuje się

$$(2.6) \quad \left[k_r \frac{\partial p^x}{\partial r} - W_0 \right]_S = 0 \quad \text{oraz} \quad p = p^x.$$

E) Rozpiętość klina smarnego określić można z warunków Sommerfelda

$$(2.7) \quad p(r, 0, z) = p(r, \pi, z) = p(r, 2\pi, z) = 0,$$

bądź z warunków Reynoldsa

$$(2.8) \quad p(r, 0, z) = p(r, \theta_k, z) = 0, \quad \frac{\partial p}{R \partial \theta}(r, \theta_k, z) = \frac{\partial p}{\partial z}(r, \theta_k, z) = 0.$$

Ponadto przyjmuje się, że ilość oleju w szczelinie smarnej jest dostateczna do wytworzenia pełnego klina smarnego.

3. WARIACYJNE SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozwiązanie równań różniczkowych (2.1) i (2.2) wraz z warunkami brzegowymi (2.3)–(2.8) przeprowadzi się, korzystając z rozwiązania równoważnego sformułowaniu wariacyjnemu. Prowadzi to do poszukiwania funkcji $p_1 = p + p^x$, która realizuje minimum następujących funkcjonałów, określonych odpowiednio dla szczeliny smarnej (3.1) i tulei porowatej (3.2):

$$(3.1) \quad X(p) = -\frac{1}{2} \int \int_{\Omega_1} \left[\frac{h^3}{12\eta_0} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \frac{h^3}{12\eta_0} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 - hU \frac{dp}{dx} + 2w_0 p \right] dx dz,$$

gdzie

$$x = R\theta, \quad dx = R d\theta$$

oraz

$$(3.2) \quad X(p^x) = -\frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega_2} \left[\frac{k_0}{r^2} \left(\frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right)^2 + k_r \left(\frac{\partial p^x}{\partial r} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial p^x}{\partial z} \right)^2 \right] \times \\ \times r dr d\theta dz + \int \int_S w_0 p R d\theta dz.$$

Funkcji $p(x, z)$ minimalizującej funkcjonał (3.1) poszukujemy w zbiorze funkcji mających ciągle pierwsze pochodne i spełniających warunki brzegowe określone na S_{cz} . Warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia ekstremum całki we wzorze (3.1) jest zerowanie się pierwszej wariacji funkcjonału $X(p)$ [4 i 5]. Korzystając z definicji wariacji i twierdzenia Greena [4] można napisać

$$(3.3) \quad \delta X(p) = \int \int_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (Uh) + w_0 \right] \times \\ \times \delta p dx dz + \int_C \left[\left(\frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{hU}{2} \right) n \right] \delta p dc = 0,$$

gdzie n oznacza wektor normalny, skierowany na zewnątrz powierzchni S .

Aby równanie (3.3) było spełnione dla wariacji δp znikającej na brzegu S_{cz} , oba wyrażenia podcałkowe muszą znikać tożsamościowo. Jak łatwo stwierdzić w pierwszej całce funkcja podcałkowa przedstawia równanie Reynoldsa i dla $p(x, z)$, spełniającego to równanie, całka ta jest zerem. Druga całka na brzegu S_{cz} znika tożsamościowo, ponieważ $\delta p = 0$, natomiast w płaszczyźnie symetrii łożyska ze względu na warunek (2.5) przepływ normalny jest zerem.

Obliczając następnie pierwszą wariację dla funkcjonału $X(p^x)$ w obszarze tulei porowatej otrzymuje się

$$(3.4) \quad \delta X(p^x) = \int \int \int_{\Omega_2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k_r \cdot r \frac{\partial p^x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k_0 \frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \right) \right] \delta p dv + \\ + \int \int_S \left[\left(k_r \frac{\partial p^x}{\partial r} + \frac{k_0}{r} \frac{\partial p^x}{\partial \theta} + k_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \right) \cdot n + w_0 \right] \delta p ds = 0.$$

Pierwsza całka w wyrażeniu (3.4) przedstawia równanie Laplace'a (2.2) i dla funkcji $p(r, \theta, z)$ spełniającej to równanie całka ta jest zerem. Całka powierzchniowa zeruje się na powierzchniach czołowych, bowiem $\delta p^x = 0$, a na powierzchniach S_1 i S_2 wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest zerem.

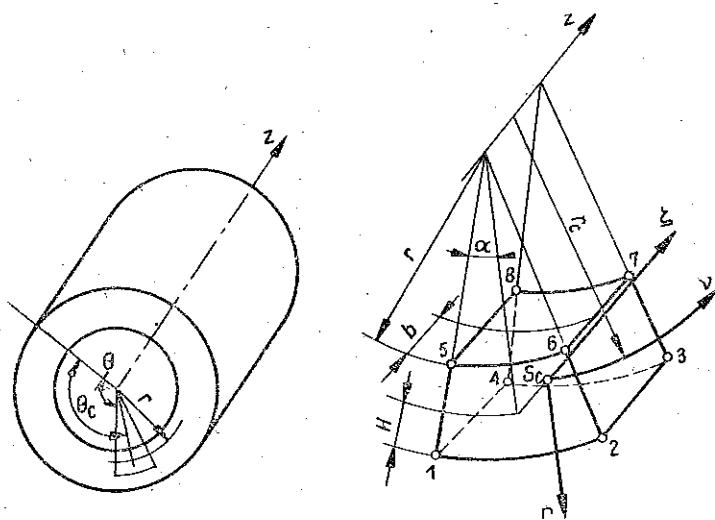
Aby poszukiwane rozwiązanie będące sumą $p_1 = p + p^x$ stanowiło minimum absolutne obu funkcjonałów, muszą być spełnione dodatkowo następujące nierówności:

$$(3.5) \quad \delta^2 X(p) = \frac{h^3}{12 \eta_0} \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \delta^2 X(p^x) = k_1 \geq 0.$$

Są one spełnione, zarówno bowiem funkcja h jak i parametry η_0 i k_1 są dodatnie. Zatem funkcja $p_s(r, \theta, z)$ jest stacjonarna i uzyskane rozwiązanie wariacyjne jest równoważne rozwiązaniu równań Reynoldsa i Laplace'a.

4. DYSKRETYZACJA OBSZARU TULEI POROWATEJ ZA POMOCĄ IZOPARAMETRYCZNYCH ELEMENTÓW PRZESTRZENNYCH

Tuleja porowata podzielona została na izoparametryczne, przestrzenne elementy skończone, ułożone centrycznie w kilku warstwach na grubości tulei (rys. 2). Ze względu na symetrię rozkładu ciśnień w kierunku osiowym względem płaszczyzny środkowej łożyska oraz oszczędność czasu liczenia — rozwiązanie przeprowadza się tylko dla połowy długości łożyska. Poszukiwana funkcja p^x , w tym przypadku rozkład ciśnień, reprezentowana jest przez wartości ciśnień w punktach węzłowych elementu. Przebieg zmienności ciśnienia wewnątrz elementu opisuje się przez funkcje kształtu elementu, które określane są w lokalnym układzie współrzędnych v, η, ζ . W analizie



Rys. 2

wykorzystano 8-węzłowy element przestrzenny, znormalizowany na bazie prostopadłościanu, dla którego funkcje kształtu mają postać [7]

$$(4.1) \quad N_i = \frac{1}{8} (1+\nu) (1+\eta) (1+\zeta).$$

Lokalny układ współrzędnych (rys. 2) tworzą współrzędne znormalizowane określone przez następujące wzory:

$$(4.2) \quad \nu = \frac{\theta - \theta_c}{\alpha}, \quad \eta = \frac{r - r_c}{H}, \quad \zeta = \frac{z - z_c}{b},$$

$$d\nu = \frac{1}{\alpha} d\theta, \quad d\eta = \frac{1}{H} dr, \quad d\zeta = \frac{1}{b} dz.$$

Przyjmując one wartości ± 1 w punktach węzłowych elementu. Jeśli wykorzystujemy funkcje kształtu, to relacje między układem globalnym (walcowym) a układem lokalnym możemy jednoznacznie określić za pomocą następujących wzorów:

$$(4.3) \quad r = N_1 r_1 + N_2 r_2 + \dots + N_8 r_8 = [N] \{r\}^e,$$

$$\theta = N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + \dots + N_8 \theta_8 = [N] \{\theta\}^e,$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + \dots + N_8 z_8 = [N] \{z\}^e.$$

Dla elementu izoparametrycznego zmianę ciśnienia wewnątrz elementu, wykorzystując lokalny układ współrzędnych, można przedstawić w przybliżeniu w postaci

$$(4.4) \quad p^x = N_1 p_1^x + N_2 p_2^x + \dots + N_8 p_8^x = [N] \{p^x\}^e,$$

gdzie $\{p^x\}^e$ jest macierzą kolumnową ciśnień w punktach węzłowych elementu.

Minimalizację funkcjonału $X(p^x)$ przeprowadza się względem wszystkich parametrów węzłowych $\{p^x\}$ poszukiwanej funkcji ciśnienia. Korzystając z addytywności całki z wzoru (3.2) otrzymuje się

$$(4.5) \quad X(p^x) = \sum_1^M X^e(p^x)$$

oraz

$$(4.6) \quad \frac{\partial X(p^x)}{\partial \{p^x\}} = \sum_1^M \frac{\partial X^e(p^x)}{\partial \{p^x\}^e} = 0,$$

gdzie M jest liczbą elementów, na które podzielono tuleję porowatą. Dokonując różniczkowania funkcjonału $X^e(p^x)$ względem jednego z parametrów węzłowych otrzymuje się

$$(4.7) \quad \frac{\partial X^e}{\partial p_i^x} = -\frac{1}{2} \int \int_{\nu^e} \int \left[k_r \frac{\partial p^x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial p_i^x} \left(\frac{\partial p^x}{\partial r} \right) + \frac{k_\theta}{r^2} \frac{\partial p^x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial p_i^x} \left(\frac{\partial p^x}{\partial \theta} \right) + \right. \\ \left. + k_z \frac{\partial p^x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_i^x} \left(\frac{\partial p^x}{\partial z} \right) \right] r dr d\theta dz + \int \int_{s^e} w_0 \frac{\partial p^x}{\partial p_i^x} R d\theta dz,$$

gdzie

$$\frac{\partial p^x}{\partial r} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial r} p_i^x, \quad \frac{\partial p^x}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \theta} p_i^x \quad \text{itd.}$$

Operacje różniczkowania występujące w wyrażeniu (4.7) oraz obliczenie tego wyrażenia przeprowadza się w układzie lokalnym, wykorzystując następujące transformacje:

$$(4.8) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial v} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial v} & \frac{\partial r}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} & \frac{\partial r}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix} = [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dla elementu objętości mamy

$$(4.9) \quad r \, dr \, d\theta \, dz = (\eta H + r_c) \det [J] \, dv \, d\eta \, d\zeta = \alpha H b (\eta H + r_c) \, dv \, d\eta \, d\zeta.$$

Przeprowadzając minimalizację funkcjonału w obszarze elementu względem wszystkich ośmiu parametrów otrzymuje się

$$(4.10) \quad \frac{\partial X^e}{\partial \{p^x\}^e} = [S_v + S_\eta + S_\zeta]^e \{p^x\}^e + \{Q\}^e = [S]^e \{p^x\}^e + \{Q\}^e,$$

gdzie $\{\theta\}^e = \iint_{S^e} W_0 [N] \, ds$ występuje tylko dla elementów przyległych do powierzchni S .

Macierz $[S]^e$ jest sumą trzech podmacierzy, które obliczane są następująco:

$$(4.11) \quad [S_v]^e = \frac{k_\theta H b}{24\alpha} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$S_{11} = A [T], \quad S_{12} = S_{21} = B [T], \quad S_{22} = C [T],$$

$$A = \frac{(H+r_c)^2}{H^3} \ln \frac{H+r_c}{r_c-H} + \frac{4H-2r_c}{H^2},$$

$$B = \frac{H^2-r_c^2}{H^3} \ln \frac{H+r_c}{r_c-H} + \frac{2r_c}{H^2},$$

$[T]$ —macierz współczynników stałych o wymiarze 4×4

$$C = \frac{(H+r_c)^2}{H^3} \ln \frac{H+r_c}{r_c-H} - \frac{4H+2r_c}{H^2},$$

$$(4.12) \quad [S_\eta]^e = \frac{k_v \alpha b r_c}{18H} \begin{vmatrix} D & -D \\ -D & D \end{vmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4, & 2, & 1, & 2 \\ 2, & 4, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & 4, & 2 \\ 2, & 1, & 2, & 4 \end{pmatrix};$$

$$(4.13) \quad [S_\zeta]^e = \frac{k_z \alpha H}{18b} \begin{vmatrix} Z_{11}, & Z_{12} \\ Z_{21}, & Z_{22} \end{vmatrix},$$

gdzie

$$Z_{11} = (H + 2r_c) [Z], \quad Z_{12} = Z_{21} = r_c [Z], \quad Z_{22} = (2r_c - H) [Z],$$

a $[Z]$ oznacza macierz współczynników stałych o wymiarze 4×4 .

Po przeprowadzeniu sumowania dla całego obszaru tulei porowatej otrzymuje się

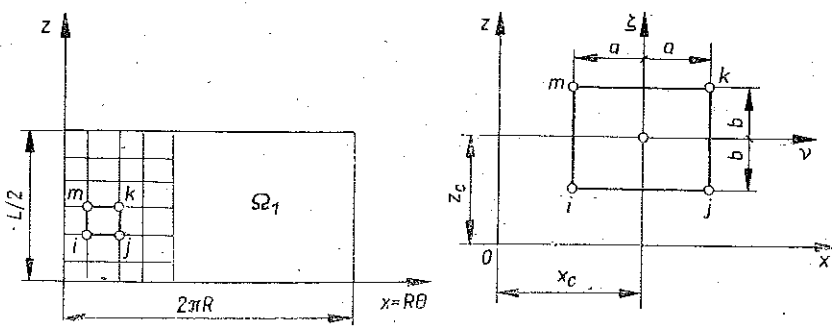
$$(4.14) \quad \frac{\partial X(p^x)}{\partial \{p^x\}} = [S] \{p^x\} + \{Q\} = 0,$$

gdzie $[S]$ oznacza macierz przepływu o wymiarze $m \times m$ (m jest ilością węzłów w obszarze Ω_2) oraz $\{Q\}$ kolumnową macierz wydatku powierzchniowego o wymiarze n (n jest ilością węzłów na powierzchni S).

Minimalizacja funkcjonału prowadzi do układu m równań liniowych, w których niewiadomymi są wartości ciśnień w punktach węzłowych.

5. MINIMALIZACJA FUNKCJONAŁU W OBSZARZE SZCZELINY SMARNEJ

W szczelinie smarnej gradienty ciśnienia występują tylko w kierunku obwodowym oraz osiowym łożyska, co wynika z równania Reynoldsa (2.1) i ma swoje odzwierciedlenie w funkcjonałe (3.1). Natomiast wzdłuż wysokości szczeliny smarnej przyjmuje się, że ciśnienie jest stałe. Z tego też względu minimalizację funkcjonału $X(p)$ można przeprowadzić na płaszczyźnie x, z (rys. 3), która jest rozwinięciem wewnętrznej powierzchni panwi porowatej. Należy przy tym pamiętać, że węzły o współrzędnej $x=0$ i $x=2\pi R$ są tymi samymi węzłami, dla których powinien być spełniony warunek brzegowy $p(0, z) \equiv p(2\pi R, z) = 0$.



Rys. 3

Dyskretyzacji obszaru filmu smarnego dokonano na elementy prostokątne, które stanowią ściany boczne elementów 8-węzłowych przyległych do powierzchni wewnętrznej tulei porowatej. Traktując rozpatrywany element jako liniowy i izoparametryczny, niezbędne do opisu tego elementu zależności można otrzymać bezpośrednio ze związków podanych poprzednio dla elementu przestrzennego, sprowa-

dzając je do układu płaskiego. Współrzędne znormalizowane, które stanowią lokalny układ współrzędnych (rys. 3) określone zostały następującymi wzorami:

$$(5.1) \quad v = \frac{x - x_c}{a}, \quad dv = \frac{dx}{a},$$

$$\zeta = \frac{z - z_c}{b}, \quad d\zeta = \frac{1}{b} dz.$$

Związki między układem globalnym x, y a lokalnym v, ζ przy wykorzystaniu funkcji kształtu dla prostokątnego elementu izoparametrycznego można przedstawić następująco:

$$(5.2) \quad x = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_m x_m = [N] \{x\}^e,$$

$$z = N_i z_i + N_j z_j + N_k z_k + N_m z_m = [N] \{z\}^e.$$

Funkcje kształtu w tym przypadku będą określone wzorami [3 i 7]:

$$(5.3) \quad N_i = \frac{1}{4} (1 + v v_i) (1 + \zeta \zeta_i),$$

gdzie, $v_i = \pm 1$, $\zeta_i = \pm 1$ są wartościami współrzędnych v, ζ w punktach węzłowych elementu.

Zmianę ciśnienia wewnątrz elementu można w przybliżeniu przedstawić w postaci:

$$(5.4) \quad p = N_i p_i + N_j p_j + N_k p_k + N_m p_m = [N] \{p\}^e,$$

co, jak łatwo sprawdzić, odpowiada liniowej zmianie ciśnienia w kierunkach x i z napisanej dla elementu w układzie globalnym

$$(5.5) \quad p = a_1 + b_1 x + c_1 z,$$

gdzie a_1, b_1, c_1 są to współczynniki stałe.

Zatem pierwsze pochodne ciśnienia występujące w funkcjonale (3.1) wewnątrz elementu mają wartości stałe i zapewniona jest ciągłość tych pochodnych na granicach elementów.

Minimalizację funkcjonau $X(p)$ względem parametrów węzłowych przeprowadza się element po elemencie. Ponieważ

$$(5.6) \quad X(p) = \sum_1^K X^e(p),$$

przeto

$$(5.7) \quad \frac{\partial X(p)}{\partial \{p\}} = \sum_1^K \frac{\partial X^e(p)}{\partial \{p\}^e} = 0,$$

gdzie K oznacza liczbę elementów prostokątnych na powierzchni S . Dla każdego elementu można napisać przeprowadzając różniczkowanie:

$$(5.8) \quad \frac{\partial X^e(p)}{\partial p_i} = \frac{1}{2} \iint_{S^e} \left[-\frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \frac{h^3}{12\eta_0} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} hU \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] dx dz - \iint_{S^e} w_0 \frac{\partial p}{\partial p_i} dx dz.$$

gdzie S^e oznacza powierzchnię elementu.

Obliczenie wyrażenia (5.8) przeprowadza się w lokalnym układzie współrzędnych v, ζ , wykorzystując następujące wzory:

$$(5.9) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial x} p_i, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial z} p_i, \\ \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\partial N_i}{\partial z}$$

oraz transformacje współrzędnych

$$(5.10) \quad \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial v} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix}.$$

Dla obliczenia pochodnych globalnych należy dokonać odwrócenia we wzorze (5.10):

$$(5.11) \quad \frac{\partial N_i}{\partial x} = [1, 0] [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial v} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{a} \frac{\partial N_i}{\partial v}.$$

Dla elementu powierzchni otrzymuje się

$$(5.12) \quad dx dz = \det [J] dv d\zeta = ab dv d\zeta.$$

Wykorzystując powyższe wzory wyrażeniu (5.8) napisanemu w układzie lokalnym nadamy postać

$$(5.13) \quad \frac{\partial X^e}{\partial p_i} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ -\frac{h^3}{192\eta_0 a^2} [(1-v)^2 - (1-v)^2 - (1+v)(1-v) + \right. \\ \left. + (1+v)(1-v)] \{p\}^e - \frac{h^3}{192\eta_0 b^2} [(1-\zeta)^2 + (1+\zeta)(1-\zeta) - (1+\zeta)(1-\zeta) - \right. \\ \left. - (1-\zeta)^2] \{p\}^z - \frac{hU}{8a} (1-v) \right\} ab dv d\zeta - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 w_0 N_i ab dv d\zeta.$$

Pochodną (5.13) oblicza się w rozbięciu na poszczególne całki. Chociaż w nawiasach kwadratowych występują proste funkcje, to jednak ze względu na potęgę h^3 występującą przed nawiasem kwadratowym obliczenie się komplikuje.

Wysokość szczeliny smarnej przy równoległym położeniu osi czopa i tulei można określić ze wzoru (5.14) napisanym w układzie globalnym:

$$(5.14) \quad h = c (1 + \varepsilon \cos \theta).$$

Wykorzystując funkcje kształtu (5.3) zmianę wysokości szczeliny smarnej wewnątrz elementu można w przybliżeniu przedstawić w postaci

$$(5.15) \quad h = N_i h_i + N_j h_j + N_k h_k + N_m h_m = [N] \{h\}^e.$$

Przyjmując ponadto, że $h_i = h_m$ oraz $h_j = h_k$, po dość żmudnych przeliczeniach otrzymuje się;

$$(5.16) \quad \frac{\partial X}{\partial \{p\}^e} = -\frac{b}{144\eta_0 a} (h_i^3 + h_j^3 + h_i^2 h_j + h_i h_j^2) [z_1] \{p\}^e - \\ - \frac{a}{360\eta b} [M] \{p\}^e + \frac{ab^2}{4} U(h_i + h_j) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \{Q\}^e,$$

gdzie $[z_1]$ —macierz współczynników stałych (4×4)

$$[M] = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & -B_1 & -A_1 \\ B_1 & D_1 & -D_1 & -B_1 \\ -B_1 & -D_1 & +D_1 & B_1 \\ -A_1 & -B_2 & B_1 & A_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} A_1 &= 10h_i^3 + h_j^3 + 6h_i^2 h_j + 3h_j^2 h_i, \\ B_1 &= 2h_i^3 + 2h_j^3 + 3h_i^2 h_j + 3h_j^2 h_i, \\ D_1 &= h_i^3 + 10h_j^3 + 3h_i^2 h_j + 6h_j^2 h_i, \end{aligned}$$

$$\{Q\}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N] w_0 db dv d\zeta.$$

W końcu wyrażenie (5.16) można napisać w postaci

$$(5.17) \quad \frac{\partial X}{\partial \{p\}^e} = [G]^e \{p\}^e + \{F\}^e - \{Q\}^e,$$

gdzie

$$\{F\}^e = \frac{ab^2}{4} U(h_i + h_j) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dla całego obszaru szczeliny smarnej otrzymuje się

$$(5.18) \quad \frac{\partial X}{\partial \{p\}} = [G] \{p\} + \{F\} - \{Q\} = 0,$$

gdzie $[G]$ oznacza macierz przepływu o wymiarze $n \times n$ oraz $\{F\}$, $\{Q\}$ macierze kolumnowe o wymiarze n .

6. KONSTRUKCJA ROZWIĄZANIA

W wyniku minimalizacji funkcjonalów w obszarze tulei porowatej i szczeliny smarnej otrzymuje się dwa układy równań liniowych (4.14) i (5.17)

$$(6.1) \quad \begin{aligned} [S] \{p^x\} + \{Q\} &= 0, \\ [G] \{p\} + \{F\} - \{Q\} &= 0. \end{aligned}$$

Ponieważ minimalizacja funkcjonalu w obszarze szczeliny smarnej Ω_1 dotyczy powierzchni wewnętrznej tulei porowatej, która jest powierzchnią brzegową obszaru Ω_2 , sprzęgającą oba obszary przez warunek ciągłości przepływu (2.6), przeto powyższe dwa układy równań można sprowadzić do jednego układu równań liniowych. Rugując z obu układów równań wydatek powierzchniowy $\{G\}$ uzyskuje się

$$(6.2) \quad [S^1] \{p_1\} + \{F\} = 0,$$

gdzie

$$[S^1] = [S] + [G].$$

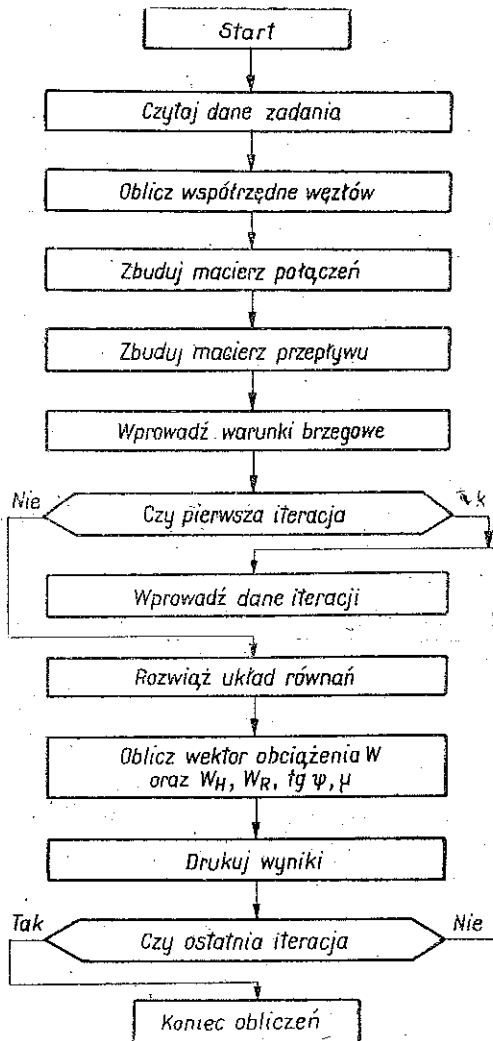
Wprowadzając warunki brzegowe i rozwiązując układ równań (6.2) otrzymuje się rozkład ciśnień w łożysku porowatym, opisany przez wartości ciśnień w punktach węzłowych.

Układ równań (6.2) można otrzymać bezpośrednio, traktując łożysko jako jeden obszar składający się z dwóch podobszarów (szczeliny smarnej i tulei porowatej) $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$ o różnych własnościach fizycznych. Wówczas warunek brzegowy (2.6) określający ciągłość przepływu przez powierzchnię rozgraniczającą dwa podobszary sprowadza się do warunku wewnętrznego.

Z punktu widzenia realizacji programu obliczeniowego optymalny jest przypadek, gdy całą macierz przepływu $[S^1]$ i wektor prawych stron $\{F\}$ można zmieścić w pamięci operacyjnej. Jak wiadomo, korzystanie z pamięci zewnętrznej w poważnym stopniu wydłuża czas obliczeń.

Macierz przepływu $[S^1]$ jest symetryczna i pasmowa, stąd w obliczeniach wykorzystuje się połowę szerokości pasma. Na szerokość pasma istotny wpływ ma numeracja węzłów, którą należy tak przeprowadzać, aby szerokość pasma była najmniejsza. W przypadku węzłów leżących na powierzchni wewnętrznej panwi wyrazy macierzy przepływu S^1_{ij} są sumą wyrażen S_{ij} oraz G_{ij} . Wektor prawych stron $\{F\}$ ma wyrazy niezerowe tylko dla węzłów leżących na powierzchni wewnętrznej panwi. Do tak zbudowanego układu równań wystarczy wprowadzić tylko warunki brzegowe (2.3) oraz (2.7), ponieważ warunki brzegowe (2.4) i (2.5) są automatycznie spełnione przez funkcję minimalizującą funkcjonal (co wykazano w punkcie 3), a warunek brzegowy (2.8) wprowadza się w dalszym etapie obliczeń (p. 8). Wyprowadzenie warunków brzegowych (2.3) oraz (2.7) ze względu na ich jednorodność jest szczególnie proste. W tym celu dla danego węzła brzegowego należy wyzerować odpowiedni wiersz i kolumnę macierzy, a na głównej przekątnej postawić jedynek; ponadto należy wprowadzić zero na odpowiednią pozycję wektora prawych stron.

Do rozwiązania układu równań (6.2) wykorzystano metodę eliminacji Gaussa. Ponieważ wyrazy na głównej przekątnej mają tu wartości kilkakrotnie większe niż leżące poza nią, odpada potrzeba poszukiwania elementów głównych. Schemat logiczny programu przedstawiono na rys. 4.



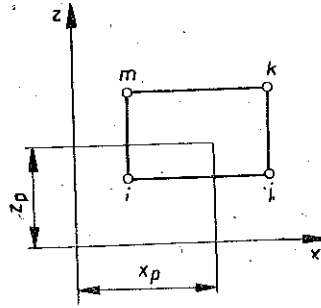
Rys. 4

7. NOŚNOŚĆ ŁOŻYSKA ORAZ POŁOŻENIE WYPADKOWEJ SIŁY HYDRODYNAMICZNEGO WYPORU

Po obliczeniu ciśnień w punktach węzłowych można obliczyć wypadkową siłę hydrodynamicznego wyporu działającą na powierzchnię panwi, która w przypadku gdy między powierzchniami panwi i czopa występuje tarcie płynne jest równa noś-

ności łożyska. Wartość siły hydrodynamicznego wyporu działającą na prostokątny element leżący na powierzchni S (rys. 5) można obliczyć ze wzoru

$$(7.1) \quad R^e = \iint_{S^e} p \, dx \, dz = ab (p_i + p_j + p_k + p_m) = ab \sum_{i=1}^4 p_i.$$



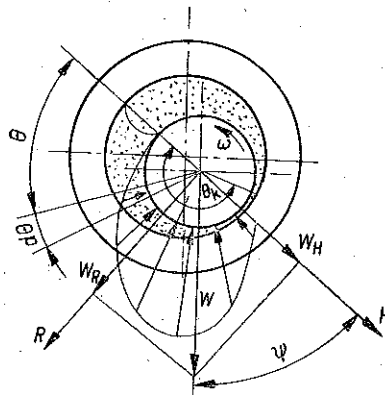
Rys. 5

Współrzedną przyłożenia siły R^e można określić ze wzorów

$$(7.2) \quad x_p = \frac{\iint_{S^e} x p \, dx \, dz}{\iint_{S^e} p \, dx \, dz} = \frac{1}{3} \frac{(2x_i + x_j)(p_i + p_m) + (x_i + 2x_j)(p_j + p_k)}{p_i + p_j + p_k + p_m},$$

$$z_p = \frac{1}{3} \frac{(2z_i + z_m)(p_i + p_j) + (z_i + 2z_m)(p_k + p_m)}{\sum_{i=1}^4 p_i}.$$

Współrzedną z_p oblicza się tylko w przypadku, gdy oś czopa nie jest równoległa do osi tulei. Jeśli obie osie są równoległe to poszukuje się tylko kąta położenia wypadkowej siły wyporu hydrodynamicznego, gdyż w kierunku osi z będzie ona położona w połowie długości łożyska.



Rys. 6

Kąt działania wypadkowej siły hydrodynamicznego wyporu dla pojedynczego elementu wyniesie

$$(7.3) \quad \theta^e = \frac{x_p}{R^e}.$$

Dodając siły działające na poszczególne elementy, można obliczyć całkowitą siłę hydrodynamicznego wyporu i kąt jej działania. Przyjmując układ odniesienia jak na rys. 6 oraz pomijając siły tarcia jako bardzo małe, składowe wektora obciążenia zewnętrznego można obliczyć ze wzorów

$$(7.4) \quad W_H = - \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\theta_K} p \cos \theta R d\theta dz = - \sum_1^K R^e \cos \theta^e,$$

$$W_R = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{\theta_K} p \sin \theta R d\theta dz = \sum_1^K R^e \sin \theta^e.$$

Wektor obciążenia zewnętrznego czyli nośność łożyska otrzymuje się sumując geometrycznie obliczone wektory W_H i W_R :

$$(7.5) \quad W = \sqrt{W_H^2 + W_R^2}.$$

Kąt działania obciążenia oblicza się ze wzoru

$$(7.6) \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{W_R}{W_H}.$$

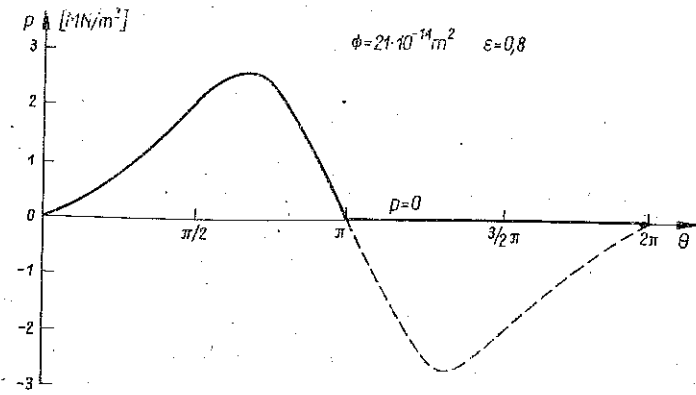
Mając obliczone powyższe wielkości, można obliczyć pozorny współczynnik tarcia w łożysku:

$$(7.7) \quad \mu = \frac{c\varepsilon}{2R} \sin \psi + \frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{\eta_0 URL}{Wc}.$$

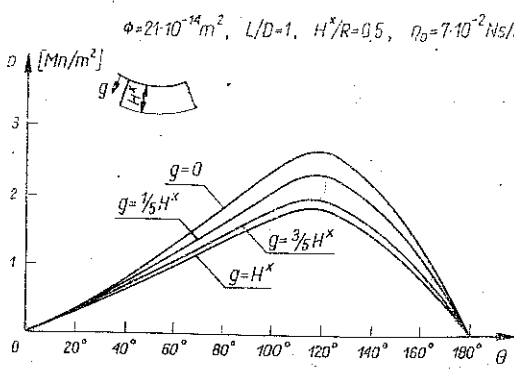
8. PODSUMOWANIE

Rozwiązując układ równań (6.2) z pominięciem warunku brzegowego (2.8) otrzymuje się w filmie smarnym rozkład ciśnień pokazany na rys. 7. Rozpiętość klina smarnego można określać z warunków Sommerfelda (2.7) bądź Reynoldsa (2.8). Wykorzystując w obliczeniach warunki Sommerfelda, pomija się strefę występowania ujemnych ciśnień jako sprzeczną z zasadą ciągłości przepływu cieczy, przyjmując w tej strefie stałą wartość ciśnienia $p=0$. Jak w takim przypadku wyglądają rozkłady ciśnień w obszarze tulei porowatej pokazano na rys. 8, 9 i 10.

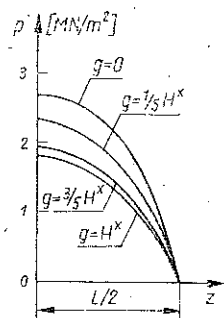
Wprowadzenie do obliczeń warunków Reynoldsa uzyskuje się na drodze iteracyjnej. Mając rozkład ciśnień uzyskany z rozwiązania bezpośredniego, przeprowadza się dalsze rozwiązania, wprowadzając kolejno w miejsce ujemnych ciśnień, ciśnienie $p=0$. Ten tok postępowania prowadzi się do momentu, kiedy w obliczeniach nie występują ciśnienia ujemne.



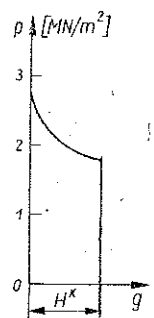
Rys. 7



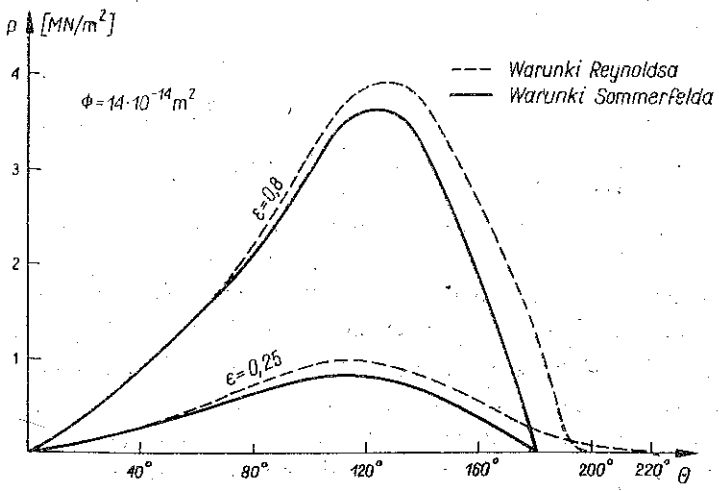
Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10



Rys. 11

Po przeprowadzonych iteracjach uzyskuje się nowy rozkład ciśnień w filmie smarnym oraz wzrost rozpiętości klina smarnego, którego granice wyznaczone będą warunkami (2.8). Uzyskane w ten sposób rozkłady ciśnień w filmie smarnym dla izotropowej tulei o wymiarach $\varnothing 20/\varnothing 30 \times 20$ mm mającej przepuszczalność $\varnothing = 14 \cdot 10^{-14}$ m² pokazano na rys. 11.

Obszerne zastosowanie programu do analizy zagadnienia hydrodynamicznego smarowania łożysk porowatych przedstawione zostało w pracach [7, 8 i 9].

Mimo że program napisany został pod kątem zastosowania go do analizy zagadnienia hydrodynamicznego smarowania łożysk porowatych, to jednak równanie dobrze może być wykorzystane do rozwiązywania szeregu problemów fizycznych opisywanych przez równanie Laplace'a czy Poissona. Na podkreślenie zasługuje również fakt, że całkowanie funkcji zawartych w macierzy elementu dokonano w sposób ścisły, co ma zasadniczy wpływ na dokładność obliczeń i skrócenie czasu ich trwania. Program jest prosty w eksploatacji i może stanowić szybkie i łatwo dostępne narzędzie do rozwiązywania wielu problemów technicznych. Wymienić tutaj można między innymi: 1) filtrację cieczy przez ośrodki porowate w zastosowaniach zwłaszcza w budownictwie wodnym czy lądowym, jak również w eksploatacji złóż ropy naftowej; 2) laminarne przepływy cieczy; 3) przewodnictwo i wymiana ciepła oraz 4) rozkłady potencjału elektrycznego i magnetycznego.

Do analizy tych problemów można niemal bezpośrednio wykorzystać opracowany program obliczeniowy. W zależności od potrzeb i zakresu zagadnienia można wykorzystać cały program, bądź tylko jego fragmenty związane z równaniem Laplace'a czy Poissona (Reynoldsa). Do analizy pracy łożysk konwencjonalnych wystarczy np. wykorzystać tylko rozwiązania równania Reynoldsa. Sprowadzając to równanie do postaci uproszczonej odnoszącej się do łożyska wąskiego (pomijając w równaniu (2.1) wyraz zawierający $\partial p/\partial \theta$), dla którego istnieje rozwiązanie ścisłe, różnica między wynikami otrzymanymi z rozwiązania numerycznego (nawet przy niezbyt gęstej dyskretyzacji rozpatrywanego obszaru np. 400 węzłów) i analitycznego wystąpiła na czwartym miejscu znaczącym. Otrzymano również dobrą zgodność wyników obliczeń numerycznych z wynikami eksperymentów dla całego programu dotyczącego łożysk porowatych, co zostało przedstawione w pracy [9].

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. ALLAN, *The application of finite element analysis to hydrodynamic and externally pressurised bearings*, Wear, 19, 2, 1972.
2. A. CAMERON, *Basic lubrication theory*, Longman, London 1971.
3. I. ERGATONDIS, B. M. IRONS, O. C. ZIENKIEWICZ, *Curved, isoparametric quadrilateral elements for finite element analysis*, Int. J. Solides Struc., 1968.
4. I. CELFAND, W. FOMIN, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1972.
5. K. KRZEMIŃSKI, T. MARKS, *Zastosowanie metody elementów skończonych w zagadnieniach hydrodynamicznego smarowania poprzecznych łożysk ślizgowych*, Roz. Inż., 24, 4, 1976.
6. K. KRZEMIŃSKI, *Zastosowanie metody elementów skończonych w hydrodynamicznej teorii smarowania łożysk porowatych*, Ref. II Konf. Metody Kom. w Mech. Konstrukcji, Gdańsk 1975.
7. K. KRZEMIŃSKI, *Wpływ anizotropii tulei porowatej na własności użytkowe łożyska ślizgowego*, Przeg. Mech., 22, 1976.

8. K. KRZEMIŃSKI, *Rozkład ciśnień i nośność hydrodynamicznego filmu smarnego w łożyskach porowatych*, Mech. Teoret. Stos., 2, 1978.
9. K. KRZEMIŃSKI, *Analiza oporów ruchu w porowatych łożyskach ślizgowych*, Arch. Bud. Masz., 3, 1978.
10. W. C. MAK, M. D. CONWAY, *The lubrication of a long, porous flexible journal bearing*, Trans. ASME, 4, 1977.
11. P. R. K. MURTI, *Analysis of porous slider bearings*, Wear, 28, 1974.
12. P. R. K. MURTI, *Dynamic behavior of pure squeeze film in narrow porous bearings*, Trans. ASME, 3, 1974.
13. M. REMBIARZ, *Plaski przepływ oleju w łożysku ślizgowym z panewką porowatą*, Arch. Bud. Masz., 2, 1973.
14. W. T. ROULEAU, L. T. STEIER, *Hydrodynamic porous journal bearings*, Trans. ASME, 3, 1974.
15. D. V. SINGH, R. SINHASAN, *Stability and relative stability of porous journal bearing system with axes skewed*, Trans. ASME, 96, 4, 1974.
16. U. SRINIVASAN, *Axially undefined porous journal bearings considering cavitation and using the Beavers-Joseph criterion of velocity slip*, Wear 1, 1977.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ПРОБЛЕМАТИКЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СМАЗКИ

В статье представлен алгоритм решения уравнений движения жидкости в пористом подшипнике методом конечных элементов. Анализ касается подшипника конечной длины, работающего в условиях жидкого трения, в котором пространственное движение жидкости описано в смазочной щели уравнением Рейнольдса, а в пористой втулке уравнением Лапласа. Приведено описание строения расчетной программы, написанной на языке Фортран IV, которая дает возможность вычислять распределения давлений, несущей способности подшипника, угла действия нагрузки и коэффициента трения для произвольной поперечной формы пористого подшипника и анизотропного строения пористой втулки.

SUMMARY

APPLICATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD TO THE PROBLEMS OF HYDRO-
DYNAMIC LUBRICATION

This paper presents an algorithm for solving the equation of motion of lubricants in porous bearings. An analysis is made for the bearing of finite length, working under hydrodynamic lubrication condition. The three-dimensional motion of the lubricant in the clearance space and porous bushing is described, by the Reynolds and Laplace equations respectively. A computer program written in FORTRAN IV is described. The program can be used to determine the pressure distribution, the bearing load capacity, the angle of action of the load and the coefficient of friction for any shape of the porous bearing and anisotropic properties of its material.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT TECHNIKI LOTNICZEJ I MECHANIKI STOSOWANEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 11 maja 1978 r.