

ZGINANIE STOŻKOWEJ POWŁOKI PERFOROWANEJ OBCIĄŻONEJ OBROTOWO-SYMETRYCZNIE

ROMAN NAGÓRSKI i ZENON RYCHTER (WARSZAWA)

W pracy uzyskano rozwiązanie problemu zginania sprężystej, stożkowej powłoki perforowanej o gęstej siatce. Przyjęto ciągły model obliczeniowy przedstawiony w monografii [1]. Wykorzystano wyprowadzone w pracy [2] równania różniczkowe typu Meissnera, których rozwiązanie w przypadku rozważanej powłoki stożkowej uzyskano za pomocą szeregów potęgowych. Uwzględniono technicznie ważne przypadki obciążeń. Szczegółowo rozważono powłokę o jednym brzegu obciążoną ciężarem własnym przy dwóch rodzajach podparcia brzegu. Podano przykład liczbowy.

WSTĘP

Przedmiotem pracy jest rozwiązanie problemu zginania cienkiej, perforowanej powłoki stożkowej obciążonej obrotowo-symetrycznie przy założeniu, że materiał powłoki jest liniowo sprężysty, jednorodny i izotropowy, grubość zaś powłoki jest stała, a siatka perforacji gęsta.

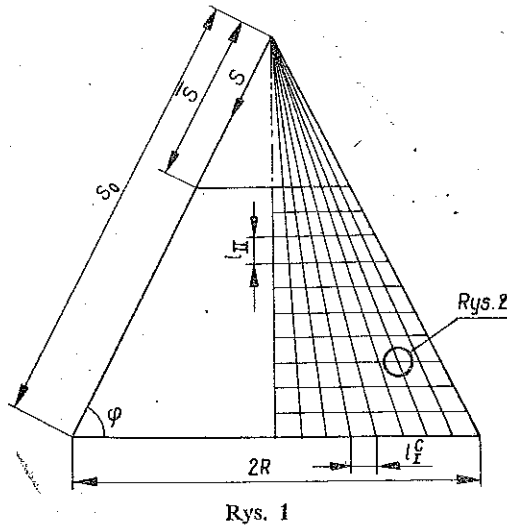
Przyjęto ciągły model obliczeniowy przedstawiony w monografii [1]. W porównaniu z innymi modelami obliczeniowymi, polegającymi na aproksymacji ośrodka ortotropową powłoką o strukturze ciągłej [3], uwzględnia on obroty węzłów, tj. zakłada się, że mają one niezależne (nieskrępowane) stopnie swobody oraz wpływ momentów «polarnych» w przekrojach elementów na pracę statyczną. Przedstawiony w pracy algorytm zezwala przy odpowiednim doborze współczynników charakteryzujących sztywność ustroju otrzymać rozwiązania dla modeli uproszczonych (techniczna ortotropia), jak również dla powłok ściśle ortotropowych i izotropowych o strukturze ciągłej.

Punktem wyjścia rozważań są wyprowadzone w pracy [2] równania typu Meissnera dla obrotowych powłok perforowanych obciążonych obrotowo-symetrycznie. Rozwiązanie wyżej wymienionych równań dla rozważanej powłoki stożkowej uzyskano za pomocą rzeczywistych szeregów potęgowych. Wyprowadzono wzory na siły wewnętrzne i przemieszczenia, przy czym uwzględniono różne, praktycznie ważne obciążenia. Szczegółowo rozważono powłokę o jednym brzegu obciążoną ciężarem własnym przy dwóch rodzajach podparcia brzegu, podano przykład liczbowy.

1. PODSTAWOWE RÓWNANIA I ZWIĄZKI

Rozważymy powłokę perforowaną ukształtowaną na powierzchni stożkowej (rys. 1). Wykorzystamy wyprowadzone w pracy [2] następujące równania równowagi:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \frac{d}{ds}(sN_2) - N_1 + sp_2 &= 0, \\ \frac{d}{ds}(sQ) + N_1 \operatorname{tg} \varphi + sp_3 &= 0, \\ \frac{d}{ds}(sM_2) - M_1 + M \operatorname{tg} \varphi - sQ + sm &= 0 \end{aligned}$$



związki fizyczne

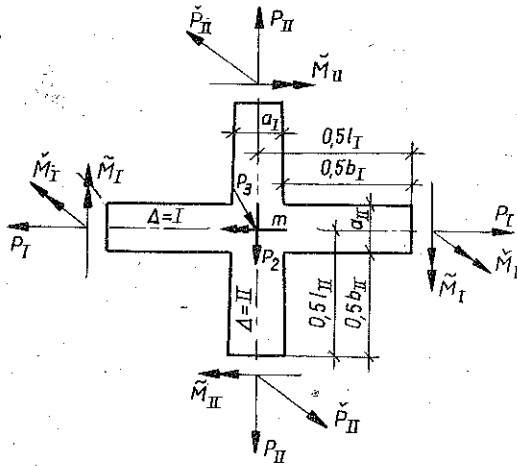
$$(1.2) \quad \begin{aligned} N_1 &= C_I \left(\frac{v - w \operatorname{tg} \varphi}{s} + v_I \frac{dv}{ds} \right) - C_I (\dot{\epsilon}_1 + v_I \dot{\epsilon}_2), \\ N_2 &= C_{II} \left(\frac{dv}{ds} + v_{II} \frac{v - w \operatorname{tg} \varphi}{s} \right) - C_{II} (\dot{\epsilon}_2 + v_{II} \dot{\epsilon}_1), \\ M_1 &= -D_I \left(\frac{\theta}{s} + v_I \frac{d\theta}{ds} \right) - D_I (\dot{\kappa}_1 + v_I \dot{\kappa}_2), \\ M_2 &= -D_{II} \left(\frac{d\theta}{ds} + v_{II} \frac{\theta}{s} \right) - D_{II} (\dot{\kappa}_2 + v_{II} \dot{\kappa}_1), \\ M &= \check{S}_I \frac{\theta}{s} \operatorname{tg} \varphi, \quad Q = \check{R}_{II} \left(\frac{dw}{ds} - \theta \right), \end{aligned}$$

gdzie

$$(1.3) \quad C_A = \frac{h\tilde{E}_A}{1-\nu_I\nu_{II}}, \quad D_A = \frac{h^3\tilde{E}_A}{12(1-\nu_I\nu_{II})}, \quad \check{S}_I = \frac{h\check{a}_I^2\tilde{E}_I l_I}{12b_I}$$

$$\check{R}_{II} = \frac{h^3\tilde{E}_{II}}{b_{II}^2}, \quad \tilde{E}_A = E \frac{\check{a}_A}{l_A}, \quad \nu_A = \nu \frac{a_A}{l_A} \quad (A=I, II)$$

oraz gdzie E oznacza moduł sprężystości Younga, ν stałą Poissona, h stałą grubość powłoki, przy czym przez w, v, θ oznaczono liniowe przemieszczenie normalne i ślizyczne oraz kąt obrotu węzłów, a przez $\check{e}_i, \check{\kappa}_i$ ($i=1, 2$) odkształcenia wstępne; $b_A, l_A, \check{a}_A, l_A, a_A$ ($A=I, II$) są charakterystykami geometrycznymi perforacji (rys. 2) oraz p_2, p_3, m składowymi obciążenia odniesionymi do jednostki pola środkowej powierzchni.



Rys. 2

Między występującymi w równaniach (1.1) oraz we wzorach (1.2) wielkościami typu statycznego N_i, M_i, M, Q ($i=1, 2$), a rzeczywistymi siłami P_A i \check{P}_{II} oraz momentami \check{M}_A i \check{M}_I ($A=I, II$) w przekrojach środkowych elementów powłoki zachodzą następujące związki (rys. 2):

$$(1.4) \quad P_I = N_I l_I, \quad P_{II} = N_2 l_{II}, \quad P_{II} = Q l_{II},$$

$$\check{M}_I = M_1 l_I, \quad \check{M}_{II} = M_2 l_{II}, \quad M_I = M l_I.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej:

$$(1.5) \quad U = sQ$$

i wykonaniu odpowiednich przekształceń równań (1.1)_{1,2} znajdujemy

$$(1.6) \quad N_1 = -\frac{dU}{ds} \operatorname{ctg} \varphi - sp_3 \operatorname{ctg} \varphi, \quad N_2 = -\frac{U}{s} \operatorname{ctg} \varphi - \frac{P_2}{s \sin \varphi \cos \varphi},$$

$$P_2 = P^0 \bar{s} \cos \varphi + \int_s^{\bar{s}} \zeta (p_2 \sin \varphi \cos \varphi + p_3 \cos^2 \varphi) d\zeta,$$

gdzie P^0 oznacza intensywność składowej pionowej obciążenia równomiernego górnego brzegu powłoki o współrzędnej $s = \bar{s}$.

W przypadku, gdy \tilde{E}_A, ν_A ($A=I, II$), \tilde{K}_{II} i \tilde{S}_I są stałe, równania typu Meissnera dla powłok perforowanych przyjmują [2] postać

$$(1.7) \quad L_2(U) - \alpha_1 \frac{U}{s} \operatorname{tg}^2 \varphi - \tilde{E}_I h \theta \operatorname{tg}^2 \varphi = F_2, \quad L_2(\theta) - \alpha_2 \frac{\theta}{s} \operatorname{tg}^2 \varphi + \frac{U}{D_{II}} = G_2,$$

gdzie $L_2(\dots)$ jest operatorem różniczkowym zwyczajnym drugiego rzędu

$$(1.8) \quad L_2(\dots) = s \frac{d^2(\dots)}{ds^2} + \frac{d(\dots)}{ds} - \frac{\alpha}{s}(\dots)$$

oraz

$$(1.9) \quad F_2 = \frac{\nu_{II}}{\cos^2 \varphi} \frac{dP_2}{ds} + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi} \frac{P_2}{s} - \frac{d}{ds}(s^2 p_3) - \nu_{II} s p_3 + \tilde{E}_I h \left[\frac{a}{ds}(s \dot{\varepsilon}_1) - \dot{\varepsilon}_2 \right] \operatorname{tg} \varphi,$$

$$G_2 = \frac{sm}{D_{II}} - s \frac{d}{ds}(\dot{\kappa}_2 + \nu_{II} \dot{\kappa}_1) - (1 - \nu_{II}) \dot{\kappa}_2 + (\alpha - \nu_{II}) \dot{\kappa}_1,$$

$$\alpha_1 = \frac{\tilde{E}_I h}{\tilde{K}_{II}} = \frac{\alpha b_{II}^2}{h^2}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha a_{II}^2 l_I}{h^2 b_I} (1 - \nu_I \nu_{II}), \quad \alpha = \frac{\tilde{E}_I}{\tilde{E}_{II}}.$$

Z założenia stałości \tilde{E}_A, ν_A ($A=I, II$), \tilde{K}_{II} i \tilde{S}_I oraz z obrotowej symetrii ustroju wynika

$$(1.10) \quad l_I = \tilde{l}_{II} = l_I^c s, \quad l_I^c = \text{const}, \quad a_I = \tilde{a}_{II} = \mu_{II} l_I = a_I^c s,$$

$$a_I^c = \mu_{II} l_I^c, \quad a_{II} = \tilde{a}_I = \mu_I l_{II} = \text{const}, \quad l_{II} = l_I = \text{const}.$$

Na podstawie (1.9)₃₋₅, (1.10) mamy

$$(1.11) \quad \alpha_1 = \alpha \frac{l_{II}^2 (1 - \mu_I)^2}{h^2}, \quad \alpha_2 = \alpha \frac{\mu_I^2 l_{II}^2 (1 - \nu_I \nu_{II})}{h^2 (1 - \mu_{II})}, \quad \alpha = \frac{\mu_I}{\mu_{II}}$$

oraz

$$(1.12) \quad \tilde{E}_A = E \mu_A = \text{const}, \quad D_A = \frac{h^3 E \mu_A}{12 (1 - \nu_I \nu_{II})} = \text{const} \quad (A=I, II).$$

Przemieszczenia v i w wyznaczmy ze wzorów [2]

$$(1.13) \quad v = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{h} \int \frac{1}{\tilde{E}_I} \left[\nu_I \frac{dU}{ds} - \alpha \frac{U}{s} - \frac{\alpha P_2}{s \cos^2 \varphi} + \nu_{II} s p_3 + \tilde{E}_I h \dot{\varepsilon}_2 \operatorname{tg} \varphi \right] ds,$$

$$w = \left[v - \frac{s}{\tilde{E}_I h} (N_1 - \nu_{II} N_2) - s \dot{\varepsilon}_1 \right] \operatorname{ctg} \varphi.$$

Następnie wykonamy przekształcenia niektórych wyżej podanych równań i związków oraz wyprowadzimy odpowiednie wzory pożyteczne w rozwiązaniach zamieszczonych w punktach 2 i 3.

Powróćmy do układu równań (1.7). Dokonajmy zamiany wielkości niewiadomych θ , U oraz zmiennej s :

$$(1.14) \quad s = s_0 x, \quad \theta(s) = \frac{s_0^2}{D_{II}} \bar{\theta}(x), \quad U(s) = s_0 \bar{U}(x),$$

gdzie s_0 jest długością tworzącej stożka.

Otrzymujemy wtedy

$$(1.15) \quad L_2^1(\bar{U}) - \beta_0 \bar{\theta} = F_2^{(x)}, \quad L_2^2(\bar{\theta}) + \bar{U} = G_2^{(x)},$$

gdzie

$$(1.16) \quad L_2^i(\dots) = x \frac{d^2(\dots)}{dx^2} + \frac{d(\dots)}{dx} - \frac{\beta_i(\dots)}{x} \quad (i=1, 2),$$

$$F_2^{(x)} = v_{II} s_0 p_2 x \operatorname{tg} \varphi - s_0 \frac{d}{dx} (x^2 p_3) + \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi} \frac{p_2^{(x)}}{x} + \tilde{E}_1 h \left[\frac{d}{dx} (x \dot{e}_1) - \dot{e}_2 \right] \operatorname{tg} \varphi,$$

$$G_2^{(x)} = x m - \frac{D_{II}}{s_0} \left[x \frac{d}{dx} (\dot{\kappa}_2 + v_{II} \dot{\kappa}_1) - (1 - v_{II}) \dot{\kappa}_2 + (\alpha - v_{II}) \dot{\kappa}_1 \right],$$

$$P_2^{(x)} = \frac{P_2}{s_0} = P^0 \bar{x} \cos \varphi + s_0 \int_x^x t (p_2 \sin \varphi \cos \varphi + p_3 \cos^2 \varphi) dt, \quad \bar{x} = \frac{\bar{s}}{s_0},$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \operatorname{tg}^2 \varphi + \alpha = \alpha \left[\frac{l_{II}^2 (1 - \mu_1)^2}{h^2} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 \right],$$

$$\beta_2 = \alpha_2 \operatorname{tg}^2 \varphi + \alpha = \alpha \left[\frac{\mu_1^2 l_{II}^2 (1 - \nu_1 \nu_{II})}{h^2 (1 - \mu_{II})} \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 \right],$$

$$\beta_0 = \frac{s_0^2}{D_{II}} \tilde{E}_1 h \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Układ równań (1.15) jest czwartego rzędu. Rozwiązanie ogólne ma postać

$$(1.17) \quad \bar{\theta}(x) = \sum_{i=1}^4 A_i \theta_i(x) + \theta_s(x), \quad \bar{U}(x) = \sum_{i=1}^4 A_i U_i(x) + U_s(x),$$

gdzie θ_s i U_s są całkami szczególnymi, θ_i i U_i ($i=1-4$) niezależnymi układami całek równań jednorodnych (1.15) (przy $F_2^{(x)} = G_2^{(x)} = 0$), A_i ($i=1-4$) dowolnymi stałymi całkowania.

Wzory (1.13) po uwzględnieniu (1.14), (1.6)_{1,2} i (1.16)₄ przekształcimy do postaci

$$(1.18) \quad v = \frac{s_0 \operatorname{ctg} \varphi}{\tilde{E}_1 h} (v_{II} \bar{U} - \alpha V_u + \mathbf{A} + V_p),$$

$$w = \frac{s_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\tilde{E}_1 h} \left(x \frac{d\bar{U}}{dx} - \alpha V_u + \mathbf{A} + V_p - \frac{v_I}{\cos^2 \varphi} P_2^{(x)} + s_0 x^2 p_3 - x \tilde{E}_1 h \dot{e}_1 \operatorname{tg} \varphi \right),$$

gdzie

$$(1.19) \quad V_u = \int \frac{\bar{U}}{x} dx, \quad V_p = \int \left(v_{II} s_0 x p_3 - \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi} \frac{P_2^{(x)}}{x} + \tilde{E}_1 h \tilde{\varepsilon}_2 \operatorname{tg} \varphi \right) dx.$$

Wprowadzimy następujące oznaczenia:

$$(1.20) \quad \begin{aligned} Q^0 &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^4 A_i U_i, & N_1^0 &= \sum_{i=1}^4 A_i \frac{dU_i}{dx}, & \theta^0 &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^4 A_i \theta_i, \\ M_1^0 &= \sum_{i=1}^4 A_i \left(\frac{\theta_i}{x} + v_i \frac{d\theta_i}{dx} \right), & M_2^0 &= \sum_{i=1}^4 A_i \left(\frac{d\theta_i}{dx} + v_{II} \frac{\theta_i}{x} \right), \\ v^0 &= \sum_{i=1}^4 A_i (v_{II} \bar{U}_i - \alpha V_i), & w^0 &= \sum_{i=1}^4 A_i \left(x \frac{dU_i}{dx} - \alpha V_i \right), \\ N_1^b &= s_0 x p_3, & N_2^b &= \frac{P_2^{(x)}}{x \cos^2 \varphi}, & v^b &= v_p + A, \end{aligned}$$

$$w^b = V_p + A - \frac{v_{II}}{\cos^2 \varphi} P_2^{(x)} + s_0 x^2 p_3 - x \tilde{E}_1 h \tilde{\varepsilon}_2 \operatorname{tg} \varphi,$$

$$Q^s = \frac{U_s}{x}, \quad N_1^s = \frac{dU_s}{dx}, \quad M_1^s = \frac{\theta_s}{x} + v_1 \frac{d\theta_s}{dx}, \quad M_2^s = \frac{d\theta_s}{dx} + v_{II} \frac{\theta_s}{x},$$

$$v^s = v_{II} U_s - \alpha V_s, \quad w^s = x \frac{dU_s}{dx} - \alpha V_s, \quad \theta^s = \frac{\theta_s}{x},$$

$$M_1^k = D_I (\tilde{\kappa}_1 + v_1 \tilde{\kappa}_2), \quad M_2^k = D_{II} (\tilde{\kappa}_2 + v_{II} \tilde{\kappa}_1),$$

przy czym

$$(1.21) \quad V_s = \int \frac{U_s}{x} dx, \quad V_i = \int \frac{U_i}{x} dx \quad (i=1-4).$$

Wykorzystując wzory (1.2)₃₋₆, (1.3), (1.6)_{1,2}, (1.11)_{2,3}, (1.14), (1.17)-(1.19) oraz uwzględniając (1.20) i (1.21), otrzymujemy ogólne wzory na wielkości statyczne geometryczne

$$(1.22) \quad \begin{aligned} Q &= Q^s + Q^0, & N_1 &= -(N_1^b + N_1^s + N_1^0) \operatorname{ctg} \varphi, & N_2 &= -(N_2^b + Q^s + Q^0) \operatorname{ctg} \varphi, \\ M_1 &= -\alpha s_0 (M_1^s + M_1^0) - M_1^k, & M_2 &= -s_0 (M_2^s + M_2^0) - M_2^k, \\ M &= \alpha_2 s_0 (\theta^s + \theta^0) \operatorname{tg} \varphi, \\ \theta &= \frac{s_0^2}{D_{II}} (\theta^s + \theta^0) x, & v &= \frac{s_0 \operatorname{ctg} \varphi}{\tilde{E}_1 h} (v^b + v^s + v^0), & w &= \frac{s_0 \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\tilde{E}_1 h} (w^b + w^s + w^0). \end{aligned}$$

Znając (1.22)₁₋₆ można wyznaczyć za pomocą związków (1.4) rzeczywiste siły i momenty w przekrojach środkowych elementów powłoki. W następnych punktach znajdziemy funkcje (1.20) wchodzące do wzorów (1.22).

2. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH PROBLEMU

Przedstawimy sposób rozwiązania równań różniczkowych (1.15) za pomocą szeregów potęgowych. Całek równań jednorodnych ($F_2^{(x)} = G_2^{(x)} = 0$) poszukujemy w postaci

$$(2.1) \quad \theta(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n x^n, \quad \bar{U}(x) = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n x^n.$$

Podstawiając (2.1) do (1.15) i przyrównując do zera współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej x , otrzymujemy ciąg wzorów rekurencyjnych na poszukiwane współczynniki \bar{a}_n i \bar{b}_n :

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (\lambda^2 - \beta_1) \bar{b}_0 &= 0, & (\lambda^2 - \beta_2) \bar{a}_0 &= 0, \\ [n+1](n+1+2\lambda) + \lambda^2 - \beta_1] \bar{b}_{n+1} - \beta_0 \bar{a}_n &= 0, \\ [(n+1)(n+1+2\lambda) + \lambda^2 - \beta_2] \bar{a}_{n+1} + \bar{b}_n &= 0. \end{aligned}$$

Jeżeli $\lambda_i = \pm \sqrt{\beta_i}$ ($i=1, 2$), to odpowiednio \bar{b}_0 i \bar{a}_0 są dowolne, a więc otrzymujemy cztery niezależne układy całek, które napiszemy w postaci

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \theta_1(x) &= -x^{\lambda_1+1} S_1(y), & U_1(x) &= x^{\lambda_1} T_1(y), \\ \theta_2(x) &= x^{\lambda_2} S_2(y), & U_2(x) &= x^{\lambda_2+1} T_2(y), \\ \theta_3(x) &= -x^{-\lambda_1+1} S_3(y), & U_3(x) &= x^{-\lambda_1} T_3(y), \\ \theta_4(x) &= x^{-\lambda_2} S_4(y), & U_4(x) &= x^{-\lambda_2+1} T_4(y), \end{aligned}$$

gdzie zgodnie z (2.1) i (2.2) mamy

$$S_i(y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} y^n, \quad T_i(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(i)} y^n \quad (i=1-4),$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\beta_1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\beta_2}, \quad y = x^2,$$

$$b_n^{(1)} =$$

$$= \frac{(-1)^n \beta_0^n b_0}{16^n n! [1 + \lambda_1(2-i)] \dots [n + \lambda_1(2-i)] (1 - n_1^{(i)}) (1 - n_3^{(i)}) \dots (n - n_1^{(i)}) (n - n_3^{(i)})},$$

$$(2.4) \quad a_n^{(i)} = \frac{b_n^{(i)}}{4(n+1-n_1^{(i)})(n+1-n_3^{(i)})}, \quad n_{1,3}^{(i)} = [1 + (i-2)\lambda_1 \pm \lambda_2] \frac{1}{2},$$

$$n \geq 1 \quad (i=1, 3),$$

$$a_n^{(i)} =$$

$$= \frac{(-1)^n \beta_0^n a_0}{16^n n! [1 + \lambda_2(3-i)] \dots [n + \lambda_2(3-i)] (1 - n_2^{(i)}) (1 - n_4^{(i)}) \dots (n - n_2^{(i)}) (n - n_4^{(i)})},$$

$$b_n^{(i)} = \frac{\beta_0 a_n^{(i)}}{4(n+1-n_2^{(i)})(n+1-n_4^{(i)})}, \quad n_{2,4}^{(i)} = [1 + (i-3)\lambda_2 \pm \lambda_1] \frac{1}{2},$$

$$n \geq 1 \quad (i=2, 4),$$

przy czym

$$(2.5) \quad \begin{aligned} n_1^{(1)} = n_4^{(4)} = v_1 &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_1 + \lambda_2), & n_2^{(2)} = n_3^{(3)} = v_2 &= \frac{1}{2} (1 + \lambda_1 - \lambda_2), \\ n_1^{(3)} = n_2^{(4)} = v_3 &= \frac{1}{2} (1 + \lambda_1 + \lambda_2), & n_3^{(1)} = n_4^{(2)} = v_4 &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

Szeregi S_i i T_i ($i=1-4$) zależą od parametrów β_0 , λ_1 i λ_2 . Można łatwo wykazać, stosując kryterium d'Alemberta, że są one zbieżne bezwzględnie dla dowolnego y .

Współczynniki a_0 i b_0 przyjmujemy w sposób dowolny bez wpływu na ogólność dalszych rozważań. Załóżmy np. $a_0 = b_0 = 1$.

Wyznamy wielkości V_i ($i=1-4$) określone za pomocą (1.21)₂. Po wykorzystaniu (2.3) i (2.4) otrzymujemy

$$(2.6) \quad \begin{aligned} V_1(x) &= x^{\lambda_1} \bar{V}_1(y), & V_2(x) &= x^{\lambda_2+1} \bar{V}_2(y), \\ V_3(x) &= \bar{x}^{\lambda_1} \bar{V}_3(y), & V_4(x) &= \bar{x}^{\lambda_2+1} \bar{V}_4(y), \end{aligned}$$

gdzie

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \bar{V}_i(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^{(i)} y^n}{2n + (1-i) \lambda_1} \quad (i=1, 3), \\ \bar{V}_i(y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n^{(i)} y^n}{2n + 1 + (3-i) \lambda_2} \quad (i=2, 4). \end{aligned}$$

Z postaci funkcji S_i , \bar{V}_i i T_i ($i=1-4$) wynikają następujące warunki na ich istnienie: dla każdego $n \in N$ powinny być spełnione warunki

$$(2.8) \quad n - \lambda_1 \neq 0, \quad n - \lambda_2 \neq 0, \quad n - v_3 \neq 0, \quad n - v_2 \neq 0.$$

Ze względu na postać wzorów (1.16)_{6,7}, (2.4)_{3,4} i (2.5), warunki te są w praktyce spełnione.

Wyznamy całki równań (1.15) w przypadku, gdy $F_2^{(x)}$ i $G_2^{(x)}$ można przedstawić w postaci

$$(2.9) \quad F_2^{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{n+1} x^{n-1}, \quad G_2^{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n x^n,$$

przy czym szeregi (2.9) są z założenia zbieżne dla każdego x i ponadto spełnione

są warunki: $\limsup \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 0$, $\limsup \frac{\delta_{n+1}}{\delta_n} = 0$. Przy tych założeniach mamy

$$(2.10) \quad \theta_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1}, \quad U_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n.$$

Po podstawieniu (2.10) do (1.15) otrzymujemy

$$(2.11) \quad d_0 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1}, \quad d_1 = \frac{\gamma_2}{1-\beta_2},$$

$$d_n = \frac{\gamma_{n+1} + \beta_0 c_{n-2}}{n^2 - \beta_1}, \quad n \geq 2, \quad c_n = \frac{\delta_n - d_n}{(n+1)^2 - \beta_2}, \quad n \geq 0,$$

$\beta_1, \beta_2 \neq 1^2, 2^2, \dots$

Wykażemy zbieżność szeregów (2.10). Ze względu na (2.11) można przyjąć, że majorantą szeregów (2.10) jest szereg

$$(2.12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n,$$

gdzie

$$(2.13) \quad A_n = k_n \alpha_n + k_n A_{n-1}, \quad \alpha_n = \max(|\gamma_{n+1}|, |\delta_n|),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{k_{n-1}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = 0.$$

Uwzględniając powyższe wzory, możemy wykazać, że

$$(2.14) \quad 0 < \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{k_n \alpha_n}{A_{n-1}} + k_n \leq \frac{k_n \alpha_n}{k_{n-1} \alpha_{n-1}} + k_n$$

i następnie na podstawie twierdzenia o trzech ciągach udowodnić, że

$$(2.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_{n-1}} = 0,$$

Stąd opierając się na kryterium d'Alemberta, wnioskujemy, że szeregi (2.10) są zbieżne bezwzględnie dla każdego x .

Podstawiając (2.3) i (2.6) do (1.20), otrzymujemy

$$Q^0 = A_1 T_1 x^{\lambda_1 - 1} + A_2 T_2 x^{\lambda_2} + A_3 T_3 x^{-\lambda_1 - 1} + A_4 T_4 x^{-\lambda_2},$$

$$N_1^0 = A_1 \left(\lambda_1 T_1 + 2y \frac{dT_1}{dy} \right) x^{\lambda_1 - 1} + A_2 \left[(\lambda_2 + 1) T_2 + 2y \frac{dT_2}{dy} \right] x^{\lambda_2} +$$

$$+ A_3 \left(-\lambda_1 T_3 + 2y \frac{dT_3}{dy} \right) x^{-\lambda_1 - 1} + A_4 \left[(1 - \lambda_2) T_4 + 2y \frac{dT_4}{dy} \right] x^{-\lambda_2},$$

$$(2.16) \quad M_1^0 = -A_1 \left[(1 + \nu_1 + \nu_1 \lambda_1) S_1 + 2\nu_1 y \frac{dS_1}{dy} \right] x^{\lambda_1} +$$

$$+ A_2 \left[(1 + \nu_1 \lambda_2) S_2 + 2\nu_1 y \frac{dS_2}{dy} \right] x^{\lambda_2 - 1} -$$

$$- A_3 \left[(1 + \nu_1 - \nu_1 \lambda_1) S_3 + 2\nu_1 y \frac{dS_3}{dy} \right] x^{-\lambda_1} + A_4 \left[(1 - \nu_1 \lambda_2) S_4 + 2\nu_1 y \frac{dS_4}{dy} \right] x^{-\lambda_2 - 1},$$

$$\begin{aligned}
 (2.16) \quad [cd.] \quad M_2^0 &= -A_1 \left[(1 + \lambda_1 + \nu_{II}) S_1 + 2y \frac{dS_1}{dy} \right] x^{\lambda_1} + A_2 \left[(\lambda_2 + \nu_{II}) S_2 + 2y \frac{dS_2}{dy} \right] x^{\lambda_2-1} - \\
 &\quad - A_3 \left[(1 + \nu_{II} - \lambda_1) S_3 + 2y \frac{dS_3}{dy} \right] x^{-\lambda_1} + A_4 \left[(\nu_{II} - \lambda_2) S_4 + 2y \frac{dS_4}{dy} \right] x^{-\lambda_2-1}, \\
 \theta^0 &= -A_1 S_1 x^{\lambda_1} + A_2 S_2 x^{\lambda_2-1} - A_3 S_3 x^{-\lambda_1} + A_4 S_4 x^{-\lambda_2-1}, \\
 v^0 &= A_1 (\nu_{II} T_1 - \alpha \bar{V}_1) x^{\lambda_1} + A_2 (\nu_{II} T_2 - \alpha \bar{V}_2) x^{\lambda_2+1} + \\
 &\quad + A_3 (\nu_{II} T_3 - \alpha \bar{V}_3) x^{-\lambda_1} + A_4 (\nu_{II} T_4 - \alpha \bar{V}_4) x^{-\lambda_2+1}, \\
 w^0 &= A_1 \left(\lambda_1 T_1 - \alpha \bar{V}_1 + 2y \frac{dT_1}{dy} \right) x^{\lambda_1} + A_2 \left[(\lambda_2 + 1) T_2 - \alpha \bar{V}_2 + 2y \frac{dT_2}{dy} \right] x^{\lambda_2+1} + \\
 &\quad + A_3 \left(-\lambda_1 T_3 - \alpha \bar{V}_3 + 2y \frac{dT_3}{dy} \right) x^{-\lambda_1} + A_4 \left[(1 - \lambda_2) T_4 - \alpha \bar{V}_4 + 2y \frac{dT_4}{dy} \right] x^{-\lambda_2+1}.
 \end{aligned}$$

W celu uproszczenia zapisu pominięto w (2.16) argument y w funkcjach S_i , T_i , \bar{V}_i ($i=1-4$).

Podstawiając (2.10)₂ do (1.21)₁ znajdujemy

$$(2.17) \quad V_s(x) = d_0 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n} x^n.$$

3. TECHNICZNIE ISTOTNE PRZYPADKI OBCIĄŻEŃ

Wyznamy z kolei zależne od rodzaju obciążenia wielkości oznaczone symbolami b , s oraz κ (por. (1.20)). Rozważymy odrębnie praktycznie istotne przypadki obciążen: ciężar własny, równomierne obciążenia górnego brzegu i wpływ temperatury liniowo zmiennej wzdłuż grubości powłoki.

A. Ciężar własny. Jeżeli ρ jest ciężarem objętościowym materiału ustroju, to zastępcze obciążenie pionowe przypadające na jednostkę pola środkowej powierzchni dane jest wzorem

$$(3.1) \quad p = \rho h (\mu_1 + \mu_{II} - \mu_1 \mu_{II})$$

oraz zachodzą następujące zależności:

$$(3.2) \quad p_2 = p \sin \varphi, \quad p_3 = p \cos \varphi, \quad P^0 = 0.$$

Na podstawie (1.16)₄ uwzględniając (3.2) znajdujemy

$$(3.3) \quad P_2^{(x)} = \frac{1}{2} p s_0 \cos \varphi (x^2 - \bar{x}^2).$$

Prawe strony (por. (1.16)_{3,2}) równań układu (1.15) przyjmują postać

$$(3.4) \quad F_2^{(x)} = \frac{p s_0}{2 \cos \varphi} \left[x (2 \nu_{II} \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + \alpha) - \frac{\alpha}{x} \bar{x}^2 \right], \quad G_2^{(x)} = 0,$$

skąd wobec (2.11) mamy

$$(3.5) \quad \gamma_1 = \frac{ps_0}{2 \cos \varphi} \alpha \bar{x}^2, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \frac{ps_0}{2 \cos \varphi} (2\nu_{II} \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + \alpha),$$

$$\gamma_{n+1} = 0, \quad n \geq 3, \quad \delta_n = 0, \quad n \geq 0.$$

Całki szczególne (2.10) przedstawimy w postaci

$$(3.6) \quad \theta_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n x^{2n+1}, \quad U_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n x^{2n},$$

przy czym współczynniki \bar{c}_n i \bar{d}_n otrzymamy ze wzorów (2.11) po uwzględnieniu (3.5):

$$(3.7) \quad \bar{d}_0 = -\frac{\gamma_1}{\beta_1}, \quad \bar{d}_1 = \frac{\gamma_3 + \beta_0 \bar{c}_0}{4 - \beta_1},$$

$$\bar{d}_n = \frac{\beta_0 \bar{c}_{n-1}}{4n^2 - \beta_1}, \quad n \geq 2, \quad \bar{c}_n = \frac{-\bar{d}_n}{(2n+1)^2 - \beta_2}, \quad n \geq 0$$

lub inaczej

$$\bar{d}_n = \frac{-\beta_0 \bar{d}_{n-1}}{[(2n-1)^2 - \beta_2](4n^2 - \beta_1)}, \quad n \geq 2, \quad \bar{c}_n = \frac{-\beta_0 \bar{c}_{n-1}}{[(2n+1)^2 - \beta_2](4n^2 - \beta_1)}, \quad n \geq 1.$$

Na podstawie (3.6) znajdujemy

$$(3.8) \quad \frac{\theta_s}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n x^{2n}, \quad \frac{d\theta_s}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \bar{c}_n x^{2n},$$

$$\frac{U_s}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n x^{2n-1}, \quad \frac{dU_s}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \bar{d}_n x^{2n-1}, \quad V_s = \bar{d}_0 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{d}_n}{2n} x^{2n}.$$

Wzory (3.5)–(3.8) jednoznacznie określają Q^s , N_1^s , M_1^s , M_2^s , v^s , w^s i θ^s zdefiniowane za pomocą (1.20).

W celu wyznaczenia wielkości (1.20) właściwych dla stanu bezmomentowego powłoki wykorzystamy (1.19)₂, (3.2) i (3.3):

$$(3.9) \quad V_p = \frac{ps_0}{4 \cos \varphi} [(2\nu_{II} \cos^2(\varphi - \alpha) x^2 + 2\alpha \bar{x}^2 \ln x],$$

$$v^b = V_p + A, \quad N_1^b = s_0 x p \cos \varphi, \quad N_2^b = \frac{ps_0}{3 \cos \varphi} \left(x - \frac{\bar{x}^2}{x} \right),$$

$$w^b = V_p + A + \frac{ps_0}{2 \cos \varphi} [(2 \cos^2 \varphi - \nu_{II}) x^2 + \nu_{II} \bar{x}^2].$$

B. Obciążenie równomierne górnego brzegu. Niech P^0 będzie intensywnością składowej pionowej równomiernego obciążenia górnego brzegu powłoki o współrzędnej $x = \bar{x}$. Wówczas zgodnie z (1.16)_{2,3,4}, (1.19)₂, (2.9)–(2.11) mamy

$$(3.10) \quad P_2^{(x)} = P^0 \bar{x} \cos \varphi, \quad V_p = -\frac{\alpha P^0 \bar{x}}{\cos \varphi} \ln x, \quad F_2^{(x)} = \frac{\alpha P^0 \bar{x}}{\cos \varphi} \frac{1}{x}, \quad G_2^{(x)} = 0.$$

Postać całek (3.6) i wzorów (3.8) nie ulegnie zmianie, przy czym należy w (3.7) przyjąć

$$(3.11) \quad \gamma_1 = \frac{\alpha P^0 \bar{x}}{\cos \varphi}, \quad \gamma_3 = 0.$$

Niezerowe czynniki stanu bezmomentowego mają postać (por. (1.20) i (3.10)_{1,2})

$$(3.12) \quad N_2^b = \frac{P^0 \bar{x}}{\cos \varphi} \frac{1}{x}, \quad v^b = V_p + A, \quad w^b = V_p + A - \frac{\nu_1 x \bar{P}^0}{\cos \varphi}.$$

C. Obciążenie termiczne. Rozważmy powłokę poddaną działaniu temperatury zmiennej w sposób liniowy wzdłuż grubości ustroju i niech T_0 oznacza stałą temperaturę powierzchni środkowej ($T_0=0$ odpowiada stanowi beznapężeniowemu), ΔT różnicę temperatur między powierzchniami zewnętrzną a wewnętrzną oraz α_t współczynnik liniowej rozszerzalności termicznej materiału.

Odształcenia wstępne określone są przez następujące warunki:

$$(3.13) \quad \dot{\varepsilon}_i = \dot{\varepsilon} = \alpha_t T_0 = \text{const}, \quad \dot{\kappa}_i = \dot{\kappa} = \alpha_t \frac{\Delta T}{h} = \text{const} \quad (i=1, 2).$$

Postępując podobnie jak przy uprzednio rozważanych obciążeniach, znajdujemy

$$(3.14) \quad F_2^{(x)} = 0, \quad G_2^{(x)} = \dot{\kappa} (1 - \alpha) = \text{const}.$$

Ze wzorów (3.14) wynika, że w przypadku «izotropii» (tzn. gdy $\alpha=1$) oba równania układu (1.15) są jednorodne, a zatem ich całki szczególne są tożsamościowo równe zeru.

Przy $\alpha \neq 1$ otrzymujemy

$$(3.15) \quad \theta_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n x^{2n+1}, \quad U_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n x^{2n+2},$$

gdzie

$$(3.16) \quad \delta_0 = \dot{\kappa} (1 - \alpha), \quad \delta_n = \gamma_n = 0, \quad n \geq 1, \quad \bar{c}_0 = \frac{\delta_0}{1 - \beta_2},$$

$$\bar{d}_n = \frac{\beta_0 \bar{c}_n}{(2n+2)^2 - \beta_1}, \quad n \geq 0, \quad \bar{c}_n = \frac{-\bar{d}_{n-1}}{(2n+1)^2 - \beta_2}, \quad n \geq 1.$$

Ze względu na (3.15)_{1,2} mamy

$$(3.17) \quad \frac{\theta_s}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n x^{2n}, \quad \frac{d\theta_s}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \bar{c}_n x^{2n},$$

$$\frac{U_s}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n x^{2n+1}, \quad \frac{dU_s}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2) \bar{d}_n x^{2n+1}, \quad V_s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_n}{2n+2} x^{2n+2},$$

a na podstawie (1.19)₂, (1.20) i (3.13)

$$(3.18) \quad V_p = \tilde{E}_1 h \dot{\varepsilon} x t g \varphi, \quad v^b = V_p + A, \quad w^b = A,$$

$$M_1^{\kappa} = D_I \dot{\kappa} (1 + \nu_I), \quad M_2^{\kappa} = D_{II} \dot{\kappa} (1 + \nu_{II}).$$

4. POWŁOKA O JEDNYM BRZEGU OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM

W przypadku powłoki o jednym brzegu należy we wzorach (2.16) przyjąć

$$(4.1) \quad A_3 = A_4 = 0.$$

Symbole b i s określimy łatwo z odpowiednich wzorów p. 3A po uwzględnieniu warunku

$$(4.2) \quad \bar{x} = 0.$$

Na podstawie (1.22), (2.16) i (3.1)–(3.9), biorąc pod uwagę (4.1) i (4.2) oraz wyłączając poza nawias we wszystkich wzorach czynnik $s_0 p$, znajdziemy

$$w = \frac{s_0^2 p \operatorname{ctg}^2 \varphi}{\bar{E}_1 h} \left\{ x^2 (-2\nu_{II} \sin^2 \varphi - \alpha + 4 \cos^2 \varphi) \frac{1}{4 \cos \varphi} + A + x \frac{dU_s}{dx} - V_s + \right. \\ \left. + A_1 \left(\lambda_1 T_1 - \alpha \bar{V}_1 + 2y \frac{dT_1}{dy} \right) x^{\lambda_1} + A_2 \left[(\lambda_2 + 1) T_2 - \alpha \bar{V}_2 + 2y \frac{dT_2}{dy} \right] x^{\lambda_2 + 1} \right\}, \\ v = \frac{s_0^2 p \operatorname{ctg} \varphi}{\bar{E}_1 h} \left[x^2 (2\nu_{II} \cos^2 \varphi - \alpha) \frac{1}{4 \cos \varphi} + A + \nu_{II} U_s - \alpha V_s + \right. \\ \left. + A_1 (\nu_{II} T_1 - \alpha \bar{V}_1) x^{\lambda_1} + A_2 (\nu_{II} T_2 - \alpha \bar{V}_2) x^{\lambda_2 + 1} \right],$$

$$\theta = \frac{s_0^3 p}{D_{II}} (\theta_s - A_1 S_1 x^{\lambda_1} + A_2 S_2 x^{\lambda_2}),$$

$$Q = s_0 p \left(\frac{U_s}{x} + A_1 T_1 x^{\lambda_1 - 1} + A_2 T_2 x^{\lambda_2} \right),$$

$$(4.3) \quad N_1 = -s_0 p \operatorname{ctg} \varphi \left\{ x \cos \varphi + \frac{dU_s}{dx} + A_1 \left(\lambda_1 T_1 + 2y \frac{dT_1}{dy} \right) x^{\lambda_1 - 1} + \right. \\ \left. + A_2 \left[(\lambda_2 + 1) T_2 + 2y \frac{dT_2}{dy} \right] x^{\lambda_2} \right\},$$

$$N_2 = -s_0 p \operatorname{ctg} \varphi \left(\frac{x}{2 \cos \varphi} + \frac{U_s}{x} + A_1 T_1 x^{\lambda_1 - 1} + A_2 T_2 x^{\lambda_2} \right),$$

$$M_1 = -\alpha s_0^2 p \left\{ \frac{\theta_s}{x} + \nu_I \frac{d\theta_s}{dx} - A_1 \left[(1 + \nu_I + \nu_I \lambda_1) S_1 + 2\nu_I y \frac{dS_1}{dy} \right] x^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + A_2 \left[(1 + \nu_I \lambda_2) S_2 + 2\nu_I y \frac{dS_2}{dy} \right] x^{\lambda_2 - 1} \right\},$$

$$M_2 = -s_0^2 p \left\{ \frac{d\theta_s}{dx} + \nu_{II} \frac{\theta_s}{x} - A_1 \left[(1 + \lambda_1 + \nu_{II}) S_1 + 2y \frac{dS_1}{dy} \right] x^{\lambda_1} + \right. \\ \left. + A_2 \left[(\lambda_2 + \nu_{II}) S_2 + 2y \frac{dS_2}{dy} \right] x^{\lambda_2 - 1} \right\},$$

$$M = \alpha_2 s_0^2 p \operatorname{tg} \varphi \left(\frac{\theta_s}{x} - A_1 S_1 x^{\lambda_1} + A_2 S_2 x^{\lambda_2 - 1} \right).$$

Całki szczególne (3.6) oraz funkcja V_s przyjmują postać

$$(4.4) \quad \theta_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n x^{2n+3}, \quad U_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{d}_n x^{2n+2}, \quad V_s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{d}_n}{2n+2} x^{2n+2},$$

przy czym

$$(4.5) \quad \bar{d}_0 = \frac{\gamma_3}{4 - \beta_1}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2 \cos \varphi} (2\nu_{11} \sin^2 \varphi - 4 \cos^2 \varphi + \alpha),$$

$$\bar{d}_n = \frac{\beta_0 \bar{c}_{n-1}}{(2n+2)^2 - \beta_1}, \quad n \geq 1, \quad \bar{c}_n = \frac{-\bar{d}_n}{(2n+3)^2 - \beta_2}, \quad n \geq 0,$$

lub

$$\bar{d}_n = \frac{-\beta_0 \bar{d}_{n-1}}{[(2n+2)^2 - \beta_1][(2n+1)^2 - \beta_2]}, \quad \bar{c}_n = \frac{-\beta_0 \bar{c}_{n-1}}{[(2n+2)^2 - \beta_1][(2n+3)^2 - \beta_2]}, \quad n \geq 1.$$

W trakcie obliczeń stwierdzono, że przy najczęściej występujących w praktyce znacznych wartościach β_0 (por. (1.16)₈) wykorzystanie ścisłych wzorów na całki szczególne (4.4) prowadzi przy obliczeniach numerycznych na komputerze do błędnych wyników. Przedstawimy obecnie sposób postępowania, który pozwala uniknąć wspomnianych trudności przy zachowaniu zadowalającej dokładności obliczeń.

Uwzględniając (4.5)₂ napiszemy układ (1.15) w następującej postaci:

$$(4.6) \quad L_2^1(\bar{U}) - \beta_0 \bar{\theta} = \gamma_3 x, \quad L_2^2(\bar{\theta}) + \bar{U} = 0.$$

Poszukujemy całek szczególnych układu (4.6) w postaci

$$(4.7) \quad \theta_s(x) = Ax + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n}, \quad U_s(x) = Bx + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{-n}$$

otrzymując wzory rekurencyjne na współczynniki:

$$(4.8) \quad A = -\frac{\gamma_3}{\beta_0}, \quad B = 0, \quad a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{\gamma_3(1 - \beta_2)}{\beta_0},$$

$$b_{n+1} = -a_n(n^2 - \beta_2), \quad a_{n+1} = \frac{b_n(n^2 - \beta_1)}{\beta_0}, \quad n \geq 0.$$

Biorąc pod uwagę

$$(4.9) \quad b_{2n+1} = a_{2n} = 0, \quad n \geq 0,$$

mamy

$$(4.10) \quad \theta_s(x) = -\frac{\gamma_3 x}{\beta_0} + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n x^{-(2n+1)}, \quad U_s(x) = \frac{\gamma_3(1 - \beta_2)}{\beta_0} + \bar{d}_n x^{-2n},$$

gdzie zgodnie z (4.8) i (4.9) jest

$$(4.11) \quad \bar{d}_n = -\frac{\bar{b}_{n-1}}{\beta_0} [(2n-2)^2 - \beta_1][(2n-1)^2 - \beta_2], \quad \bar{d}_0 = b_0,$$

$$\bar{a}_n = -\frac{\bar{a}_{n-1}}{\beta_0} [(2n)^2 - \beta_1][(2n-1)^2 - \beta_2], \quad \bar{a}_0 = a_1, \quad n \geq 1.$$

Zbadamy warunki zbieżności szeregów (4.10). Stosując kryterium d'Alemberta do (4.10)₂ po uwzględnieniu (4.11)₁ znajdujemy

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{[(2n-2)^2 - \beta_1][(2n-1)^2 - \beta_2]}{\beta_0 x^2} \right| < 1.$$

Analogiczny warunek zbieżności uzyskamy dla (4.10)₁. Zatem szeregi (4.10) są zbieżne przy $\beta_0 x^2 = \infty$. Traktując β_0 jako nieskończenie wielkie, warunek (4.12) uznajemy za spełniony przy $x \geq \varepsilon > 0$, a więc dla dostatecznie dużej liczby wyrazów szeregów (4.10) otrzymujemy wzory asymptotyczne na θ_s i U_s . Mając na uwadze (4.11), przyjmujemy całki szczególne w pierwszym przybliżeniu:

$$(4.13) \quad \theta_s(x) = -\frac{\gamma_3}{\beta_0} x, \quad U_s(x) = \frac{\gamma_3(1-\beta_2)}{\beta_0}, \quad V_s(x) = \frac{\gamma_3(1-\beta_2)}{\beta_0} \ln x.$$

Uzyskane wzory mają prostą interpretację mechaniczną. Zauważmy, że całki (4.13) spełniają w sposób ścisły układ równań (1.15), jeżeli

$$(4.14) \quad F_2^{(x)} = \gamma_3 x - \frac{\beta_1 \gamma_3 (1-\beta_2)}{\beta_0 x}, \quad G_2^{(x)} = 0.$$

Biorąc pod uwagę (1.16)₄ i wprowadzając oznaczenie

$$(4.15) \quad P_z = 2\pi P^0 \bar{x} \cos \varphi \Big|_{\bar{x}=0},$$

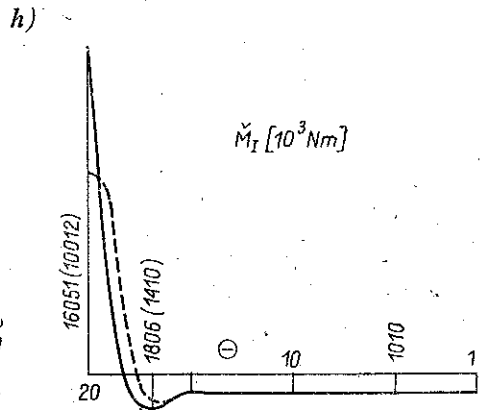
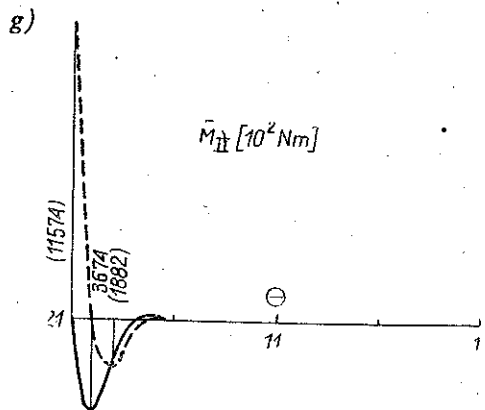
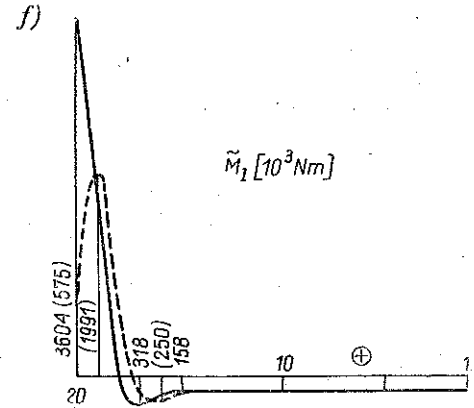
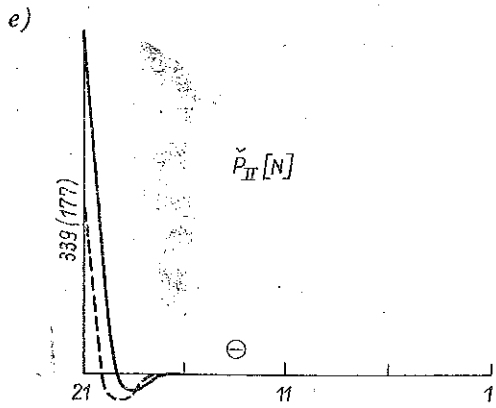
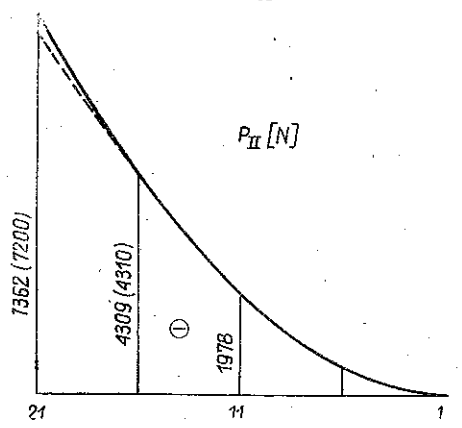
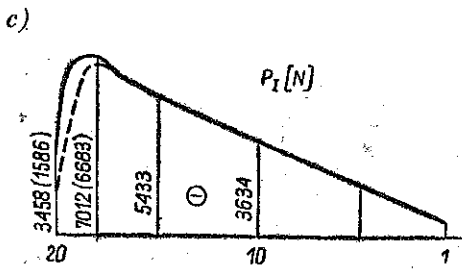
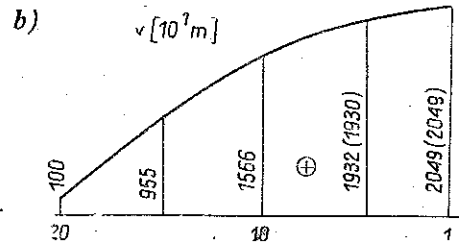
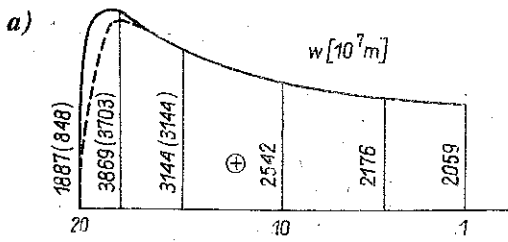
stwierdzamy, że równania (1.15), gdzie $F_2^{(x)}$ i $G_2^{(x)}$ są takie same jak w (4.14), opisują przypadek powłoki obciążonej ciężarem własnym i pewną siłą skupioną, przyłożoną w wierzchołku o wielkości

$$(4.16) \quad P_z = \frac{-2\pi}{\alpha \beta_0} \gamma_3 (1-\beta_2) \beta_1 \cos^2 \varphi,$$

przy czym w praktycznie rozpatrywanych zagadnieniach siła ta ze względu na duże β_0 może być pominięta.

5. PRZYKŁAD. POWŁOKA O JEDNYM BRZEGU OBCIĄŻONA CIĘŻAREM WŁASNYM

Przyjęto dane: $E=3 \cdot 10^{10}$ N/m², $\rho=5 \cdot 10^4$ N/m³, $h=0,06$ m, $R=10$ m, $\nu=1/6$; $\zeta=0,50$, $\mu_I=\mu_{II}=0,20$; $N_r=20$, $N_p=90$, gdzie $\zeta=1/2 \operatorname{tg} \varphi$ jest wyniosłością powłoki, N_r liczbą równoleżników oraz N_p liczbą południków siatki elementów ustroju. Sporządzono wykresy sił wewnętrznych i przemieszczeń. Uwzględniono podparcie przegubowe i całkowite zamocowanie brzegu (odpowiednio ciągła lub przerywana linia wykresu, rys. 3). Przyjęto, że brzeg przechodzi przez środkowe przekroje elementów południkowych. Sformułowanie warunków brzegowych w przemieszczeniach jest zatem w pewnym stopniu nieściśle (wielkości geometryczne zgodnie z założeniami teorii mają sens fizyczny jedynie w węzłach). Ze względu jednak na założoną gęstość perforacji—wpływ wspomnianej nieściśłości można uznać za nieistotny. Stwierdzono, iż użycie ścisłych wzorów na całki szczególne (por. (4.4)) dla przyjętych



Rys. 3
[18]

danych prowadzi do wyników sprzecznych z oczekiwanymi, co w głównej mierze jest konsekwencją wysokiego rzędu parametru β_0 (por. (1.16)₈). Dla uniknięcia tych trudności zastosowano postępowanie opisane w p. 4. Przy $R=5$ m, $h=0.08$ m (β_0 jest wtedy odpowiednio mniejsze, niż w przypadku rozważanym powyżej) uzyskano praktyczną zgodność wyników przy ścisłym i przybliżonym określeniu całek szczególnych (różnice podstawowych wielkości statycznych i geometrycznych nie przekraczały 1%). Zbadano również wpływ pominięcia całek szczególnych, jak to ma miejsce w teorii zaburzeń brzegowych dla powłok o strukturze ciągłej. Otrzymane wyniki wskazują, że w przypadku obciążenia ciężarem własnym wpływ całek szczególnych (przybliżonych) jest nieistotny (różnica w zakresie sześciu cyfr znaczących nie występuje).

Prawidłowość obliczeń zweryfikowano pośrednio przez wyznaczenie sił wewnętrznych i przemieszczeń dla izotropowej powłoki ciągłej (odpowiednio dobrano parametry β_1, β_2, μ_A i l_A ($A=I, II$); por. Uwagi końcowe (i porównanie uzyskanych rezultatów z zamieszczonymi w [5 i 6])

Analiza powłoki perforowanej wykazała, że jej praca statyczna nie różni się w istotny sposób od pracy powłoki ciągłej, a charakter zmienności wielkości statycznych i geometrycznych objawia daleko idące analogie. Potwierdzono decydujący wpływ zaburzeń w strefie przybrzegowej, jednakże na ogół zasięg tych zaburzeń jest w powłoce perforowanej większy niż w powłoce ciągłej.

UWAGI KOŃCOWE

Praca niniejsza potwierdziła przydatność stosowania rzeczywistych szeregów potęgowych do analizy statyki perforowanych powłok stożkowych w obrotowo-symetrycznym stanie obciążenia. Otrzymane związki odznaczają się przejrzystą budową, a ze względu na prostotę rekurencyjnych wzorów na współczynniki przyjętych szeregów — są łatwe do zaprogramowania, przy czym zastosowane szeregi są szybkozbieżne. Opisany algorytm rozwiązania zezwala na uwzględnienie innych, różnych od rozważanych w pracy obciążeń obrotowo-symetrycznych, jak również dowolnych warunków brzegowych (np. podparcie sprężyste na wieńcu).

Warto nadmienić, że dobierając odpowiednio współczynniki C_A, D_A ($A=I, II$) i przyjmując $R_{II}=\infty, S_I=0$, otrzymujemy równania i wzory teorii cienkich, obrotowych powłok ortotropowych, znajdujących się w obrotowo-symetrycznym stanie obciążenia.

Autorzy dziękują Prof. dr hab. Zbigniewowi MAZURKIEWICZOWI za pomoc i cenne uwagi w trakcie opracowywania niniejszego artykułu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. CZ. WOŹNIAK, *Siatkowe dźwigary powietrzchniowe*, PWN, Warszawa 1970.
2. Z. MAZURKIEWICZ, R. NAGÓRSKI, *On equations of net shells of revolution subjected to rotationally-symmetric loads*, Arch. Mech., 30, 3, 1978.
3. M. T. HUBER, *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1954.

4. S. A. AMBARCUMIAN, *Teoria anizotropnych oboloček*, Moskwa 1961.
5. P. B. J. GRAVINA, *Teorie und Berechnung der Rotationshalen*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1961.
6. W. FLÜGGE, *Powłoki. Obliczenia statyczne*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

ИЗГИБ КОНИЧЕСКОЙ ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБОЛОЧКИ НАГРУЖЕННОЙ
ВРАЩАТЕЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКИ

В работе получено решение задачи изгиба упругой, конической перфорированной оболочки с плотной сеткой. Принята сплошная расчетная модель, представленная в монографии [1]. Используются, введенные в работе [2], дифференциальные уравнения типа Мейсснера, решение которых, в случае рассматриваемой конической оболочки, получено при помощи степенных рядов.

Учтены технически важные случаи нагрузки. Подробно рассмотрена оболочка с одним краем, нагруженная собственным весом, при двух типах подпирания края. Приведен числовой пример.

SUMMARY

BENDING OF A PERFORATED CONICAL SHELL UNDER ROTATIONALLY-SYMMETRIC LOAD

The solution is obtained concerning the problem of bending of a densely perforated conical shell. The assumed model was described in the book [1]. The Meissner type differential equations derived in [2] are used which, in the case of the conical shell considered here, yield the power series solutions.

The practically important loading cases are discussed. Particular attention is paid to the shell with a single boundary, loaded by its own weight under two types of edge supports. A numerical example is given.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 6 kwietnia 1978 r.