

## UGIĘCIA RUSZTU SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNEGO PRZY OBCIĄŻENIACH ZMIENNYCH

TADEUSZ SAWICKI (WARSZAWA)

Zastosowano metodę oceny ugięć konstrukcji poddanej obciążeniom zmiennym dla przypadku rusztu płaskiego. Zastosowana metoda określa górną granicę ugięć, jakie mogą wystąpić w konstrukcji wykonanej z materiału sprężysto-idealnie plastycznego.

### 1. WSTĘP

Wymiarowania konstrukcji inżynierskich dokonujemy zwykle w ten sposób, że wyznaczamy ekstremalne wartości sił wewnętrznych (momentów, sił poprzecznych itd.) na podstawie najniekorzystniejszych układów obciążeń, a przekroje elementów ustalamy tak, aby naprężenia obliczone na podstawie ekstremalnych sił wewnętrznych nie przekraczały wartości dopuszczalnych lub granicznych. Postępowanie takie nie budzi zastrzeżeń dopóki cała konstrukcja pracuje w zakresie liniowo sprężystym. Dążenie do racjonalnego projektowania konstrukcji metalowych skłania do stosowania metod teorii plastyczności. I w takim przypadku obciążenia zmienne, których udział w globalnym obciążeniu konstrukcji budowlanych jest znaczny [9], stwarzają szczególne niebezpieczeństwo zniszczenia konstrukcji lub jej elementu jeszcze przed osiągnięciem stanu granicznego, zwanego nośnością graniczną. Innymi słowy, stosowanie określonego współczynnika bezpieczeństwa względem nośności granicznej przy obciążeniach zmiennych nie daje żadnej gwarancji bezpieczeństwa. Zjawisko opisane powyżej jest związane z pojęciem przystosowania się konstrukcji do obciążeń zmiennych w czasie, co w literaturze anglosaskiej przyjęto określać terminem *shakedown*. Stosując twierdzenia o przystosowaniu [1, 2 i 3], możemy określić wielkość współczynnika bezpieczeństwa gwarantującego bezpieczną pracę konstrukcji.

Zjawisko zniszczenia konstrukcji przy obciążeniach zmiennych, jeszcze przed osiągnięciem stanu nośności granicznej, spowodowane jest powstaniem pola naprężeń zwanego resztkowym, które nakładając się z aktualnym stanem naprężenia spowodowanego aktualnymi obciążeniami powoduje płynięcie konstrukcji według określonego schematu kinematycznego niekoniecznie pokrywającego się ze schematem zniszczenia wynikającym z nośności granicznej.

Określając przedziały zmienności obciążeń, przy których konstrukcja się przystosowuje [4 i 5], tzn. zachowuje się sprężysto po pewnej liczbie cykli obciążeń, nic nie wiemy na temat ugięć, co nie daje pełnej gwarancji użyteczności konstrukcji.

Dlatego niezbędnym uzupełnieniem zaadoptowanych do danego typu konstrukcji twierdzeń o przystosowaniu jest algorytm, pozwalający określić w sposób ścisły lub przybliżony ugięcia powstające w procesie przystosowania. W pracach [7 i 8] przedstawiono metodę obliczania ugięć konstrukcji ramowej przy obciążeniach zmiennych. Niniejsza praca jest próbą adaptacji tej metody dla przykładu rusztu płaskiego poddanego działaniu obciążeń skupionych.

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I ZALEŻNOŚCI

Bardzo często przy analizie konstrukcji posługujemy się wielkościami uogólnionymi, zwanymi naprężeniami uogólnionymi (siły i momenty) oraz odkształceniami uogólnionymi (wydłużenia i obroty). Pozwala to w pewnych przypadkach znacznie uprościć obliczenia kosztem nieznacznych niedokładności. Takie podejście jest korzystne i często praktykowane w przypadkach konstrukcji prętowych, których szczególnym przypadkiem są ruszty jednowarstwowe. Analiza przystosowania tego typu konstrukcji wymaga przyjęcia wielu założeń i uproszczeń wynikających czy to ze stosowalności samej teorii, czy też z charakteru samej konstrukcji. Założenia te są następujące: 1) materiał jest idealnie sprężysto-plastyczny; 2) posługujemy się wzorami teorii geometrycznie liniowych; 3) przy czystym zginaniu spełnione są założenia o płaskich przekrojach również w obecności odkształceń plastycznych; 4) konstrukcja wykonana jest z prętów o idealnym przekroju dwuteowym; 5) przekroje prętów są odcinkami stałe; 6) obciążenia zewnętrzne są siłami skupionymi o wartościach zawierających się w danych z góry granicach, działających prostopadle do płaszczyzny rusztu; 7) deformacja plastyczna koncentruje się w przekrojach, w których został osiągnięty moment graniczny; 8) jedynym naprężeniem uogólnionym jest moment zginający  $M(x, t)$ , a odkształceniem uogólnionym krzywizna osi pręta  $\kappa(x, t)$ ; 9) istnieje tylko jedna składowa wzajemnego oddziaływania belek w węzłach.

Przy formułowaniu problemów teorii przystosowania znaczenia nabiera sposób opisywania obciążeń zewnętrznych. Oddziaływania, którym są poddawane konstrukcje w rzeczywistych warunkach eksploatacji, można wystarczająco dokładnie opisać skończonym układem mnożników obciążenia  $\mu_1(t), \mu_2(t), \dots, \mu_p(t)$  w następujący sposób:

$$(2.1) \quad P_j(t) = \sum_{k=1}^p \mu_k(t) Q_j^k, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Symbol  $Q_j^k$  reprezentuje tu znane obciążenia zewnętrzne (siły skupione) w  $k$ -tym schemacie obciążenia. Fakt, że każde z obciążeń może zmieniać się w pewnych granicach, opisany jest układem nierówności

$$(2.2) \quad \mu_k^- \leq \mu_k(t) \leq \mu_k^+, \quad k=1, 2, \dots, p,$$

gdzie  $\mu_k^-$ ,  $\mu_k^+$  są to wielkości znane, określone zazwyczaj przez normy obciążeń lub ogólnie przez warunki użytkowania konstrukcji.

Między obciążeniami  $P_j$ , zaczepionymi w  $m$  punktach, a momentami zginającymi  $M_i$  w  $n$  przekrojach krytycznych (tzn. w przekrojach, w których występuje lokalne ekstremum momentu zginającego), zachodzą zależności wynikające z warunków równowagi. W ramach geometrycznie liniowej teorii równania równowagi mają postać następującego równania liniowego:

$$(2.3) \quad P_j = \sum_{i=1}^n C_{ji} M_i, \quad j=1, 2, \dots, m.$$

Składowe macierzy  $C_{ij}$  można wyznaczyć na przykład zastępując daną konstrukcję prętową układem statycznie wyznaczalnym, wyprowadzając równania równowagi dla tego układu i eliminując zeń wielkości nadliczbowe. Inny sposób polega na rozpatrywaniu mechanizmów chwilowego ruchu w przypadku utworzenia się przegubów w przekrojach krytycznych. Ten sposób właściwy jest podejściu kinematycznemu, z którego wynika następujący związek geometryczny:

$$(2.4) \quad \theta_i = \sum_{j=1}^m C_{ij} U_j, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

w którym  $\theta_i$  oznaczają obroty w przekrojach krytycznych, a  $U_j$  przemieszczenia odpowiadające obciążeniom  $P_j$ . Macierz  $C_{ij}$  w obu przypadkach (2.3) i (2.4) jest ta sama. Można się o tym przekonać z zasady prac przygotowanych (por. Dodatek).

Wskutek poczynionych założeń pole momentów zginających może być jednoznacznie opisane przez podanie momentów zginających  $M_i$  w  $n$  przekrojach krytycznych  $x_i$ . Moment ten może być przedstawiony w postaci następującej sumy:

$$(2.5) \quad M(x, t) = M^E(x, t) + M^R(x, t).$$

Podobnie możemy postąpić z przemieszczeniami oraz krzywizną osi pręta:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} U(x, t) &= U^E(x, t) + U^P(x, t), \\ \kappa(x, t) &= \kappa^E(x, t) + \kappa^R(x, t) + \kappa^P(x, t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\kappa^E = d^2 U/dx^2, \quad \kappa^E = M^E/EJ = d^2 U^E/dx^2, \quad \kappa^R = M^R/EJ,$$

$$(2.7) \quad \kappa^P = \sum_i \theta_i \delta(x - x_i), \quad \kappa^R + \kappa^P = d^2 U^P/dx^2.$$

Symbole  $M^E(x, t)$  i  $U^E(x, t)$  oznaczają odpowiednio momenty i ugięcia konstrukcji idealnie sprężystej. Symbol  $\delta(x - x_i)$  oznacza uogólnioną funkcję Diraca. Definiując  $\mu(t)$  jako mnożnik obciążenia, zgodnie z (2.1) i (2.2),  $M^E$  i  $U^E$  można wyrazić następująco:

$$(2.8) \quad \begin{aligned} M^E(x, t) &= \sum_{k=1}^p \mu_k(t) M^{Ek}(x), \\ U^E(x, t) &= \sum_{k=1}^p \mu_k(t) U^{Ek}(x), \end{aligned}$$

gdzie  $p$  jest liczbą schematów obciążeń. Indeksy  $E, R, P$ , przy momentach  $M$ , ugięciach  $U$  i krzywiznach  $\kappa$  należy rozumieć odpowiednio jako sprężyste, resztkowe, plastyczne. Różnica  $M^R = M - M^E$  jest polem samorównoważących się momentów resztkowych powstałych wskutek plastycznych deformacji konstrukcji (obrotów  $\Theta_i^P$  w określonych przekrojach krytycznych). Pole momentów resztkowych  $M^R$  jest jednoznacznie określone przez aktualne pole deformacji plastycznych  $\Theta_j^P$ , o ile stałe sprężyste nie ulegają zmianie:

$$(2.9) \quad M_i^R(t) = \sum_j K_{ij} \Theta_j^P(t).$$

Równania tego nie można odwrócić w sposób jednoznaczny ze względu na fakt istnienia takich pól deformacji plastycznych  $\Theta_j^P$  (zwanymi mechanizmami), dla których pole  $M^R$  znika, łatwo się przekonać, że  $K_{ij} = K_{ji}$  oraz  $\det(K_{ij}) = 0$ . Wyrażając momenty resztkowe  $M^R$  we wzorach (2.7) przy wykorzystaniu (2.9) otrzymamy

$$(2.10) \quad U^P(x, t) = \sum_j U_j(x) \Theta_j^P(t).$$

Ugięcia plastyczne są tutaj już tylko funkcją obrotów plastycznych w przekrojach krytycznych. W punkcie czwartym pracy omówiono sposób otrzymania macierzy  $K_{ij}$  oraz  $U_j$  a w punkcie piątym podano te macierze dla przypadku konkretnego rusztu.

### 3. TWIERDZENIA O PRZYSTOSOWANIU

Ogólne twierdzenia o przystosowaniu dla sprężysto idealnie plastycznego ciała zostały podane przez MELANA [2] oraz KOITERA [3]. Twierdzenia o przystosowaniu zastosowane do przypadków ram, rusztów i belek znaleźć można w pracach [4, 5 i 6]. Twierdzenie statyczne o przystosowaniu mówi, co następuje:

Dla przystosowania konstrukcji ramowej wystarcza: 1) istnienie liczby  $s > 1$  (współczynnika bezpieczeństwa) oraz 2) istnienie stałego w czasie pola momentów resztkowych  $M_i^R$  takiego, że we wszystkich przekrojach niebezpiecznych zachodzą nierówności

$$(3.1) \quad \begin{aligned} s(M_i^R + \text{MAX } M_i^E) &\leq M_{0i}, \\ -M_{0i} &\leq (M_i^R + \text{MIN } M_i^E) s. \end{aligned}$$

Symbol MAX (MIN)  $M_i^E$  oznacza algebraicznie największy (najmniejszy) moment zginający w  $i$ -tym przekroju, który może wynikać z w programu obciążenia [10].  $M_{0i}$  jest momentem granicznym w  $i$ -tym przekroju. Dowód tego twierdzenia [4] pozwala nam określić całkowitą energię dysypowaną w konstrukcji w trakcie cykli obciążeń. Wynosi ona

$$(3.2) \quad W_p = \int_0^t \sum_i M_{0i} |\dot{\Theta}_i^P| dt \leq \frac{s}{2(s-1)} \int_x \frac{M^R(x) M^R(x)}{EJ(x)} dx = a.$$

Całkowanie rozciąga się na całą konstrukcję.

Twierdzenie kinematyczne (Koitera) ma następującą treść:

Jeżeli granice zmienności obciążeń (2.2) dane są z dokładnością do stałego mnożnika  $\xi > 0$ ,

$$\mu_i^- = \xi \mu_i^{-0}, \quad \mu_i^+ = \xi \mu_i^{+0},$$

to mnożnik  $\xi$  wyznaczony z dowolnego równania o postaci

$$(3.3) \quad M_{0i} |\theta_i^p| = \sum \theta_i^p \begin{cases} \text{MAX } M_i^E, & \text{gdy } \theta_i^p > 0, \\ \text{MIN } M_i^E, & \text{gdy } \theta_i^p < 0, \end{cases}$$

jest nie mniejszy od każdego  $\xi = \xi_s$ , pozwalającego na przystosowanie się konstrukcji ramowej do programu (2.2). Mnożnik  $\xi$  wchodzi do równań (3.3) w ten sposób, że MAX (MIN)  $M_i^E$  są do niego proporcjonalne.

#### 4. GRANICA UGIĘĆ

Zastosowana metoda granicznej wielkości ugięć przy obciążeniach zmiennych [7 i 8] sprowadza się, podobnie jak zagadnienie określenia granic zmienności obciążeń przy przystosowaniu, do problemu programowania liniowego [11]. Ograniczenia nakładane na funkcję celu (ugięcia  $U$ ) wynikają z następujących warunków: 1) obciążenia nie mogą przekraczać wartości danych przez nierówności (2.2); 2) całkowita energia dysypowana w procesie przystosowania jest mniejsza niż wartości dane przez (3.2); 3) moment zginający  $M(x, t)$  nie może nigdzie naruszać warunku plastyczności, to jest  $|M(x, t)| \leq M_0(x)$ .

Stąd otrzymujemy problem, który można sformułować następująco: znaleźć

$$(4.1) \quad \text{MAX (MIN)} U = U^E + U^P = \sum_k u_k U^{Ek} + \sum_j U_j \theta_j^p,$$

przy ograniczeniach następujących:

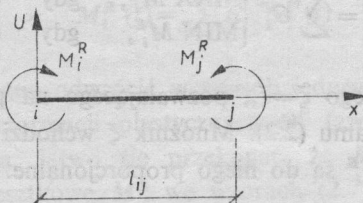
$$(4.2) \quad \begin{aligned} & \mu_k^- \leq \mu_k \leq \mu_k^+, \\ & \sum_j M_{0j} |\theta_j^p| \leq \int_0^t \sum_j M_{0j} |\dot{\theta}_j^p| dt = W_p \leq a, \\ & -M_{0i} \leq \sum_k M_i^{Ek} \mu_k + \sum_j K_{ij} \theta_j^p \leq M_{0i}. \end{aligned}$$

Sposób otrzymania macierzy  $U_j$  jest następujący. Całkujemy ostatnią z zależności (2.7) i z warunków brzegowych oraz warunków ciągłości wyznaczamy stałe całkowania. Stosujemy przy tym dla każdego elementu lokalny układ współrzędnych. Przez element należy rozumieć część konstrukcji pomiędzy dwoma sąsiednimi

przekrojami krytycznymi (rys. 1, 4). W ten sposób otrzymamy dla każdego elementu następujący wzór:

$$(4.3) \quad U^P = \sum_{i=1}^n A^i M_i^R + \sum_{i=1}^n B^i \theta_i^P,$$

gdzie  $A$ ,  $B$  są macierzami współczynników liczbowych, a  $n$  jest liczbą przekrojów niebezpiecznych.



Rys. 1

Pole momentów resztkowych  $M^R$  jest polem będącym w równowadze z zerowymi obciążeniami zewnętrznymi i może być ono wyrażone przez wielkości nadliczbowe. Stąd

$$(4.4) \quad M_i^R = \sum_{k=1}^p G_i^k \alpha_k,$$

gdzie  $G_i^k$  oznacza macierz współczynników liczbowych,  $\alpha$  macierz wielkości nadliczbowych,  $p$  jest równe krotności statycznej niewyznaczalności konstrukcji prętowej.

Dokonując podstawienia (4.4) do (4.3) otrzymamy

$$(4.5) \quad U^P = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p A^i G_i^k \alpha_k + \sum_{i=1}^n B^i \theta_i^P.$$

Pozostałe warunki ciągłości pozwalają na podstawie wzoru (4.5) wyznaczyć nadliczbowe  $\alpha$  jako funkcję kątów plastycznych obrotów  $\theta_i^P$ . Otrzymamy

$$(4.6) \quad \alpha_k = \sum_{l=1}^n D_k^l \theta_l^P.$$

Macierz  $D$  jest macierzą pewnych współczynników liczbowych. Wyznaczone wielkości nadliczbowe pozwalają wzór (4.5) napisać następująco:

$$(4.7) \quad U^P = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n A^i G_i^k D_k^l \theta_l^P + \sum_{i=1}^n B^i \theta_i^P$$

lub

$$(4.8) \quad U^P = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n A^i G_i^k D_k^l + B^i \right) \theta_i^P.$$

Wzór ten równoważny jest równaniu (2.10), przy czym

$$(4.9) \quad U_i = \left( \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n A^l G_i^k D_k^l + B^i \right).$$

Wstawiając nadliczbowe wielkości ze wzoru (4.6) do (4.4) otrzymamy

$$(4.10) \quad M_i^R = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^n G_i^k D_k^l \Theta_l^P = \sum_{l=1}^n K_i^l \Theta_l^P,$$

przy czym

$$(4.11) \quad K_i^l = \sum_{k=1}^p G_i^k D_k^l;$$

jest to ta sama macierz, która występuje w (2.9).

Wyznacznik tej macierzy jak i podwyznaczniki są równe zero. Oczywiście jest również zależność następująca:

$$(4.12) \quad M K^T = 0,$$

gdzie  $M$  jest macierzą mechanizmów ruchu kinematycznego konstrukcji. Wartości liczbowe pola naprężeń resztkowych  $M^R$  wyznaczamy z twierdzenia Melana (3.1) po uprzednim rozwiązaniu problemu przystosowania. Stąd też bezpośrednio otrzymujemy macierz  $\alpha$  ze wzoru (4.4).

Rozwiązanie problemu (4.1) wymaga już w zasadzie użycia maszyny cyfrowej. Możemy jednak wstępnie oszacować wynik, odrzucając ostatnie ograniczenie z (4.2). Nie wiemy jednak jak dalece otrzymany wynik różni się od optymalnego.

Problem uproszczony jest następujący: znaleźć

$$(4.13) \quad \text{MAX } |U_k| \frac{a}{M_{0k}},$$

gdzie

$$(4.14) \quad |U_k|/M_{0k} \geq |U_j|/M_{0j} \quad \text{dla } j=1, 2, \dots, n; \quad j \neq k.$$

Optymalny wektor zagadnienia uproszczonego jest określony jednoznacznie, jeśli  $k$  przyjmuje tylko jedną wartość. I wtedy

$$(4.15) \quad \Theta_k^P = \text{sgn } U_k a/M_{0k}, \quad \Theta_j^P = 0 \quad \text{dla } j \neq k.$$

W przeciwnym razie (gdy  $k$  przyjmuje różne wartości), tj. jeśli  $|U_k|/M_{0k} = |U_s|/M_{0s}$  itd., to każdy wektor  $\Theta_j^P$  spełniający (4.16), może być rozwiązaniem:

$$(4.16) \quad M_{0k} |\Theta_k^P| + M_{0s} |\Theta_s^P| + \dots = a,$$

gdzie

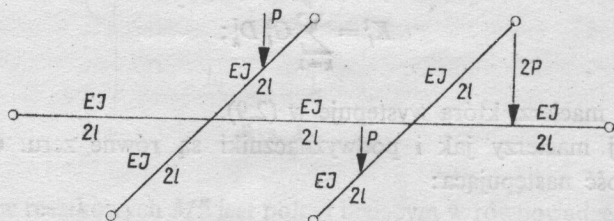
$$\Theta_k^P U_k \geq 0, \quad \Theta_s^P U_s \geq 0 \quad \text{itd.} \quad \Theta_j^P = 0 \quad \text{dla } j \neq k, \quad j \neq s \quad \text{itd.}$$

## 5. PRZYKŁAD

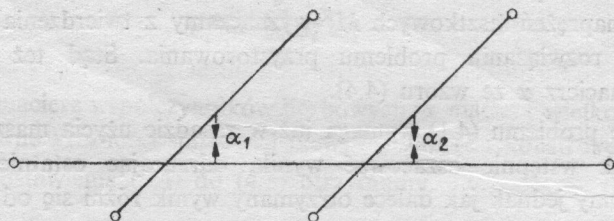
Zaprezentowaną metodę zastosujemy do oceny ugięć rusztu przedstawionego na rys. 2. Obciążenia zmieniają się w granicach następujących:

$$(5.1) \quad 0 \leq P_1 \leq P, \quad 0 \leq P_2 \leq P, \quad 0 \leq P_3 \leq 2P.$$

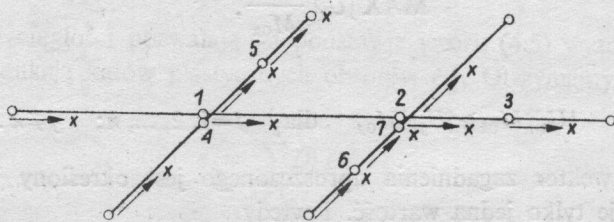
Przyjęto, że moduł sprężysty  $E$  jest stały oraz stały jest moment bezwładności dla wszystkich prętów rusztu. Obciążenie przystosowania dla tego przypadku wynosi  $P_p = 0,910194 (M_0/l)$  i jest obliczone w pracy [6]. Układ zastępczy statycznie



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

wyznaczalny zbudowano w sposób przedstawiony na rys. 3. Przez  $\alpha_1$  oraz  $\alpha_2$  oznaczono wielkości nadliczbowe. Przekroje niebezpieczne oraz lokalne układy współrzędnych pokazano na rys. 4. Ruszt jest swobodnie podparty na obwodzie oraz nie przenosi momentów skręcających w węzłach.

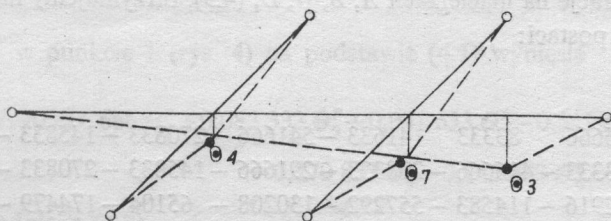
Z rozwiązania zagadnienia przystosowania które było uzyskane na drodze kinematycznej (twierdzenie Koitera (3.3)) oraz na podstawie twierdzenia Melana (3.1)



otrzymano następujący rozkład naprężeń resztkowych dla poszczególnych przekrojów krytycznych:

$$(5.2) \quad \begin{bmatrix} -0,815231 \\ -0,948119 \\ -0,973604 \\ -1,000000 \\ -1,000000 \\ -1,000000 \\ -1,000000 \end{bmatrix} \leq M_i^R \leq \begin{bmatrix} 0,738774 \\ 0,530340 \\ -0,145935 \\ 0,411104 \\ 0,250910 \\ 0,051578 \\ 0,013350 \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, 7.$$

Liczby w ramkach określają wartości naprężeń resztkowych  $M^R$  w tych przekrojach, dla których suma tychże naprężeń oraz naprężeń ekstremalnych ( $\text{MAX}(\text{MIN}) M^E$ ) dla pewnego schematu obciążeń zewnętrznych powoduje pojawienie się naprężenia odpowiadającego momentowi granicznemu  $M_0$ . To znaczy  $M_i^R + M_i^E = M_{0i}$  dla przekroju  $i=3, 4, 7$  w przypadku granicznym, tzn. gdy warunki 3, 4, 7 z (5.2) zostają spełnione jako równości. Równocześnie odpowiada to wartości współczynnika bezpieczeństwa względem nieprzystosowania  $n=1, 0$ . Znajomość przekrojów, dla których następuje płynięcie plastyczne przy  $P=P_p$ , daje nam jednocześnie obraz narastania ugięć, a w przypadku obciążenia zewnętrznego  $P$  większego niż obciążenie przystosowania  $P_p$  ( $P > P_p$ ) — schemat zniszczenia (rys. 5); dla siły  $P_p < P_0$ , gdzie  $P_0$  jest nośnością graniczną w klasycznym pojęciu, a wynoszącą w niniejszym przypadku  $P_0 = 0.923 M_0/l$ .



Rys. 5

Na podstawie (5.2) dla  $i=3, 4, 7$  ze wzoru (4.4) otrzymujemy układ równań, z którego określamy  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . W przypadku gdy ugięcia narastają według pewnego schematu globalnego, układ równań (4.4) ma jedno równanie za dużo (tutaj trzy równania i dwie niewiadome  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ ). Spełnienie odrzuconego równania sprawdzamy po obliczeniu  $\alpha_i$ . Tak więc pole resztkowe jest w tym przypadku jednoznacznie określone, co nie musi mieć miejsca w sytuacjach, gdy o przystosowaniu będą decydowały pewne schematy lokalne (metoda kinematyczna [4]). Obliczone  $\alpha_i$  wynoszą odpowiednio:

$$(5.3) \quad \alpha = \begin{bmatrix} 0,411 & 104 \\ 0,013 & 350 \end{bmatrix} (M_0/l).$$

Związana z  $\alpha$  energia dysypowana w procesie przystosowania (3.2) wynosi

$$(5.4) \quad a = s / (s - 1) \cdot 0,430\ 637 (M_0^2 l / EJ),$$

gdzie  $s$  jest współczynnikiem bezpieczeństwa.

Wzór (4.3) dla rozpatrywanego rusztu ma postać

$$(5.5) \quad U_i^P = \begin{bmatrix} 48 & 28 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 32 & 16 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 32 & 40 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 32 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 22 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 16 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 26 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 24 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 26 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_i^R l^2 \\ -24 EJ \\ \Theta_i^P l \\ -24 \end{bmatrix}$$

dla  $i=1, \dots, 7$ .

Macierz  $G_i^k$  ze wzoru (4.4) wynosi

$$(5.6) \quad G^T = \begin{bmatrix} -4/3 & -2/3 & -1/3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ -2/3 & -4/3 & -2/3 & 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{bmatrix} l.$$

Macierz  $D_i^l$  ze wzoru (4.6) wynosi

$$(5.7) \quad D = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} -20 & 4 & 2 & 22 & 11 & -7 & -14 \\ 4 & -20 & -10 & -14 & -7 & 11 & 22 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^3}.$$

Wykonując operacje na macierzach  $A, B, G, D$ , (4.9), otrzymujemy macierz ugięć  $U_i$  w następującej postaci:

$$(5.8) \quad U_i = \begin{bmatrix} -416666 & 83333 & 41633 & -541666 & -270833 & -145833 & -291666 \\ 83333 & -416666 & -208333 & -291666 & -145833 & -270833 & -541666 \\ 72916 & -114583 & -557292 & -130208 & -65104 & -174479 & -348958 \\ -286458 & 57292 & 28646 & -184896 & -592448 & -100260 & -200521 \\ 57292 & -286458 & -143229 & -200521 & -100260 & -592448 & -184896 \end{bmatrix} \frac{l}{10^6}.$$

Na podstawie wzoru (4.11) otrzymano macierz  $K$ , która dla rozpatrywanego rusztu ma postać:

$$(5.9) \quad K = \begin{bmatrix} 375000 & 125000 & 62500 & -312500 & -156250 & 31250 & 62500 \\ 125000 & 375000 & 187500 & 62500 & 31250 & -156250 & -312500 \\ 62500 & 187500 & 93750 & 31250 & 15625 & -78125 & -156250 \\ -312500 & 62500 & 31250 & 343750 & 171875 & -109375 & -218750 \\ -156250 & 31250 & 15625 & 171875 & 85938 & -54688 & -109375 \\ 31250 & -156250 & -78125 & -109375 & -54688 & 85938 & 171875 \\ 62500 & -312500 & -156250 & -218750 & -109375 & 171875 & 343750 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l \cdot 10^6}$$

Macierz mechanizmów podstawowych  $M$  ze wzoru (4.12) ma postać

$$(5.10) \quad M = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1/2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1/3 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1/3 & 0 & 4/3 & 0 & 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3/4 & 0 & 1/2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 & 2/5 & 0 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 6/5 & 2/5 & 0 & 8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5 & 0 & 4/5 & 0 & 4/5 \\ 0 & 0 & 6/5 & 0 & 4/5 & 8/5 & 0 \end{bmatrix} \theta_1^P.$$

Ugięcie trwałe w punkcie 1 (rys. 4) na podstawie (4.1) wyniesie

$$(5.11) \quad U_1^P = (-0,416\ 666 \theta_1^P + 0,083\ 333 \theta_2^P + 0,041\ 633 \theta_3^P - 0,541\ 666 \theta_4^P - \\ - 0,270\ 833 \theta_5^P - 0,145\ 833 \theta_6^P - 0,291\ 666 \theta_7^P) l,$$

przy czym zgodnie z (4.2)

$$(5.12) \quad |\theta_1^P| + |\theta_2^P| + |\theta_3^P| + |\theta_4^P| + |\theta_5^P| + |\theta_6^P| + |\theta_7^P| \leq \frac{s}{s-1} \cdot 0,430\ 637 (M_0 l/EJ).$$

Pomijając ostatnią nierówność z (4.2), ekstremalne (minimalne) ugięcie plastyczne  $\hat{U}^P$  dla przekroju krytycznego pierwszego wyniesie:

$$(5.13) \quad \text{MIN } \hat{U}_1^P = -0,233\ 262 \frac{s}{s-1} (M_0 l^2/EJ),$$

dla

$$\theta_1^P, \theta_2^P, \theta_3^P, \theta_7^P, \theta_5^P, \theta_6^P = 0 \quad \text{i} \quad \theta_4^P = \frac{s}{s-1} \cdot 0,430637 (M_0 l/EJ).$$

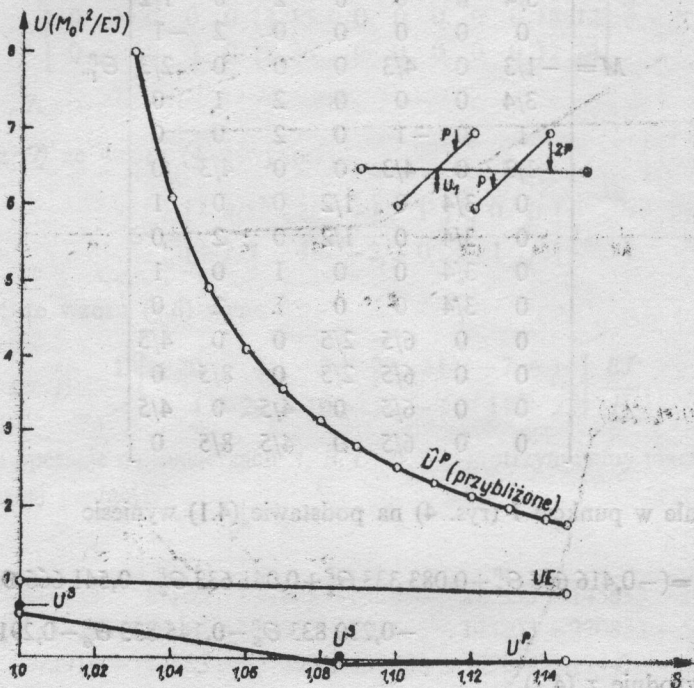
Wektor  $\Theta_j^P$  zgodnie z (4.14) i (4.15) jest tu jednoznacznie określony. Ekstremalne ugięcie sprężyste  $U^E$  (4.1) dla analogicznego punktu wynosi

$$(5.14) \quad U_1^E = -1,012\,458 \cdot \frac{1}{s} (M_0 l^2/EJ).$$

Wielkość ta obliczona z warunku nieprzekraczania zakresu sprężystego wynosi

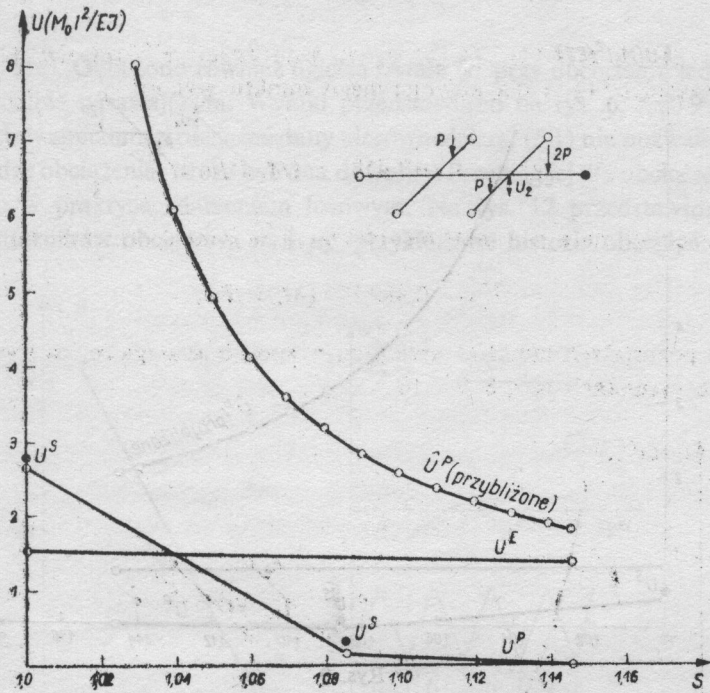
$$(5.15) \quad \hat{U}_1^E = -0,883\,873 (M_0 l^2/EJ).$$

Ugięcia dla pozostałych punktów obliczono w sposób analogiczny, a wyniki przedstawiono na rysunkach 6, 7, 8, 9 i 10.

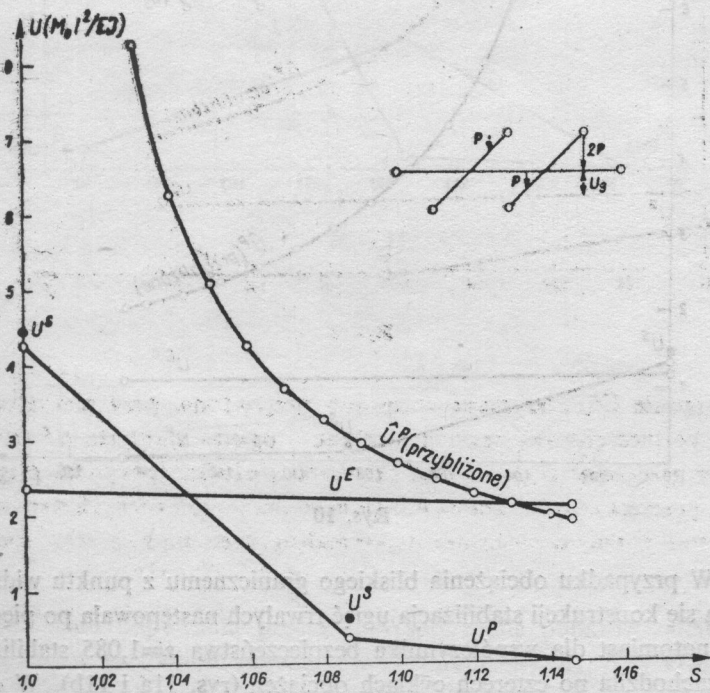


Rys. 6

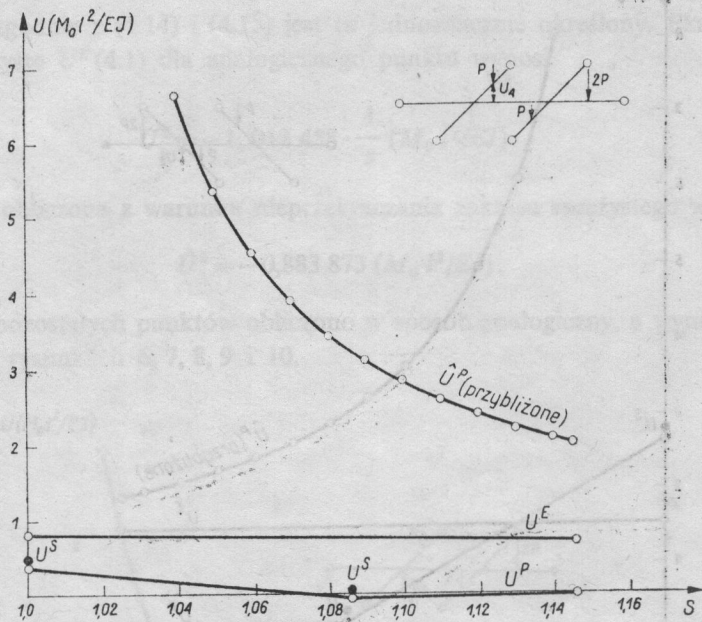
Ugięcie trwałe  $\hat{U}^P$ , otrzymane w sposób przybliżony, przy niewielkich współczynnikach bezpieczeństwa znacznie przekracza ugięcia sprężyste  $U^E$  (rys. 6, 7, 8, 9 i 10). Aby przekonać się, jaka jest faktyczna rozbieżność wyniku przybliżonego od ścisłego, poszukano rozwiązania dokładnego dla dwóch różnych współczynników bezpieczeństwa  $s$ , tzn. rozwiązania maksymalizującego funkcję celu, spełniającego wszystkie ograniczenia i odpowiadającego pewnej rzeczywistej drodze obciążenia. Zakłada się przy tym, że przedziały czasu  $t$  (rys. 11b) są dostatecznie duże, aby móc zaniedbać wpływ sił masowych. Rozwiązanie to, będące maksymalnymi ugięciami trwałymi  $U^S$ , dla dwóch różnych współczynników bezpieczeństwa  $s$  względem przystosowania oraz dla różnych przekrojów rusztu, przedstawiono na rys. 6, 7,



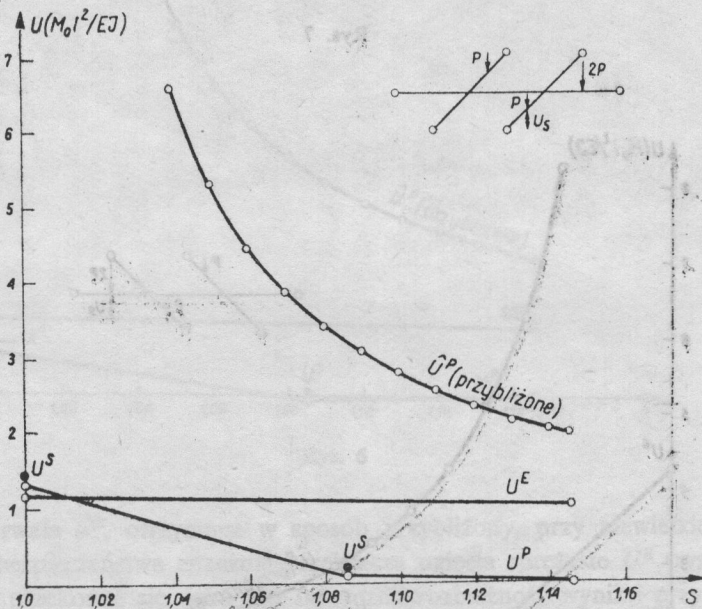
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

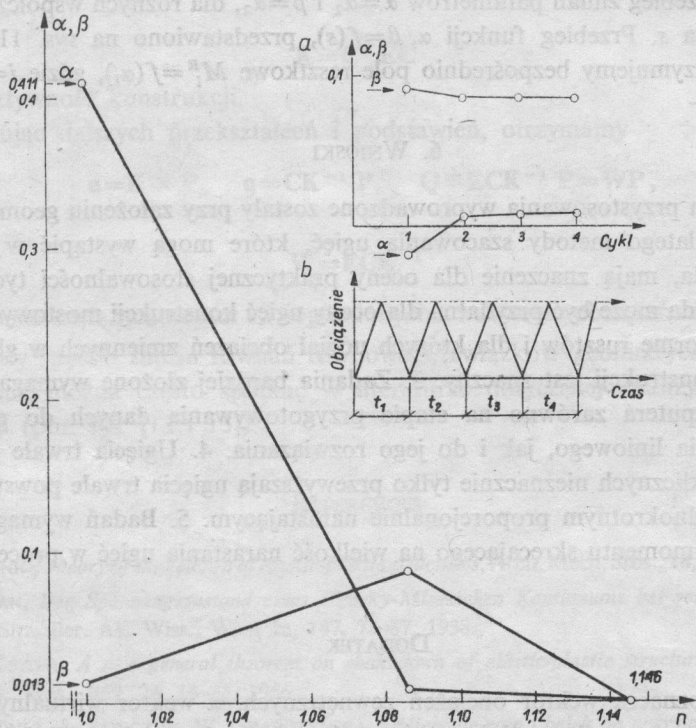


Rys. 10

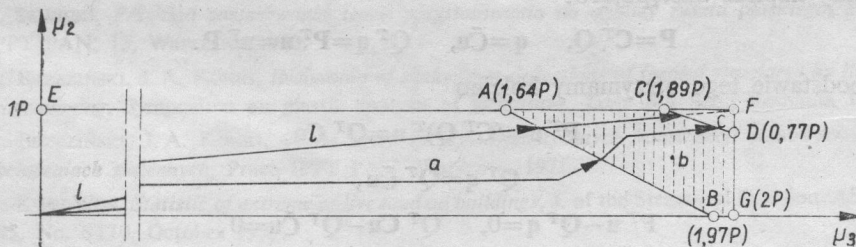
8, 9 i 10. W przypadku obciążenia bliskiego granicznemu z punktu widzenia przystosowania się konstrukcji stabilizacja ugięć trwałych następowała po pięciu cyklach obciążeń, natomiast dla współczynnika bezpieczeństwa  $s=1,085$  stabilizacja ugięć trwałych zachodziła po czterech cyklach obciążeń (rys. 11a i 11b). W obu wypadkach główna część odkształcenia trwałego powstawała na pierwszym cyklu obciążenia

żenia (rys. 11a). Obliczono również ugięcia trwałe  $U^P$  przy obciążeniu jednokrotnym, proporcjonalnie narastającym. Wyniki przedstawiono na rys. 6, 7, 8, 9 i 10.

Przedziały zmienności obciążeń dany nierównościami (5.1) nie pozwalają wnioskować o drodze obciążenia. Może być ona dowolna. Przebieg jej dla obciążeń zmiennych jest często w praktyce zdarzeniem losowym. Na rys. 12 przedstawiono w płaszczyźnie mnożników obciążenia  $\mu_2$  i  $\mu_3$ , przykładowe historie obciążeń. Obciążeniu



Rys. 11



Rys. 12

proporcjonalnemu odpowiada prosta  $l$ . Współrzędne punktów odcinka  $AB$  odpowiadają takim wartościom mnożników obciążenia  $\mu_2, \mu_3$ , przy których zaczyna powstawać przegub plastyczny (obrót trwały  $\theta_3^P$  w punkcie trzecim (rys. 4) rusztu). «Wejście» w obszar  $b$ , jest równoznaczne więc z powstaniem pewnego pola reszt-

kowego  $M_i^R$ , spowodowanego obrotem  $\Theta_3^P$ . Obszarowi  $c$  odpowiada kombinacja mnożników obciążenia  $\mu_2$  i  $\mu_3$ , dla których nastąpi kolejny obrót plastyczny i pole resztkowe  $M_i^R$  jest opisane obrotami w przekrojach krytycznych trzecim  $\Theta_3^P$  i siódmym  $\Theta_7^P$ . Tak więc w tym przypadku różne drogi obciążenia prowadzą do powstania jednoznacznego pola resztkowego. Pole to jest opisane przez dwa parametry  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Na podstawie analizy sprężysto-plastycznej przy różnych historiach obciążenia, otrzymano przebieg zmian parametrów  $\alpha = \alpha_1$  i  $\beta = \alpha_2$ , dla różnych współczynników bezpieczeństwa  $s$ . Przebieg funkcji  $\alpha, \beta = f(s)$ , przedstawiono na rys. 11. Na tej podstawie otrzymujemy bezpośrednio pole resztkowe  $M_i^R = f(\alpha_i)$ , gdzie  $i=1, 2$ .

## 6. WNIOSKI

1. Kryteria przystosowania wyprowadzone zostały przy założeniu geometrycznej liniowości. Dlatego metody szacowania ugięć, które mogą wystąpić w procesie przystosowania, mają znaczenie dla oceny praktycznej stosowalności tych twierdzeń. 2. Metoda może być przydatna dla oceny ugięć konstrukcji mostowych, które często mają formę rusztów i dla których udział obciążeń zmiennych w globalnym obciążeniu konstrukcji jest znaczny. 3. Zadania bardziej złożone wymagają zastosowania komputera zarówno na etapie przygotowywania danych do problemu programowania liniowego, jak i do jego rozwiązania. 4. Ugięcia trwałe przy obciążeniach cyklicznych nieznacznie tylko przewyższają ugięcia trwałe powstałe przy obciążeniu jednokrotnym proporcjonalnie narastającym. 5. Badań wymaga określenie wpływu momentu skręcającego na wielkość narastania ugięć w procesie przystosowania.

## DODATEK

Niech  $\mathbf{P}$  oznacza wektor obciążeń zewnętrznych,  $\mathbf{u}$  wektor wirtualnych przemieszczeń,  $\mathbf{Q}$  wektor sił uogólnionych,  $\mathbf{q}$  wektor przemieszczeń uogólnionych.

Równanie równowagi, równanie geometryczne oraz zasadę prac wirtualnych możemy napisać następująco:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q}, \quad \mathbf{q} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u}, \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{q} = \mathbf{P}^T \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{P}.$$

Na podstawie tego otrzymamy kolejno

$$\mathbf{P}^T \mathbf{u} = (\mathbf{C}^T \mathbf{Q})^T \mathbf{u} = \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{q} = \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u},$$

$$\mathbf{P}^T \mathbf{u} - \mathbf{Q}^T \mathbf{q} = 0, \quad \mathbf{Q}^T \mathbf{C} \mathbf{u} - \mathbf{Q}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{u} = 0,$$

$$\mathbf{Q}^T (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) \mathbf{u} = 0, \quad (\mathbf{C} - \tilde{\mathbf{C}}) = 0, \quad \mathbf{C} = \tilde{\mathbf{C}}, \quad C_{ij} = \tilde{C}_{ij},$$

co było do okazania.

Należy również zaznaczyć, że składowe macierzy równowagi  $C_{ij}$  są stałe i jednoznacznie określone dla danej konstrukcji. Zależą one jedynie od jej parametrów geometrycznych. Macierz równowagi  $C_{ij}$  wpływa natomiast w sposób zasadniczy na postać macierzy szytywności.



Mianowicie, niech  $E$  oznacza macierz konstytutywną: wtedy równanie konstytutywne możemy napisać następująco:

$$Q = Eq.$$

Stąd korzystając z dwóch pierwszych równań dodatku otrzymamy

$$P = C^T Q = C^T E q = C^T E C u = K u,$$

gdzie

$$K = C^T E C$$

oznacza sztywność konstrukcji.

Dokonując dalszych przekształceń i podstawień, otrzymamy

$$u = K^{-1} P, \quad q = C K^{-1} P, \quad Q = E C K^{-1} P = W P,$$

gdzie

$$W = E C K^{-1}$$

oznacza macierz wiążącą wektor sił uogólnionych z wektorem obciążeń zewnętrznych.

Powyższy sposób zapisu równań równowagi, związków geometrycznych i konstytutywnych można często spotkać w literaturze dotyczącej analizy plastycznej konstrukcji (por. np. [12 i 13]).

#### REFERENCES

1. J. A. KÖNIG, *Theory of shakedown of elastic-plastic structures*, Arch. Mech. Stos., **18**, 227-238, 1966
2. E. MELAN, *Der Spannungszustand eines Hencky-Miseschen Kontinuums bei veränderlicher Belastung*, Sitz. Ber. Ak. Wiss., Wien 2a, **147**, 73-87, 1938.
3. W. T. KOITER, *A new general theorem on shakedown of elastic-plastic structures*, Proc. Kon. Ned. Ak. Wet., **B59**, 24, 14-25, 1956.
4. J. A. KÖNIG, A. SAWCZUK, W. GRABCYŃSKA, *Obliczanie ram i belek na przystosowanie*, Zesz. Probl. "Mostostal", Warszawa 1974.
5. L. KONIECZNY, *Teoria przystosowania dla belek*, Mech. Teor. Stos. **8**, 259-276, 1970.
6. T. SAWICKI, *Przykład zastosowania teorii przystosowania do analizy rusztu płaskiego*, Prace IPPT PAN, **15**, Warszawa 1980.
7. R. BRZEZIŃSKI, J. A. KÖNIG, *Evaluation of shakedown deflections of framed structures by linear programming*, Symposium on plastic analysis of structures, Jassy 6-8 Sep., Romania 1972.
8. R. BRZEZIŃSKI, J. A. KÖNIG, *Ocena ugięć sprężysto plastycznych konstrukcji ramowych przy obciążeniach zmiennych*, Prace IPPT PAN, Warszawa 1971.
9. YI-KWEI WEN, *Statistic of extreme of live load on buildings*, J. of the Structural Division, ASCE, **105**, No. ST10, October 1979.
10. R. BRZEZIŃSKI, A. A. KÖNIG, *Obliczania ram według teorii adaptacji*, Prace IPPT PAN, **6**, Warszawa 1973.
11. S. J. GASS, *Programowanie liniowe*, Warszawa 1973.
12. A. CYRAS, *Miethody linijnogo programmirovaniija pri rasčotie uprugoplastičeskich sistem*, Izd. Lit. po Stroitu., Leningrad 1969.
13. G. MAIER, *A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects*, Int. Symp. Foundations of Plasticity 417-433, Warsaw 1972.

## Резюме

## ПРОГИБЫ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО РОСТВЕРКА ПРИ ПЕРЕМЕННЫХ НАГРУЗКАХ

В работе применен метод оценки прогибов конструкции, подвергнутой переменным нагрузкам, для случая плоского ростверка. Примененный метод дает верхнюю грань прогибов, какие могут выступать в конструкции, изготовленной из упруго-идеально пластического материала.

## SUMMARY

## DEFLECTIONS OF AN ELASTIC-PLASTIC GRIDWORK UNDER VARIABLE LOADS

The paper presents a method of evaluation of deflections of a structure subjected to variable loading in the case of a plane gridwork. The method applied yields the upper estimate of deflections, which may occur in a structure made of an elastic-perfectly plastic material.

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

*Praca została złożona w Redakcji dnia 2 kwietnia 1981 r.*