

STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH ŁUKÓW I PANELI WALCOWYCH (*)

NGUYEN-CAO-DUONG i ZENON WASZCZYSZYN (KRAKÓW)

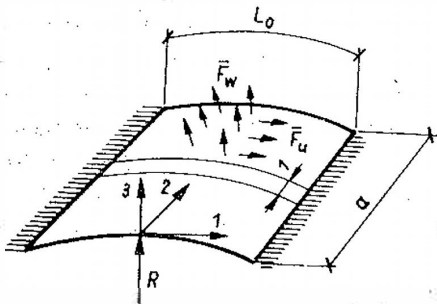
Zastosowano zakrzywiony element izoparametryczny o dwunastu stopniach swobody. Do numerycznego obliczania składowych macierzy elementu użyto wzoru Lobatta, w którym skrajne węzły całkowania są umieszczone na brzegach elementu. Przyrostowe równania metody elementów skończonych wyprowadzono w globalnym opisie Lagrange'a. Przyjęto teorię małych odkształceń umiarkowanie dużych przemieszczeń. Założono że, materiał jest sprężysto-plastyczny, ściśliwy z liniowym izotropowym i kinematycznym wzmocnieniem. Ograniczono się do obciążeń konserwatywnych.

Do obliczenia ścieżki równowagi zastosowano zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona z przemieszczeniowym parametrem sterującym. Jako kryterium stanu krytycznego przyjęto zerowanie się lub też zmianę znaku wyznacznika macierzy stycznej. Opracowany algorytm pozwala obliczać punkty graniczne (przeskoku) i bifurkacyjne.

Obliczenia numeryczne wykonano dla paneli walcowych oraz łuków kołowych obciążonych ciśnieniem zewnętrznym $i /$ lub siłą skupioną w środku rozpiętości.

1. UWAGI WSTĘPNE I ZAŁOŻENIA

W pracy będziemy zajmowali się powłoką walcową, która jest dostatecznie długa ($a > 3L_0$) z obciążeniem niezmiennym wzdłuż tworzącej (np. ciśnienie zewnętrzne) tak, że można rozważania ograniczyć do paska o jednostkowej szerokości,



Rys. 1

kości, znajdującego się w płaskim stanie odkształcenia (rys. 1). Dalej taką powłokę nazywamy panelem walcowym. Założenie jednoosiowego stanu naprężenia odpowiada łukowi o przekroju prostokątnym.

(*) Praca została wykonana częściowo w ramach Problemu Węzłowego 05.12.

Badanie stateczności panelu lub łuku wymaga nieliniowej analizy stanów równowagi, a obliczenia będą kontynuowane również po przekroczeniu punktów krytycznych typu granicznego lub bifurkacyjnego.

Literatura poświęcona stateczności paneli walcowych w zakresie sprężystym jest dość bogata. Wymieniamy tutaj tylko monografię WOLMIRA [15] i tablice KORNISZYNA i ISANBAJEWY [5]. Należy dodać, że przyjęcie współczynnika Poissona $\nu=0$ prowadzi do jednoosiowego stanu naprężenia, jaki przyjmuje się w smukłych łukach. Obliczeniu stateczności łuków poświęcono bardzo wiele prac. Z najważniejszych wymieniamy analityczne rozwiązania MASURA [6] i numeryczne otrzymane metodą elementów skończonych [3].

Jeśli chodzi o literaturę poświęconą dużym ugięciom i stateczności łuków poza zakresem sprężystym, to jest ona bardziej uboga. Analiza zakresu sprężysto-plastycznego jest znacznie trudniejsza, gdyż wymaga określenia rozkładu stref uplastycznienia. Kilka prac radzieckich poświęcono badaniu małych ugięć łuków sprężysto-plastycznych jest cytowanych w [14]. W tej samej publikacji stosowano metodę wstrzeliwania do obliczenia na komputerze dużych ugięć i obciążenia granicznego łuku sprężysto-plastycznego. Pomimo poszukiwań nie znaleziono w dotychczasowej literaturze prac na temat zastosowania metody elementów skończonych (MES) do badania stateczności łuków poza zakresem sprężystym. Duże ugięcie mało wyniosłych paneli wykonanych z materiału nieliniowo sprężystego były obliczane metodą różnic skończonych [4]. Statecznością sprężysto-plastycznych paneli walcowych zajęto się w pracy [1]. Zastosowano tam metodę wstrzeliwania połączone z metodą zakłóceń dla obliczania obciążeń typu bifurkacyjnego i przeskoku.

Istotną trudnością analizy stateczności sprężysto-plastycznych paneli walcowych jest konieczność uwzględnienia dwuosowego stanu naprężeń i lokalnych odciążań. Komplikuje to w istotny sposób algorytmy i programy na komputery. Pomimo istnienia ogólnych programów MES do obliczania powłok sprężysto-plastycznych nie znaleziono w literaturze prac poświęconych zastosowaniu tej metody do nieliniowej analizy stateczności paneli walcowych.

W niniejszej pracy stosuje się metodę elementów skończonych. Stosowany będzie zakrzywiony element izoparametryczny o dwunastu stopniach swobody. Podstawowe równania będą wyrażone w postaci przyrostowej. Do całkowania składowych macierzy elementu użyto wzoru Lobatta [9]. Do rozwiązywania równań przyrostowych MES zastosowano zmodyfikowaną metodę Newtona-Raphsona z przemieszczeniowym parametrem sterującym. W porównaniu z [1] opracowane algorytmy umożliwią wykonania obliczeń w zakresie pozakrytycznym typu granicznego i bifurkacyjnego.

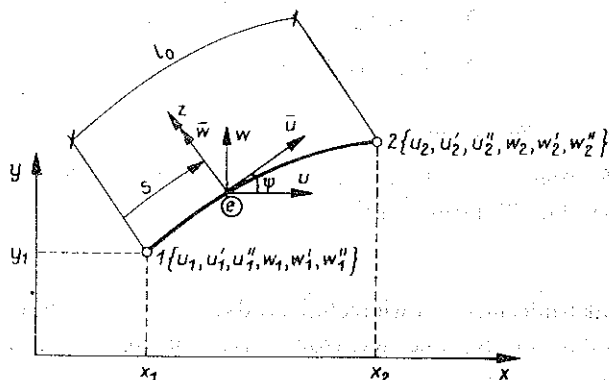
W pracy oprzemy się na następujących założeniach:

1. Panel o jednostkowej szerokości znajduje się w płaskim stanie naprężenia.
2. Grubość panelu h jest na tyle mała w porównaniu z a , L i R (rys. 1), że można pominąć wpływ naprężeń stycznych i normalnych σ_z i przyjąć zasadę płaskich przekrojów (odcinka normalnego).
3. Zagadnienie rozpatrujemy na gruncie teorii małych odkształceń, lecz dużych przemieszczeń.

4. Materiał jest sprężysto-plastyczny, ściśliwy z liniowym izotropowym i kinematycznym wzmocnieniem.
5. Stosuje się opis globalny Lagrange'a (*total Lagrangian*).
6. Obciążenie jest konserwatywne i niezależne od konfiguracji.
7. W przypadku łuku rozpatruje się utratę stateczności w płaszczyźnie głównej, na której leży oś łuku.

2. OPIS JEDNOWYMIAROWEGO ELEMENTU ZAKRZYWIONEGO

Stosując MES układ dzielimy na elementy skończone wzdłuż jego osi. Zarówno dla panelu jak też dla łuku element przyjmujemy jako zakrzywiony, geometrycznie jednowymiarowy (rozważania ograniczamy do osi elementu), odnoszony do układu lokalnych współrzędnych krzywoliniowych s, z i kartezjańskiego układu globalnego x, y (rys. 2), gdzie $s \in [0, l_0]$, $z \in [-h/2, h/2]$.



Rys. 2

W dalszych obliczeniach będziemy posługiwali się współrzędnymi bezwymiarowymi w przedziale $[-1, 1]$:

$$(2.1) \quad \xi = \frac{2s}{l_0} - 1, \quad \zeta = \frac{2z}{h}.$$

Zarówno dla aproksymacji wielkości geometrycznych jak też przemieszczeń przyjmujemy po sześć stopni swobody w każdym węźle, także współrzędne punktu osi x, y oraz przemieszczenia u, w będzie można aproksymować wielomianami stopnia piątego.

W przypadku przemieszczeń przyjmujemy, że wektor uogólnionych przemieszczeń węzłów elementu ma postać

$$(2.2) \quad \mathbf{q}^e = \{\mathbf{q}_u, \mathbf{q}_w\},$$

gdzie użyto oznaczeń

$$(2.3) \quad \mathbf{q}_u = \{u_1, u_1', u_1'', u_2, u_2', u_2''\}, \\ \mathbf{q}_w = \{w_1, w_1', w_1'', w_2, w_2', w_2''\}.$$

W dalszym ciągu różniczkowania względem zmiennej ξ będziemy oznaczali kreskami tzn. $d(\dots)/d\xi = (\dots)'$ i $d^2(\dots)/d\xi^2 = (\dots)''$. Składowe wektorów \mathbf{q}_u oraz \mathbf{q}_w są odno-

szone do układu globalnego (rys. 2). Przyrosty przemieszczeń Δu i Δw aproksymujemy wielomianami:

$$(2.4) \quad \Delta u = \sum_{p=1}^6 N_p(\xi) \Delta q_p, \quad \Delta w = \sum_{r=7}^{12} N_r(\xi) \Delta q_r,$$

gdzie $N_k(\xi) = N_{k+6}(\xi)$ ($k=1, 2, \dots, 6$) są funkcjami kształtu, które przyjmuje się jako wielomiany stopnia piątego.

Zgodnie z przyjętym typem elementu izoparametrycznego równania osi elementu będziemy przybliżali takimi samymi wielomianami jak przemieszczenia:

$$(2.5) \quad x = \sum_{p=1}^6 N_p(\xi) X_p, \quad y = \sum_{p=1}^6 N_p(\xi) Y_p,$$

gdzie użyto następujących oznaczeń dla uogólnionych współrzędnych węzłów:

$$(2.6) \quad \mathbf{X} = \{x_1, x'_1, x''_1, x_2, x'_2, x''_2\}, \\ \mathbf{Y} = \{y_1, y'_1, y''_1, y_2, y'_2, y''_2\}.$$

2.1. Równania geometryczne

Podstawowy związek geometryczny, wynikający z przyjętej hipotezy odcinka normalnego, piszemy w postaci [3]

$$(2.7) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa z,$$

gdzie ε_0 jest odkształceniem powierzchni środkowej, a κ przyrostem krzywizny powierzchni środkowej. Są one wyrażone przez przemieszczenia odnoszone do układu lokalnego s, z (rys. 2):

$$(2.8) \quad \varepsilon_0 = \frac{d\bar{u}}{ds} + \frac{\bar{W}}{R} + \frac{1}{2} \beta^2, \quad \kappa = \frac{d\beta}{ds},$$

gdzie kąt obrotu normalnej β jest funkcją przemieszczeń \bar{u}, \bar{w} :

$$(2.9) \quad \beta = \frac{\bar{u}}{R} - \frac{d\bar{w}}{ds}.$$

Przyrost skończony odkształceń obliczamy wzorem

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{u}).$$

Skąd wynika

$$(2.10) \quad \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^{LN} + \Delta \eta,$$

gdzie celowo wyróżniono wyraz $\Delta \varepsilon^{LN}$ zależny liniowo od przyrostów przemieszczeń i wyraz $\Delta \eta$ zależny od kwadratów przyrostów przemieszczeń:

$$(2.11) \quad \Delta \varepsilon^{LN} = \Delta \varepsilon_0^{LN} + \Delta \kappa z, \quad \Delta \eta = \frac{1}{2} \Delta \beta^2.$$

W (2.11) występują następujące wielkości:

$$(2.12) \quad \Delta \varepsilon_0^{LN} = \left(\frac{d\Delta \bar{u}}{ds} + \frac{1}{R} \Delta \bar{w} \right) + \beta \Delta \beta, \quad \Delta \beta = \frac{1}{R} \Delta \bar{u} - \frac{d\Delta \bar{w}}{ds}.$$

Korzystając z aproksymacji (2.4) dla przyrostów przemieszczeń, można również przyrosty odkształceń wyrazić przez wartości węzłowe. Ponieważ wzory (2.11) i (2.12) wyrażają zależność odkształceń od przemieszczeń w lokalnym układzie współrzędnych, przeto najpierw należy wykonać transformację przyrostów przemieszczeń z układu globalnego do lokalnego:

$$(2.13) \quad \begin{bmatrix} \Delta \bar{u} \\ \Delta \bar{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta w \end{bmatrix},$$

gdzie ψ jest kątem między styczną do krzywej a osią x (rys. 2), natomiast $\sin \psi$, $\cos \psi$ są funkcjami zmiennej niezależnej ξ . Funkcje te wyrażamy przez

$$(2.14) \quad \operatorname{tg} \psi = \left(\frac{dy}{d\xi} \right) / \left(\frac{dx}{d\xi} \right).$$

Podstawiając (2.4) do (2.13) otrzymujemy

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \Delta \bar{u} &= \sum_{p=1}^6 a_p \Delta q_p + \sum_{r=7}^{12} b_r \Delta q_r, \\ \Delta \bar{w} &= - \sum_{p=1}^6 b_a \Delta q_p + \sum_{r=7}^{12} a_r \Delta q_r; \end{aligned}$$

gdzie użyto oznaczeń:

$$(2.16) \quad a_k = N_k(\xi) \cos \psi, \quad b_k = N_k(\xi) \sin \psi \quad \text{dla} \quad k=1, 2, \dots, 12.$$

Przyjmując bezwymiarowe współrzędne (2.1), przy uwzględnieniu (2.15), zależności (2.11) piszemy w postaci

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \Delta \varepsilon^{LN} &= \sum_{k=1}^{12} (c_k + \beta \cdot g_k + \zeta e_k) \Delta q_k, \\ \Delta \eta &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{12} g_k \Delta q_k \right)^2, \end{aligned}$$

gdzie użyto oznaczenia związane z funkcjami kształtu:

$$(2.18) \quad \begin{aligned} c_p &= \frac{1}{l_0} a'_p - \frac{b_p}{R}, & c_r &= \frac{1}{l_0} b'_r + \frac{a_r}{R}, \\ e_p &= \frac{h}{l_0} \left(\frac{a'_p}{R} + \frac{2}{l_0} b''_p \right), & e_r &= \frac{h}{l_0} \left(\frac{b'_r}{R} - \frac{2}{l_0} a''_r \right), \\ g_p &= \frac{a_p}{R} + \frac{2}{l_0} b'_p, & g_r &= \frac{b_r}{R} - \frac{2}{l_0} a'_r \end{aligned}$$

dla $p=1, 2, \dots, 6$ oraz $r=7, 8, \dots, 12$.

2.2. Równania fizyczne

W rozpatrywanym problemie (rys. 1) osie główne naprężeń pokrywające się z kierunkami (1, 2, 3) nie ulegają obrotowi podczas odkształcania się panelu.

Korzystając z przyjętych założeń dla panelu:

$$\Delta \varepsilon_2 \equiv 0, \quad \Delta \sigma_3 \equiv 0,$$

równania fizyczne można napisać w postaci

$$(2.19) \quad \Delta S_\alpha = E_\alpha \Delta \varepsilon \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie wprowadzono inne niż w [1] naprężenia bezwymiarowe S_α oraz oznaczenia dla przyrostu odkształcania $\Delta \varepsilon$ wzdłuż osi ξ :

$$(2.20) \quad \Delta S_\alpha = \frac{1-\nu^2}{E} \Delta \sigma_\alpha, \quad \Delta \varepsilon \equiv \Delta \varepsilon_1.$$

W dalszym ciągu obok modułu sprężystości E oraz współczynnika Poissona ν będziemy posługiwali się wielkościami E_α , które dalej nazywamy lokalnymi sztywnościami. Lokalne sztywności zależą od rodzaju procesu oraz od stopnia uplastycznienia. Dla procesu aktywnego (lokalne obciążenia, tzn. występuje przyrost odkształceń plastycznych, wtedy przyrost intensywności naprężeń $\Delta S_\alpha \geq 0$) otrzymujemy [1] (*)

$$(2.21) \quad E_1 = \frac{1}{M} [(1-\nu^2) \bar{S}_2^{0^2} + B], \quad E_2 = \frac{1}{M} [(\nu^2-1) \bar{S}_1^0 \bar{S}_2^0 + \nu B],$$

gdzie użyto oznaczeń

$$(2.22) \quad B = \frac{2}{3} \left(C + \frac{2}{3} A \right) f^2, \quad M = \bar{S}_2^{0^2} + 2\nu \bar{S}_1^0 \bar{S}_2^0 + \bar{S}_2^{0^2} + B,$$

$$\bar{S}_\alpha^0 = S_\alpha^0 - \frac{1}{3} (S_1^0 + S_2^0), \quad S_\alpha^0 = S_\alpha - a_\alpha.$$

W przypadku procesu biernego (lokalne odciążenia $\Delta S_\alpha < 0$ lub zakres sprężysty) otrzymujemy:

$$(2.23) \quad E_1 = 1, \quad E_2 = \nu.$$

We wzorach (2.22) na B i M przyjęto liniowe kinematyczno-izotropowe wzmocnienia. Chwilowy ruch środka krzywej granicznej (rys. 3) jest opisany prawem Zieglera:

$$(2.24) \quad \Delta a_\alpha = C (\Delta \varepsilon_\alpha^p + \Delta \varepsilon_1^p + \Delta \varepsilon_2^p),$$

gdzie przyrosty odkształceń plastycznych wynoszą

$$(2.25) \quad \Delta \varepsilon_1^p = \left(1 - \frac{E_1 - \nu E_2}{1 - \nu^2} \right) \Delta \varepsilon, \quad \Delta \varepsilon_2^p = \frac{\nu E_1 - E_2}{1 - \nu^2} \Delta \varepsilon,$$

a współczynnik C określa wzmocnienie kinematyczne.

(*) W porównaniu z [1] obok wzmocnienia izotropowego uwzględnione są również wzmocnienia kinematyczne.

Krzywa graniczna (warunek plastyczności) jest opisana równaniem

$$(2.26) \quad S_e^2 = S_1^{0^2} - S_1^0 S_2^0 + S_2^{0^2} = f^2 (\bar{\varepsilon}_p),$$

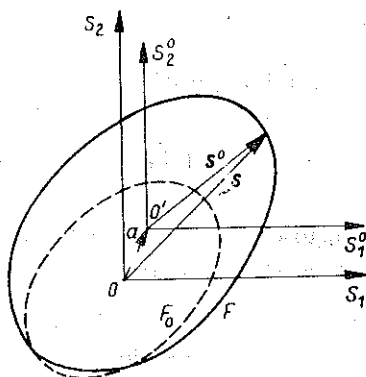
gdzie przyjęto liniowe wzmocnienie izotropowe, któremu odpowiada funkcja

$$(2.27) \quad f = S_p + A \bar{\varepsilon}_p.$$

We wzorze (2.27) obok naprężenia na granicy plastyczności $S_p = \sigma_p (1 - \nu^2)/E$ posługujemy się parametrem Odqvista, którego przyrost wynosi

$$(2.28) \quad \Delta \bar{\varepsilon}_p = \frac{2}{\sqrt{3}} (\Delta \varepsilon_1^p{}^2 + \Delta \varepsilon_1^p \Delta \varepsilon_2^p + \Delta \varepsilon_2^p{}^2)^{\frac{1}{2}},$$

a współczynnik A określa wzmocnienie izotropowe.



Rys. 3

W łuku przyjmujemy jednoosiowy stan naprężenia, a więc obok $\Delta \sigma_3 = 0$ będzie też spełnione założenie:

$$(2.29) \quad \Delta \sigma_2 \equiv 0, \quad \Delta \varepsilon_2 \neq 0.$$

Założenie to znacznie upraszcza równanie fizyczne, które dla łuku można napisać w postaci:

$$(2.30) \quad \Delta S \equiv \frac{\Delta \sigma_1}{E} = E_1 \Delta \varepsilon_1.$$

Inne zależności również upraszczają się do postaci następujących:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} \Delta \varepsilon_2^p &= -\frac{1}{2} \Delta \varepsilon_1^p, & \Delta \bar{\varepsilon}_p &= |\Delta \varepsilon_1^p|, \\ \Delta a_1 &= \frac{3}{2} C \Delta \varepsilon_1^p, & f &= S_p + A |\Delta \varepsilon_1^p|, \\ S &= |S_1 - a_1|. \end{aligned}$$

Stąd możemy wyprowadzić wzory dla lokalnej sztywności w przypadku procesu aktywnego, tzn. gdy $\Delta S_e \geq 0$:

$$(2.32) \quad E_1 = \frac{3C+2A}{2+3C+2A}$$

Dla procesu biernego mamy jak w panelu

$$(2.33) \quad E_1 = 1.$$

2.3. Macierze elementu skończonego

Macierz stycznią oraz wektory węzłowe sił równoważnych i sił niezrównoważonych obliczamy na podstawie zasady prac wirtualnych. Dla przyjętego całkowitego opisu Lagrange'a praca sił (naprężeń) na wirtualnych przyrostach przemieszczeń (odkształceń) wynosi [12]:

$$(2.34) \quad \int_{V_0} \int \Delta \sigma_1 \delta \Delta \varepsilon^{L2} dV_0 + \int_{V_0} \int \sigma_1 \delta \Delta \varepsilon^{LN} dV_0 + \int_{V_0} \int \sigma_1 \delta \Delta \eta dV_0 = \\ = \int_{S_0} [(\bar{F}_u + \Delta \bar{F}_u) \delta \Delta \bar{u} + (\bar{F}_w + \Delta \bar{F}_w) \delta \Delta \bar{w}] dS_0,$$

gdzie V_0 i S_0 oznaczają objętość i pole o powierzchni środkowej i konfiguracji początkowej, a \bar{F}_u , \bar{F}_w są intensywnościami obciążeń powierzchniowych (rys. 1).

Przyjmując bezwymiarowe współrzędne (2.1) i po wykonaniu elementarnych przekształceń przyrostowe równanie równowagi elementu otrzymujemy w postaci:

$$(2.35) \quad (\mathbf{k}^o + \mathbf{k}^{u1} + \mathbf{k}^{u2} + \mathbf{k}^s) \Delta \mathbf{q}^e = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{r},$$

gdzie po prawej stronie występuje wektor sił residualnych

$$(2.36) \quad \mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{f}.$$

W stanie równowagi wektor obciążeń \mathbf{p} jest równy wektorowi sił wewnętrznych \mathbf{f} . Korzystając z zależności (2.15)–(2.19), otrzymujemy wzory dla składowych macierzy stycznej:

$$(2.37) \quad k_{ij}^o = \frac{hl_0}{4} \int_{-1}^1 [d_{01} c_i c_j + d_{11} (c_i e_j + e_i c_j) + d_{21} e_i e_{ja}] b d\xi, \\ k_{ij}^{u1} = \frac{hl_0}{4} \int_{-1}^1 [d_{01} (c_i g_j + c_j g_i) + d_{11} (e_i g_j + e_j g_i)] \beta b d\xi, \\ k_{ij}^{u2} = \frac{4h}{l_0^3} \int_{-1}^1 \beta^2 d_{01} g_i g_j b d\xi, \\ k_{ij}^s = \frac{h}{l_0} \int_{-1}^1 n_1 g_i g_j b d\xi$$

oraz dla składowych wektorów \mathbf{f} i $\Delta \mathbf{p}$:

$$(2.38) \quad \mathbf{f}_i = \frac{hl_0}{4} \int_{-1}^1 [n_1 (c_i + \beta g_i) + m_1 e_{ia} b] d\xi,$$

$$\Delta p_p = \frac{l_0}{2} \int_{-1}^1 (a_p \Delta \rho_u b_p \Delta \rho_w) d\xi, \quad \Delta p_r = \frac{l_0}{2} \int_{-1}^1 (b_r \Delta \rho_u + a_r \Delta \rho_w) d\xi,$$

gdzie $i, j=1, 2, \dots, 12$, $p=1, \dots, 6$, $d=7, 8, \dots, 12$. W podanych wzorach przez n_1 , m_1 oznaczono siłę podłużną i moment zginający przekroju elementu a przez b szerokość przekroju ($b=1$ dla panelu). Przyjęto również oznaczenia d_{k1} ($k=0, 1, 2$) dla zastępczych sztywności przekroju elementu, które liczymy za pomocą wzoru

$$(2.39) \quad d_{k1} = \int_{-1}^1 E_1(\xi) \xi^k d\xi.$$

W (2.38) posłużono się bezwymiarową intensywnością obciążeń

$$(2.40) \quad \Delta \rho_\alpha = \frac{1-\nu^2}{E} \bar{F}_\alpha \quad \text{dla panelu,}$$

$$\Delta \rho_\alpha = \frac{1}{E} \bar{F}_\alpha \quad \text{dla łuku} \quad (\alpha=u, w).$$

2.4. Numeryczne obliczanie składowych macierzy elementu

Istotnym problemem jest obliczanie całek określających składowe macierzy elementu. Ze względu na zależność lokalnej sztywności $E_1(\xi, \zeta)$ od uplastycznienia, jak też występowania β oraz s_1 pod całkami, jedynym sposobem jest skorzystanie ze wzorów numerycznego całkowania.

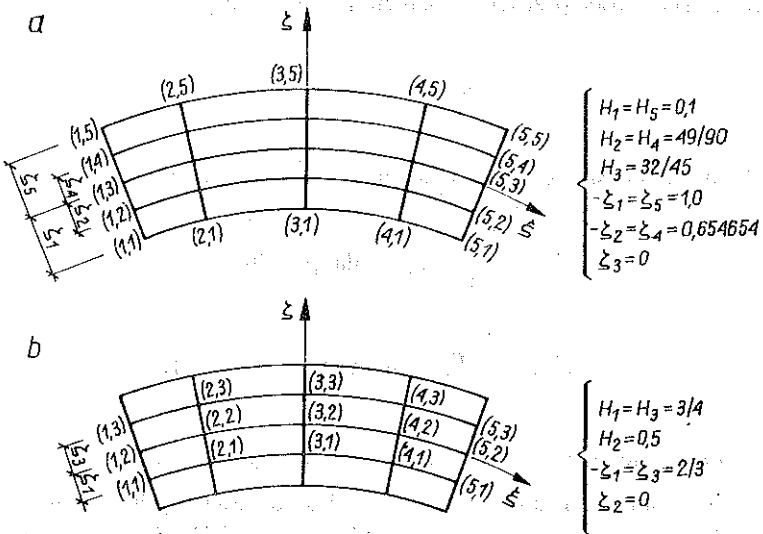
W pracy posłużono się modyfikacją wzorów Gaussa, które znane są pod nazwą wzorów kwadratowych Lobatta [9]. Polegają one na ustaleniu położenia węzłów zewnętrznych (punktów całkowania Gaussa), tak, aby leżały one na brzegach elementu (rys. 4a).

Zaletą tych elementów jest obliczanie naprężeń w punktach istotnych dla oceny stanu naprężeń (warstwy zewnętrzne i przekroje przechodzą przez węzły brzegowe elementu). Wzory te można krótko napisać w postaci

$$(2.41) \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta = \sum_{i=1}^L \sum_{r=1}^R H_i H_r f(\xi_i, \zeta_r),$$

gdzie H_i , H_r oraz położenie węzłów ξ_i , ζ_r zależą od liczby przyjętych węzłów L , R (por. [9]). Na rys. 4a przyjęto $L=R=5$, przy czym podano również odpowiednie wagi H_r i położenia węzłów ζ_r .

Okazuje się, że dobre wyniki można uzyskać też dla tak zwanych wielopunktowych przekrojów zastępczych o stosunkowo małej liczbie węzłów całkowania [8]. Jako przykład dobierzemy element o przekrojach zastępczych trzypunktowych, w którym przyjmujemy, że przekrój zastępczy ma być równoważny przekrojowi pełnościennemu w zakresie sprężystym oraz dla pełnego uplastycznienia przy zginaniu dla materiału idealnie plastycznego. Prowadzi to do zgodności powierzchni, momentu statycznego połowy przekroju i momentu bezwładności przekroju. Wynikają stąd wartości wagi H_r oraz odległości ζ_r ($r=1, 2, 3$) węzłów całkowania, które pokazano na rys. 4b, przy czym wzdłuż ξ przyjmujemy węzły Lobatta tak jak w pierwszym typie elementu (rys. 4a).

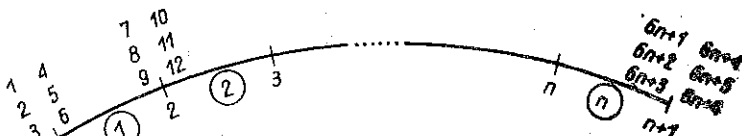


Rys. 4

3. OBLICZANIE UKŁADU ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

3.1. Równanie przyrostowe układu

Przy analizie układu elementów skończonych oś łuku dzielimy na n elementów o $n+1$ węzłach, które numerujemy tak, jak pokazano na rys. 5.



Rys. 5

Na tym rysunku pokazano numerację uogólnionych przemieszczeń (stopni swobody układu), jaką zastosowano w programie na komputer. Numeracja pokazana na rys. 5 odpowiada kolejności składowych wektora przemieszczeń węzłów całego układu:

$$(3.1) \quad q = \{q_1, q_2, \dots, q_{6n+6}\} = \{u_1, u_1', u_1'', w_1, w_1', w_1'', u_2, u_2', \dots, w_{n+1}'\}.$$

Agregacja układu elementów skończonych jest bardzo uproszczona ze względu na szeregowy układ elementów. Wynika stąd możliwość tworzenia macierzy globalnej przez „nasuwanie” na siebie macierzy elementów. Dochodzimy w ten sposób do globalnego układu równań przyrostowych

$$(3.2) \quad \mathbb{K} \Delta q = \Delta p + R,$$

gdzie macierz styczna \mathbb{K} jest sumą macierzy $\mathbb{K}^0, \mathbb{K}^{u1}, \mathbb{K}^{u2}, \mathbb{K}^w$, a wektory prawych stron wynikają z agregacji wektorów sił węzłowych elementów oraz obciążeń skupionych przykładanych w węzłach układu.

W dalszym ciągu ograniczymy się do jednoparametrowych, proporcjonalnych obciążeń

$$(3.3) \quad \Delta p = \Delta \lambda \bar{p},$$

gdzie λ jest parametrem obciążenia, a \bar{p} obciążeniem odniesienia.

Po zbudowaniu układu równań (3.2) należy uwzględnić warunki brzegowe zgodnie z procedurami MES. Spośród kilku możliwych sposobów wybrano wpisywanie jednostkowej wartości na przekątnej i zerowanie odpowiednich składowych wierszy i kolumn, co odpowiada dobieraniu właściwych stopni swobody [17]. Przy czym spełnienie warunków brzegowych wymaga posługiwania się lokalnym układem współrzędnych. Wynika to z występowania przemieszczeń \bar{u}, \bar{w} we wzorze (2.9) na kąt β obrotu normalnej. W tym celu zanim uwzględnimy warunki brzegowe należy dokonać transformacji przemieszczeń uogólnionych z układu globalnego do lokalnego dla podparcia końców konstrukcji, sposób ten dokładnie rozważono w [7].

3.2. Wyznaczanie ścieżki równowagi

W punktach krytycznych macierz styczna \mathbb{K} staje się osobliwa; z tego względu dalej będziemy posługiwali się rozszerzonym układem równań [13]:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \mathbb{K} \Delta q - \bar{p} \Delta \lambda &= R \\ \tilde{t} \Delta \tilde{q} &= \Delta \tau, \end{aligned}$$

który powstaje przez dopisanie dodatkowego równania do układu równań (3.2), gdzie τ przyjmuje się jako parametr sterowania. Jako wektor niewiadomych będziemy teraz przyjmowali

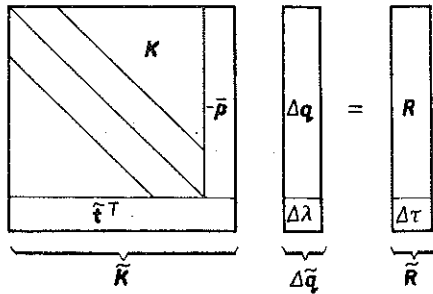
$$(3.5) \quad \Delta \tilde{q} = \{\Delta q, \Delta \lambda\}.$$

Dla zwiezłości układ równań (3.4) można napisać w następującej postaci:

$$(3.6) \quad \tilde{\mathbb{K}} \Delta \tilde{q} = \tilde{R}.$$

Na rys. 6 pokazano schematycznie budowę układu równań (3.6). Macierz \tilde{K} jest teraz niesymetryczna. Ostatni wiersz tej macierzy odpowiada przyjętemu wektorowi sterowania. W obliczeniach przyjęto sterowanie wyróżnioną j -tą składową wektora \mathbf{q} , co prowadzi do następującej postaci wektora $\tilde{\mathbf{t}}$:

$$(3.7) \quad \tilde{\mathbf{t}} = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0\},$$



Rys. 6

a więc jedyną niezerową składową wektora $\tilde{\mathbf{t}}$ będzie $t_j=1$. Łatwo przejść do sterowania obciążeniem przez wpisanie wartości 1 na miejscu $N+1$ -szym, gdzie N jest liczbą stopni swobody całego układu.

Podany sposób dokładniej analizowano w pracach [10 i 13]. Do obliczeń przyjęto metodę Newtona-Raphsona, modyfikując macierz K na każdym kroku iteracyjnym. Przyjmujemy przy tym dla kolejnych kroków iteracyjnych $i=0, 1, \dots$ wektor residuum:

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{R}}^{(0)} &= \{0, \Delta\tau\}, \\ \tilde{\mathbf{R}}^{(i)} &= \{\mathbf{R}^{(i)}, 0\} \quad \text{dla } i \geq 1. \end{aligned}$$

Podany algorytm obliczania wektora przemieszczeń \mathbf{q} można stosunkowo łatwo zrealizować dla konstrukcji sprężystych. Dla konstrukcji sprężysto-plastycznych pojawiają się dodatkowe problemy numeryczne przy uplastycznieniu lub lokalnym obciążeniu. W poszczególnych punktach konstrukcji (węzłach całkowania) będą występowały nieciągłości przy przekroczeniu granicy plastyczności.

Obliczenia rozpoczyna się w zakresie sprężystym. Po zakończeniu iteracji sprawdza się we wszystkich węzłach całkowania spełnienie warunku

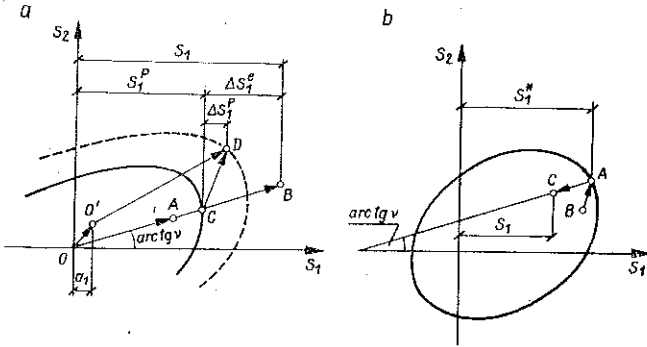
$$(3.9) \quad S_e^2 \equiv (1 - \nu + \nu^2) S_1^2 < S_p^2.$$

Jeśli warunek ten jest spełniony, to obliczenia kontynuujemy dla nowej wartości $\Delta\tau$. Jeśli warunek nie jest spełniony w którymkolwiek węzle numerycznego całkowania, to oznacza to, że przekroczyliśmy zakres sprężysty. W takim przypadku obliczamy dodatkowe siły niezrównoważone wynikające z przekroczenia granicy plastyczności w poszczególnych punktach konstrukcji.

Na rys. 7a pokazano naprężenie w wyróżnionym punkcie panelu pokrywającym się z węzłem numerycznego całkowania, gdy przekroczymy granicę sprężystości.

Korzystając z wzorów

$$(3.10) \quad \Delta S_1^e = S_1 - S_1^p = S_1 - \sqrt{1 - \nu + \nu^2} S_p = E_1^e \Delta \varepsilon^e = \Delta \varepsilon^e,$$



Rys. 7

przyjmujemy przyrost odkształceń sprężysto-plastycznych $\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e$ i obliczamy przyrost naprężeń:

$$(3.11) \quad \Delta S_\alpha^p = E_\alpha^0 \Delta \varepsilon \quad \text{dla} \quad \alpha = 1, 2,$$

gdzie E_α^0 obliczamy za pomocą wzorów (2.21). Naprężenia w punkcie D na krzywej plastyczności

$$(3.12) \quad S_\alpha = S_\alpha^p + \Delta S_\alpha^p$$

podstawiamy do (2.28), co umożliwi obliczenie sił niezrównoważonych.

Przed rozwiązywaniem układu równań poprawia się też macierz stywną elementu, licząc nowe wartości lokalnych sztywności $E_{\alpha\alpha}$ odpowiadające rozciągnięciu punktu D (rys. 7a). W tym celu oprócz naprężeń (3.12) należy obliczyć chwilowy ruch środka $O \rightarrow O'$; korzystając ze wzorów (2.24) i (2.25).

Podczas kolejnych iteracji będą liczone lokalne sztywności bez zmiany typu procesu. Po zakończeniu iteracji oblicza się przyrost intensywności

$$(3.13) \quad \Delta S_e = S_e(\tau_{m+1}) - S_e^*,$$

gdzie m oznacza poziom parametru sterowania τ a $S \equiv S(\tau_m)$ jest określoną intensywnością naprężeń notowaną w pamięci maszyny. Jeśli $\Delta S_e < 0$, to zmienia się typ procesu na bierny, traktując przyrosty odkształceń jako sprężyste:

$$(3.14) \quad \Delta \varepsilon = [S_1(\tau_{m+1}) - S_1^*] / E_1^e = \Delta \varepsilon^e,$$

$$\Delta S_1^e = \Delta \varepsilon^e, \quad \Delta S_2^e = \nu \Delta \varepsilon^e,$$

i oblicza się naprężenia, które odpowiadają punktowi C na rys. 7b:

$$(3.15) \quad S_\alpha = S_\alpha^* - \Delta S_\alpha^e.$$

Naprężenia te podstawiamy do (2.38) i po obliczeniu sił niezrównoważonych kontynuujemy obliczania bez zmiany wartości $\tau = \tau_{m+1}$. Podany przebieg obliczeń można stosować dla łuku przy uwzględnieniu wzorów (2.29)–(2.33).

Po wyzerowaniu sił residualnych poprawia się pamięć dla $\tau^* = \tau_{m+1}$ i kontynuuje się obliczenia dla nowego kroku $\tau = \tau^* + \Delta\tau$.

4. OBLICZANIE PUNKTÓW KRYTYCZNYCH I POBIFURKACYJNYCH ŚCIEŻEK RÓWNOWAGI

W numerycznej analizie stateczności konstrukcji sprężystych przy działaniu obciążeń konserwatywnych stosuje się różne równoważne kryteria osiągnięcia stanu krytycznego [13]. Jednym z tych kryteriów jest kryterium zerowania się wyznacznika macierzy stycznej:

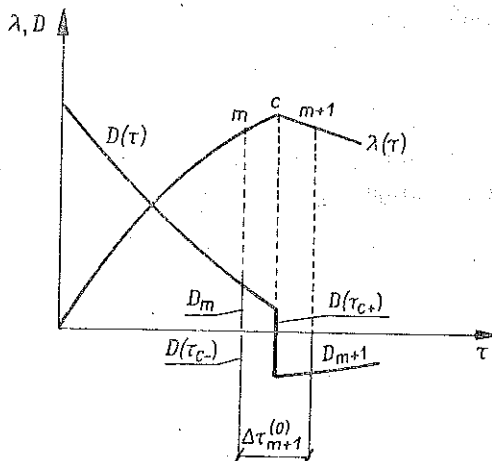
$$(4.1) \quad D \equiv \det |K| = 0.$$

Aby spełnić kryterium (4.1) można stosować metodę bisekcji lub metodę siecznych określenia punktów krytycznych [7].

W przypadku materiału sprężysto-plastycznego warunek (4.1) zerowania się wyznacznika może być niespełniony [16], gdy w punkcie krytycznym występuje skok wykresu (nieciągłość wartości) wyznacznika D . W takim przypadku do określenia punktu krytycznego należy stosować metodę bisekcji, przy czym w zakresie sprężysto-plastycznym nie można stosować sposobu obliczania tak jak w zakresie sprężystym.

Jeśli występuje zmiana znaku wyznacznika, tzn. $D_m \cdot D_{m+1} < 0$ (rys. 8), to musimy wracać do punktu m na ścieżce równowagi, dla którego wszystkie parametry są zanotowane w pamięci maszyny. Obliczanie na każdym kroku iteracji zaczyna się od tego samego stanu m z przyrostem parametru sterującego liczonym wzorem:

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \Delta\tau_{m+1}^{(l)} &= \Delta\tau_{m+1}^{(l-1)} - \Delta\tau_{m+1}^{(l)}, & \text{jeśli } D_m D_{m+1} < 0, \\ \Delta\tau_{m+1}^{(k)} &= \Delta\tau_{m+1}^{(k-1)} + \Delta\tau_{m+1}^{(k)}, & \text{jeśli } D_m D_{m+1} > 0, \end{aligned}$$



Rys. 8

gdzie

$$(4.3) \quad \Delta\tau_*^{(i)} = \frac{1}{2i} \Delta\tau_{m+1}^{(0)}, \quad i=1, 2, \dots,$$

a przez i oznaczono numer kroku iteracyjnego. Obliczanie kończy się kiedy $\Delta\tau_*^{(i)} < |\varepsilon| \ll 0$.

W przypadku jeśli dla punktów m i $m+1$ na ścieżce podstawowej zachodzi zmiana znaku wyznacznika, a nie następuje zmniejszenie wartości modułu parametru obciążenia,

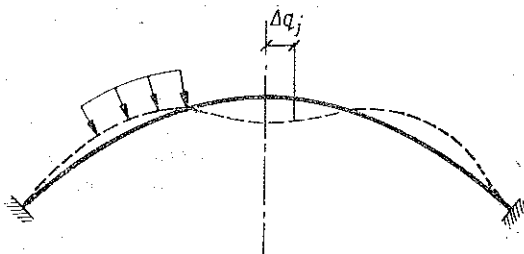
$$(4.4) \quad D_m D_{m+1} < 0 \text{ i } \Delta\lambda_m \Delta\lambda_{m+1} > 0,$$

to punkt krytyczny będzie typu bifurkacyjnego. W punkcie bifurkacyjnym zarówno wyznacznik stateczności D jak też wyznacznik macierzy rozszerzonej przyjmują wartość zerową [10] lub występuje nieciągłość. Z tego względu nie można kontynuować obliczeń dla zbyt małej wartości (4.2). Sygnałem zakończenia tego procesu jest powiększenie się liczby iteracji we wzorze Newtona-Raphsona. W ten sposób dochodzimy do punktu ścieżki równowagi bliskiego punktowi bifurkacyjnemu B .

Po wyznaczeniu punktu bifurkacyjnego obliczenie można kontynuować wzdłuż ścieżki pobifurkacyjnej pod warunkiem zmodyfikowania macierzy K . Modyfikacja polega na wyprowadzeniu małego zakłócenia, które odpowiada postaci równowagi pobifurkacyjnej.

Jeśli możemy przewidzieć postać równowagi po bifurkacyjnej, to najskuteczniejszym sposobem jest zmiana sterowania na sterowanie przemieszczeniowe $\tau=q_j$ i przyjęcie wektora według wzoru (3.7). W takim przypadku jako zakłócenie można przyjąć małą wartość $\delta q_j < \Delta q_j$, dla którego oblicza się rozszerzoną macierz styczną \tilde{K} . Po modyfikacji tej macierzy obliczamy punkt na ścieżce pobifurkacyjnej dla $\Delta^r \equiv \Delta q_j$. Podana modyfikacja macierzy stycznej zapobiega powrotowi na ścieżkę podstawową.

W przypadku panelu i łuku stosunkowo łatwo jest przewidzieć ścieżkę pobifurkacyjną, gdyż jest ona związana ze stopniami swobody nieaktywnymi lub o małym przyroście wartości przemieszczeń uogólnionych. W obliczeniach łuków i panelu symetrycznych zakłócenie i nowy parametr sterowania q_j będzie odpowiadał przemieszczeniu poziomemu, związanemu z niesymetryczną postacią wyboczenia (rys. 9).



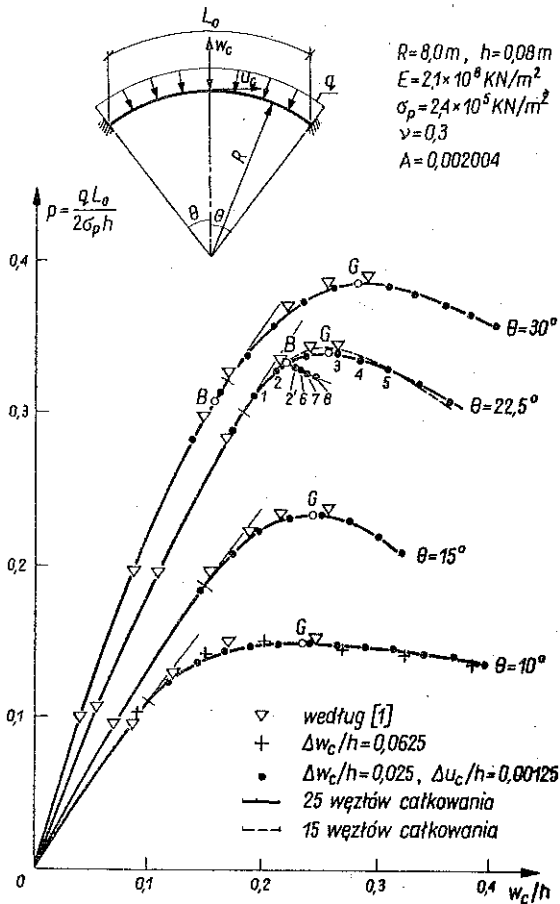
Rys. 9

5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Na podstawie omówionych algorytmów opracowano dwa programy na komputer Cyber 72 w języku FORTRAN-EXTENDED. Pierwszy program służy do obliczania paneli, drugi do obliczania łuków sprężysto-plastycznych. Korzystając z szeregu obliczeń w zakresie sprężystym [7], których celem było sprawdzenie dokładności proponowanych aproksymacji oraz dobór typu elementu i odpowiedniej ilości elementów, w obecnej pracy zdecydowano się na liczbę 20 elementów skończonych dla obliczeń konstrukcji sprężysto-plastycznych.

5.1. Panel walcowy pod ciśnieniem zewnętrznym

Celem porównania dokładności obliczeń w zakresie sprężysto-plastycznym wykonano obliczenia do przykładów zawartych w [1]. Obliczenia dotyczą rodziny paneli walcowych o jednakowym bezwymiarowym promieniu $R/h=100$ i różnych kątów rozwarcia 2θ (rys. 10).



Rys. 10

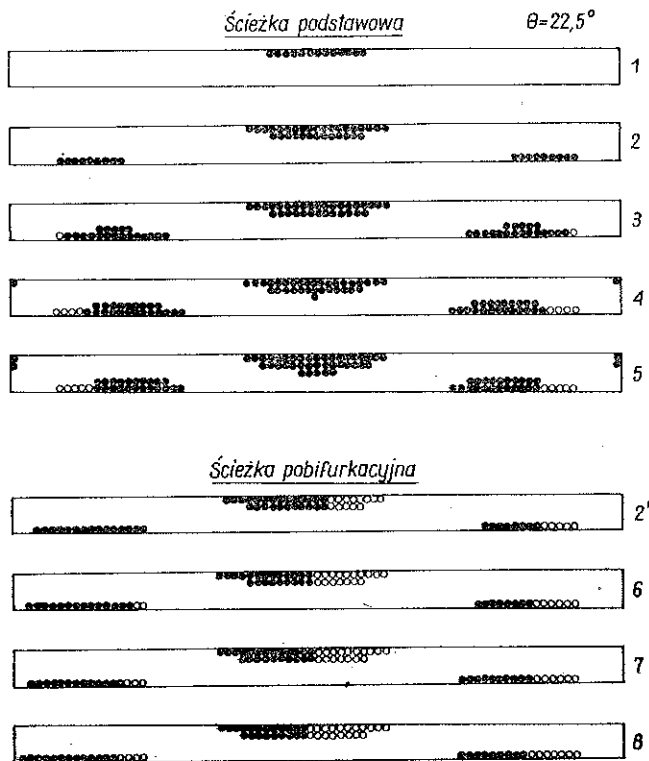
Obliczenia wykonano dla 20 elementów izoparametrycznych o sześciu węzłowych stopniach swobody. Przyjęto 25 węzłów całkowania rozmieszczonych w elemencie, jak pokazano na rys. 4a.

Dla wyznaczenia podstawowej ścieżki równowagi przyjęto przemieszczeniowy parametr sterowania $\tau \equiv w_c$, którym jest ugięcie środka panelu. Obliczenia wykonano dla kroku $\Delta w_c/h = 0,25$ i powtórzono dla $\Delta w_c/h = 0,5; 0,625$. Okazało się, że wyniki praktycznie się nie różnią dla różnych Δw_c . Ścieżkę pobifurkacyjną obliczono dla sterowania przemieszczeń poziomymi u_c przyjmując $\Delta u_c/h = 0,00125$.

Na rys. 10 pokazano wykresy funkcji obciążenia od ugięcia $p(w_c/h)$. Stwierdzono bardzo dobrą zgodność wyników obliczeń w porównaniu z [1]. W zależności od kąta rozwarcia panelu podstawowe obciążenie krytyczne jest typu granicznego lub bifurkacyjnego. Obciążenie bifurkacyjne występuje dla większych kątów rozwarcia. Okazuje się, że dla $\theta = 30^\circ$ następuje bifurkacja stanu równowagi w zakresie sprężystym, dla $\theta = 22,5^\circ$ w zakresie sprężysto-plastycznym. Dla paneli bardziej płaskich utrata stateczności następuje w punkcie granicznym w zakresie poza-sprężystym.

Obliczenie powtórzono też dla przekroju zastępczego o 15-tu węzłach całkowania (rys. 4b). Wyniki przedstawione na rys. 10 dla $\theta = 22,5^\circ$.

Na rys. 11 pokazano rozwój stref plastycznych (węzły całkowania, w których występuje proces aktywny oznaczono przez \odot) oraz lokalnych odciążań (oznaczenie

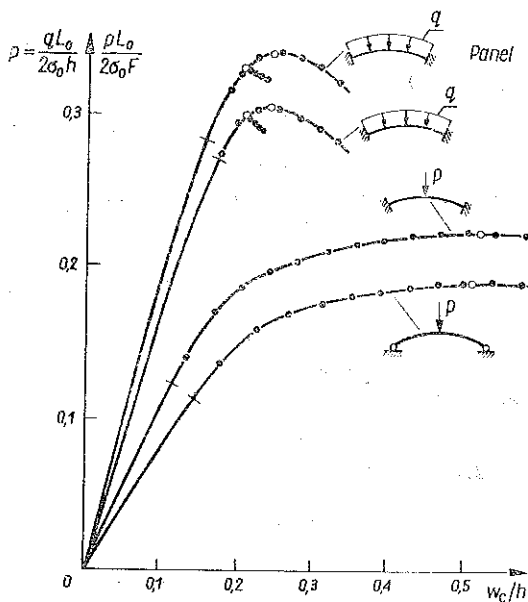


Rys. 11

○) dla panelu o $\theta=22,5^\circ$. Uplastycznienie rozpoczyna się w środku panelu (punkt 1 na rys. 10) i proces aktywny występuje na ścieżce podstawowej aż do osiągnięcia punktu granicznego 3. Lokalne odciążenia występują po przekroczeniu punktu granicznego lub bifurkacyjnego (punkty 4, 5 na ścieżce podstawowej, punkty 2, 6, 7, 8 na ścieżce pobifurkacyjnej). Ciekawym efektem jest pojawienie się uplastycznień przy utwierdzonym panelu dopiero w stanie pozakrytycznym (punkty 4, 5).

5.2. Łuki kołowe

Korzystając z opracowanego algorytmu i programu na komputer wykonano obliczenia łuku kołowego utwierdzonego lub przegubowego podpartego, obciążonego siłą skupioną lub obciążeniem normalnym równomiernie rozłożonym. Do obliczeń przyjęto kąt rozwarcia $\theta=22,5^\circ$ a pozostałe dane przyjęto jak dla panelu w poprzednim przykładzie.



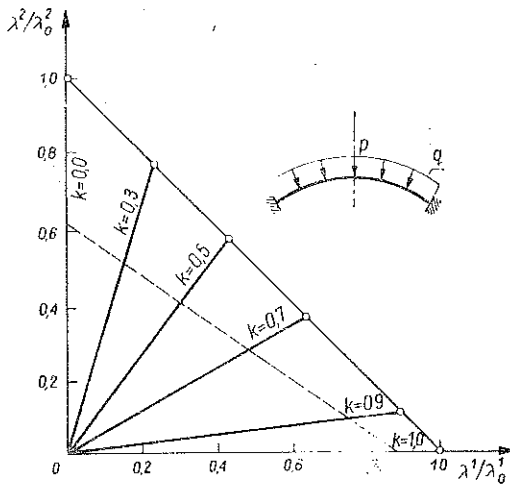
Rys. 12

Na rys. 12 pokazano charakterystyczny wykres $p=p(w_c/h)$ dla różnych łuków. Jedynie w przypadku łuku utwierdzonego poddanego działaniu ciśnienia zewnętrznego występuje obciążenie bifurkacyjne. W pozostałych przypadkach utrata stateczności następuje przez przeskok. Jak wynika z obliczeń zmiana utwierdzenia na podparcie przegubowe powoduje zmniejszenie wartości siły krytycznej w przybliżeniu 18,5%.

Dla porównania powtórzono na rys. 12 wyniki uzyskane dla panelu o $\theta=22,5^\circ$. Realizacja płaskiego stanu odkształcenia pozwala podnieść obciążenia krytyczne w przybliżeniu o 15% w porównaniu z łukiem pracującym w jednoosiowym stanie naprężeń.

5.3. Obciążenie dwuparametrowe łuku kołowego

Dla rozszerzenia problemu obciążeń jednoparametrowych, obliczenia wykonano dla łuku kołowego obciążonego równocześnie siłą skupioną P i obciążeniem równomiernie rozłożonym q (rys. 13).



Rys. 13

W obliczeniach przyjęto bezwymiarowe wielkości

$$(5.1) \quad \lambda^1 = \frac{q}{E} = k p, \quad \lambda^2 = \frac{P}{bE} = (1-k) p$$

dla $k=1$ i $k=0$ wielkości (5.1) przechodzą w obciążenia równomiernie rozłożone i obciążenie skupione:

$$(5.2) \quad \lambda_0^1 = \lambda^1|_{k=1}, \quad \lambda_0^2 = \lambda^2|_{k=0}$$

Obliczenia wykonano dla promieniowych programów obciążenia, które są określone parametrami $k = \text{const}$. Po ustawieniu wartości k można wykorzystać algorytm i program ułożony dla analizy łuku sprężysto-plastycznego, traktując parametr p jako parametr obciążenia $\lambda = p$. Na rys. 13 pokazano wyniki obliczeń otrzymane dla różnych wartości k . Okazuje się, że granica stateczności określona w przestrzeni obciążeń λ^1, λ^2 jest praktycznie linią prostą. Linią kreskowaną zaznaczono koniec zakresu sprężystego. Otrzymane wyniki przypominają granicę stateczności dla łuków sprężystych, gdy kąt rozwarcia θ jest mały [2].

6. WNIOSKI KOŃCOWE

Jako ważniejsze wnioski nasuwają się:

1. Przyjęty element izoparametryczny pozwala na łatwe posługiwanie się układem globalnym, co jednak komplikuje formułowanie warunków brzegowych. Stosowana

liczba 20 elementów skończonych o sześciu stopniach swobody węzłowych daje bardzo dobrą aproksymację.

2. Metoda obliczenia rozszerzonego układu równań w przestrzeni przemieszczeniowo-obciążeniowej okazuje się skuteczna również w zakresie sprężysto-plastycznym.

3. Występują znaczne trudności przy obliczaniu punktów bifurkacji ścieżek równowagi ze względu na płaskość krzywej wyznacznika stateczności.

4. Dla badanych konstrukcji można ograniczyć się do przemieszczeniowych parametrów sterowania.

5. Opracowane algorytmy są szybkoobrotowe, nawet dla dużych kroków.

6. Potwierdzono pojawienie się lokalnych obciążeń przed osiągnięciem punktów granicznych (por. [11]).

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Cz. CICHÓN, Z. KĘPKA, Z. WASZCZYSZYN, *Stateczność walcowej paneli sprężysto-plastycznej przy ścisaniu zewnętrznym*, Rozpr. Inż., **25**, 1, 115-128, 1977.
2. D. A. DA DEPPO, R. SCHMIDT, *Large deflection and stability of hingeless circular arches under interacting loads*, J. Appl. Mech., **41**, 4, 989-994, 1974.
3. D. J. DAWE, *Curved finite element for the analysis of shallow and deep arches*, Comp. and Struct., **4**, 551-580, 1974.
4. М. С. Корнишын, Н. Н. Столяров, Н. И. Дедов, *Большие прогибы прямоугольных в плане пластин и пологих оболочек из нелинейно-упругого материала*, Исслед. по теории пластин и оболочек, Казань, Изд. КГУ, **2**, 1972.
5. М. С. Корнишин, Ф. С. Исакбаева, *Гибкие пластины и панели*, Изд. Наука, Москва 1968.
6. E. F. MASUR, D. L. C. LO, *The shallow arches general buckling postbuckling and imperfection analysis*, J. Struct. Mech., **1**, 1, 91-112, 1972.
7. NGUYEN-CAO-DUONG, *Analiza stateczności sprężysto-plastycznych łuków i powłok walcowych*, Rozpr. dokt., Politechnika Krakowska, 1981.
8. M. RADWAŃSKA, *Analiza numeryczna pokrytycznych odkształceń sprężysto-plastycznych powłok obrotowo-symetrycznych*, V. Konf. M. Komputerowych w Mechanice Konstrukcji, Karpacz 6-9, V, 1981.
9. A. RALSTON, *Wstęp do analizy numerycznej*, PWN, Warszawa 1975.
10. E. RIKS, *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problem*, Int. J. Solids Structures, **15**, 529-551, 1979.
11. V. TVERGAARD, *Buckling behaviour of plate and shell structure*, Theort. and Appl. Mech., Ed. W. T. KOITER, North-Holland Publ., 233-247, 1975.
12. K. WASHIZU, *Variational methods in elasticity and plasticity*, Pergamon Press, 1975.
13. Z. WASZCZYSZYN, *Problemy numeryczne nieliniowej analizy stateczności konstrukcji sprężystych*. Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji, Ossolineum, Wrocław 1981, 341-380.^c
14. Z. WASZCZYSZYN, *Application of the theory of finite deflection to calculation of elastic-plastic arches*, Arch. Inż. ląd., **16**, 1, 55-74, 1970.
15. А. Вольмер, *Устойчивость деформируемых систем*, Наука, Москва 1967.
16. Y. YOKOO, T. NAKAMURA, K. VETANI, *The incremental perturbation method for large displacement analysis of elastic-plastic structures*, Int. J. Num. Meth. Eng., **10**, 503-525, 1976.
17. O. C. ZIENKIEWICZ, *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa 1972.

Резюме

УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ АРОК
И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Применен искривленный изопараметрический элемент с двенадцатью степенями свободы. Для численного расчета составляющих матрицы элемента использована формула Лобатта, в которой крайние узлы интегрирования помещены на границах элемента. Уравнения в приростах метода конечных элементов выведены в глобальном лагранжевом описании. Принята теория малых деформаций и умеренно больших перемещений. Предполагается упруго-пластический, сжимаемый материал с линейным изотропным и кинематическим упрочнением. Ограничиваются консервативными нагрузками.

Для расчета дорожки равновесия применен модифицированный метод Ньютона-Рафсона с управляющим параметром в перемещениях. Как критерий критического состояния принято равенство нулю или же изменение знака определителя касательной матрицы.

Численные расчеты изготовлены для цилиндрических панелей, а также круговых арок нагруженных внешним давлением и/или сосредоточенной силой в центре пролета.

SUMMARY

STABILITY OF ELASTIC-PLASTIC ARCHES AND CYLINDRICAL PANELS

A curved isoparametric element with twelve degrees of freedom is applied. The components of the element matrices are numerically computed by means of the Lobott formula, the terminal integration nodes being located at the boundary of the element. The incremental equations of the FEM are derived in the total Lagrangean description. Theory of small deformations and moderately large displacements is assumed. The material is elastic-plastic, compressible and exhibits the isotropic and kinematic strain-hardening. The loads are conservative. The equilibrium path is determined by means of the modified Newton-Raphson method with a displacement control parameter. The critical state criterion is established once the matrix vanishes or changes its sign. Numerical computations are made in the cases of cylindrical panels and circular arches loaded by external pressure and/or by a concentrated force in the middle of the span.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 12 sierpnia 1981 r.