

METODA TRYGONOMETRYCZNYCH SZEREGÓW OKREŚLONYCH NA KONTURZE W ZASTOSOWANIU DO PŁYT O BRZEGU SWOBODNYM I SWOBODNIE PODPARTYM

ANDRZEJ P. ZIELIŃSKI (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono metodę trygonometrycznych szeregów określonych na konturze w zastosowaniu do płyt o dowolnym kształcie konturu i różnorodnych warunkach brzegowych. Metoda polega na rozszerzeniu danej płyty do pomocniczej płyty prostokątnej i realizacji rzeczywistych warunków brzegowych za pomocą rozwijanych w szeregi trygonometryczne obciążeń kompensacyjnych o charakterze dystrybucyjnym. Załączono szereg przykładów ilustrujących omawianą metodę.

1. WSTĘP

Niniejsze opracowanie jest kontynuacją prac [4, 5], w których przedstawiono metodę trygonometrycznych szeregów na przykładzie płyty utwierdzonej. Metoda ta może być wykorzystana do rozwiązywania zagadnień statyki, stateczności i dynamiki sprężystych konstrukcji powierzchniowych o dowolnym kształcie konturu [2]. W przypadku płyt polega ona na rozszerzeniu badanej płyty do pomocniczej swobodnie podpartej płyty prostokątnej i realizacji rzeczywistych warunków brzegowych poprzez obciążenia kompensacyjne o charakterze dystrybucyjnym przykładane na krzywoliniowym konturze danej płyty. Obciążenia te rozwijane są w podwójne szeregi trygonometryczne w obszarze płyty pomocniczej, a następnie w szeregi pojedyncze wzdłuż konturu danej płyty. Umożliwia to zamianę układu równań całkowych, w których niewiadomymi funkcjami są obciążenia kompensacyjne, na układ równań algebraicznych o niewiadomych współczynnikach rozwinięć tych obciążeń w pojedyncze szeregi Fouriera wzdłuż konturu.

Przedstawione wcześniej kinematyczne warunki brzegowe są, w omawianej metodzie najprostsze. W obecnej pracy zostaną rozpatrzone inne rodzaje warunków brzegowych, których realizacja jest nieco bardziej złożona.

2. BRZEG SWOBODNIE PODPARTY

Warunki brzegowe płyty swobodnie podpartej na konturze k danym równaniami

$$(2.1) \quad x = x_s(t), \quad y = y_s(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1$$

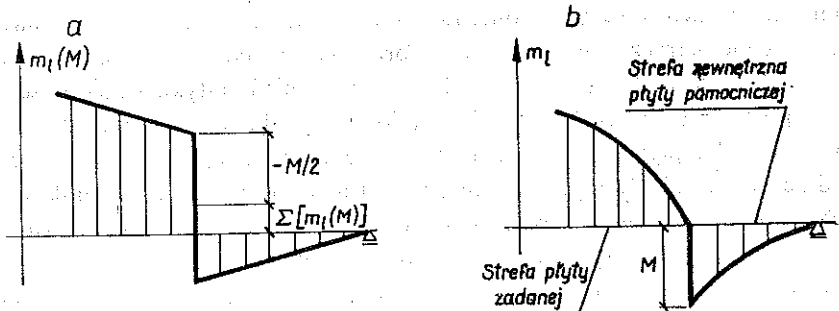
mają postać

$$(2.2) \quad w(t) = 0, \quad m_1(t) = 0,$$

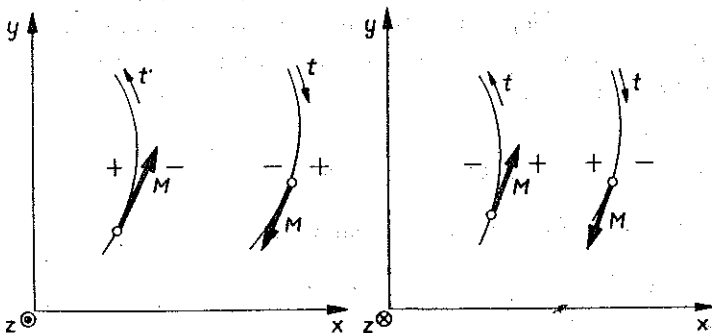
gdzie $m_l(t)$ oznacza granicę momentu zginającego transformowanego na kierunek l normalny do konturu k , liczoną od wnętrza żądanej płyty (rys. 1b). Moment kompensacyjny $M(t)$ przyłożony na konturze (2.1) wywołuje uskok momentu zginającego $m_l(M)$. O ile pierwszy z warunków nie budzi wątpliwości, o tyle drugi wymaga wyjaśnienia. Przy rozwinięciu funkcji momentów w podwójny szereg Fouriera przyjmie on postać

$$(2.3) \quad \sum [m_l(t)] = \sum [m_l(q)] + \sum [m_l(P)] + \sum [m_l(M)] - \frac{M(t)}{2} = 0,$$

gdzie $\Sigma [m_l(q)]$ i $\Sigma [m_l(P)]$ oznaczają rozwinięcia w wyżej wspomniany szereg momentu zginającego wywołanego obciążeniem zewnętrznym i siłą $P(t)$; szereg $\Sigma [m_l(M)]$ określa średnią arytmetyczną lewo- i prawostronnej granicy funkcji $m_l(M)$ na konturze k i łącznie z funkcją $f_M(t) = -M(t)/2$ wyznacza na nim szukaną granicę (rys. 1a). Znak „-” w funkcji $f_M(t)$ związany jest z umową dotyczącą znaku momentów zginających w płycie wywołanych przyłożeniem $M(t)$ i występuje w przypadku, gdy rozpatrywany obiekt znajduje się po orograficznie lewej stronie krzywej (układ lewoskrętny, przyjęty w pracy [4]), lub po prawej (układ prawoskrętny). Zasady dodawania lub odejmowania funkcji $M(t)/2$ w równaniu (2.3) pokazano na rys. 1a i 2.



Rys. 1



Rys. 2

Tak więc układ równań na niewiadome współczynniki $P_{c\mu}$, $P_{s\mu}$, $M_{c\mu}$, $M_{s\mu}$ obciążeń kompensacyjnych przyjmie w omawianym przypadku postać

$$\begin{aligned}
 \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} \bar{a}_{mn}^a \bar{A}_{jmnv} &= \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} A_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv} + \\
 &+ \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} B_{imn\mu} \bar{A}_{jmnv}, \\
 \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} \bar{a}_{mn}^a C_{jmnv} &= \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} P_{i\mu} \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} A_{imn\mu} C_{jmnv} + \\
 &+ \sum_{i=c,s} \sum_{\mu=0}^{\mu^*} M_{i\mu} \sum_{mn}^{m^* n^*} \xi_{mn} B_{imn\mu} C_{jmnv} + \\
 &- \frac{\lambda_v ab}{8} M_{jv}, \quad j=c, s, \quad v=0, 1, 2, \dots, \mu^*.
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

W powyższym układzie, którego zasady budowy omówiono szczegółowo w pracy [4], występują następujące wielkości:

obciążenia kompensacyjne

$$\begin{aligned}
 P(t) &= \sum_{\mu} \{P_{c\mu} \cos [\mu\gamma(t)] + P_{s\mu} \sin [\mu\gamma(t)]\}, \\
 M(t) &= \sum_{\mu} \{M_{c\mu} \cos [\mu\gamma(t)] + M_{s\mu} \sin [\mu\gamma(t)]\},
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

$$\gamma(t) = \frac{2\pi \int_{t_0}^t F(\tau) d\tau}{\int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau},$$

$$F(t) = \begin{cases} 1 & \text{rozwiązanie w przestrzeni parametru } t, \\ \Gamma(t) & \text{rozwiązanie wzdłuż łuku krzywej,} \end{cases}$$

$$\Gamma(t) = \sqrt{[x'_s(t)]^2 + [y'_s(t)]^2};$$

współczynnik operatora równania różniczkowego

$$\begin{aligned}
 \xi_{mn} &= \frac{1}{(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2}, \\
 \alpha_m &= \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b},
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

$a \times b$ — wymiary płyty pomocniczej;

współczynnik rozwinięcia obciążeń zewnętrznych

$$\bar{a}_{mn}^a = - \int_F q(x, y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy;
 \tag{2.7}$$

mnożnik rozwinięcia wielkości konturowych:

$$(2.8) \quad \lambda_\mu = \begin{cases} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau & \text{dla } \mu=0, \\ \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} F(\tau) d\tau & \text{dla } \mu=1, 2, \dots; \end{cases}$$

całki wynikające z rozwinięć funkcji konturowych w szeregi trygonometryczne

$$(2.9) \quad \begin{aligned} A_{imn\mu} &= \int_{t_0}^{t_1} g_{mn}(t) \frac{\cos}{\sin} [\mu\gamma(t)] F(t) dt, \\ \bar{A}_{jmn\nu} &= \int_{t_0}^{t_1} g_{mn}(t) \frac{\cos}{\sin} [\nu\gamma(t)] F(t) dt, \\ B_{imn\mu} &= \int_{t_0}^{t_1} \kappa(t) \frac{\cos}{\sin} [\mu\gamma(t)] dt, \\ C_{imn\mu} &= (\alpha_m^2 + \tilde{\nu}\beta_n^2) \int_{t_0}^{t_1} g_{mn}(t) \frac{[y'_s(t)]^2}{\Gamma^2(t)} \frac{\cos}{\sin} [\nu\gamma(t)] F(t) dt + \\ &\quad + (\tilde{\nu}\alpha_m^2 + \beta_n^2) \int_{t_0}^{t_1} g_{mn}(t) \frac{[x'_s(t)]^2}{\Gamma^2(t)} \frac{\cos}{\sin} [\nu\gamma(t)] F(t) dt + \\ &\quad - 2(1-\tilde{\nu})\alpha_m\beta_n \int_{t_0}^{t_1} \cos[\alpha_m x_s(t)] \cos[\beta_n y_s(t)] \frac{x'_s(t)y'_s(t)}{\Gamma^2(t)} \times \\ &\quad \times \frac{\cos}{\sin} [\nu\gamma(t)] F(t) dt, \end{aligned}$$

$$g_{mn}(t) = \sin[\alpha_m x_s(t)] \sin[\beta_n y_s(t)],$$

$$\kappa_{mn}(t) = \alpha_m y'_s(t) \cos[\alpha_m x_s(t)] \sin[\beta_n y_s(t)] + \\ - \beta_n x'_s(t) \sin[\alpha_m x_s(t)] \cos[\beta_n y_s(t)];$$

$\tilde{\nu}$ —współczynnik Poissona.

3. BRZEG CAŁKOWICIE SWOBODNY

Na całkowiec swobodnych fragmentach konturu płyty występują warunki brzegowe w postaci

$$(3.1) \quad m_l(t) = 0, \quad v_l(t) = \frac{\partial m_l}{\partial l} + 2 \frac{\partial m_{ls}}{\partial s} = 0.$$

Pierwszy z tych warunków jest identyczny ze wzorem (2.2)₂, natomiast drugi oznacza zerowanie się na brzegu zastępczej siły poprzecznej. Sposób określania tej siły wymaga szczegółowego omówienia. W zależności

$$(3.2) \quad v_l(t) = v_l(q) + v_l(p) + v_l(M)$$

występuje bowiem nie tylko wartość granicy od wewnątrz płyty określona dla funkcji z uskokiem na konturze $-v_l(P)$ (określmy ją tak samo jak w wyżej omówionym warunku brzegowym na moment gnący), lecz również $v_l(M)$, która zawiera pochodną funkcji z uskokiem obliczaną w miejscu uskoku. Wchodząca więc w jej skład, dana szeregiem funkcja $\partial m_l(M)/\partial l$ wyrazi się wzorem (różnice znaku w stosunku do wzorów wprowadzonych w pracy [3] wynikają z umowy dotyczącej znaku $M(t)$ (rys. 2)):

$$\begin{aligned}
 \Sigma \left[\frac{\partial m_l(M)}{\partial l} \right] &= \frac{1}{\Gamma(t)} \left[\{ \Sigma'_x [m_l(M)] - f_x(t) \} y'_s(t) - \{ \Sigma'_y [m_l(M)] + \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + f_y(t) \} x'_s(t) \right], \\
 (3.3) \quad f_x(t) &= \frac{1}{a} M(t) + \frac{4}{ab} \sum_{uv} \int_{t_0}^{t_1} M(\tau) y'_s(\tau) \cos [\alpha_\mu x_s(\tau)] \sin [\beta_\nu y_s(\tau)] d\tau \times \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \times \cos [\alpha_\mu x_s(t)] \sin [\beta_\nu y_s(t)], \\
 f_y(t) &= \frac{1}{b} M(t) + \frac{4}{ab} \sum_{uv} \int_{t_0}^{t_1} M(\tau) x'_s(\tau) \sin [\alpha_\mu x_s(\tau)] \cos [\beta_\nu y_s(\tau)] d\tau \times \\
 &\qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \times \sin [\alpha_\mu x_s(t)] \cos [\beta_\nu y_s(t)].
 \end{aligned}$$

$\Sigma'_x []$ i $\Sigma'_y []$ oznaczają pochodne cząstkowe szeregu liczone wyraz po wyrazie. Granicę funkcji $v_l(P)$ na konturze k liczoną od wewnątrz danej płyty znajdziemy ze wzoru

$$(3.4) \quad v_l(P) = \sum [v_l(P)] + \frac{P(t)}{2},$$

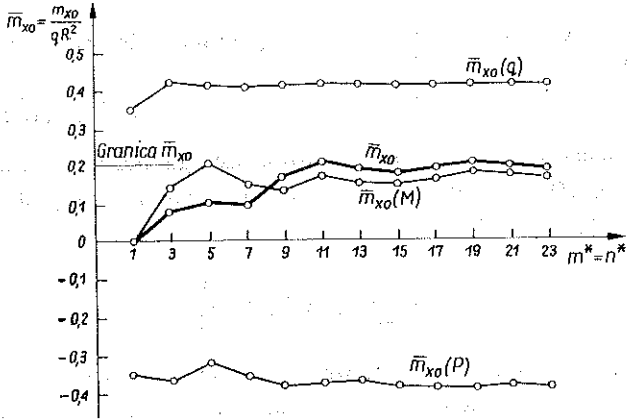
przy czym znak „+” wiąże się z umową co do znaków tej reakcji i wywołanych nią sił poprzecznych, a zasada jego ustalania jest dokładnie przeciwna do przypadku uskoku momentu (rys. 2). Pozostałe funkcje występujące w zastępczej sile poprzecznej $v_l(t)$ nie mają uskoku, a ich szeregi mogą być różniczkowane wyraz po wyrazie dając bezpośrednio wartości odpowiednich funkcji na konturze k .

4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ PŁYT Z BRZEGIEM SWOBODNIE PODPARTYM I CAŁKOWICIE SWOBODNYM

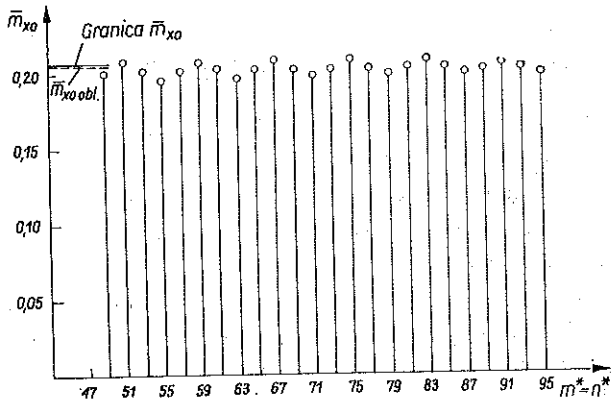
Pierwszym z rozwiązywanych przykładów numerycznych była swobodnie podparta płyta kołowa obciążona w sposób ciągły (przykłady dobierano tak, by znane były ich rozwiązania zamknięte). Jako zewnętrzną płytę pomocniczą dobrano kwadrat o boku równym podwójnej średnicy koła. W przeciwieństwie do płyty utwierdzonej konieczne jest uwzględnienie w tym przypadku większej liczby harmonicznych (po obwodzie płyty) reakcji modelujących warunki brzegowe (w okolicy przekątnych płyty pomocniczej natężenie reakcji winno być nieco zwiększone). Ze względu na charakter rozwiązania bierze się pod uwagę jedynie 0, 4, 8, ... cosinusowe harmoniczne reakcji. Do końcowych obliczeń wybrano dwie pierwsze z nich, gdyż wpływ pozostałych okazał się znikomy (tablica 1).

Tablica 1

$m^* = n^* = 32$	μ	Amplitudy harmoniczych siły reakcji	Amplitudy harmoniczych momentu reakcji	$\bar{w}_0 = \frac{w_0 D}{q R^4}$	$\bar{m}_{x0} = \frac{m_{x0}}{q R^2}$
	0	-0,8030	-0,2927	0,06192	0,19556
4	-0,1262	-0,0221			
0	-0,8030	-0,2927			
4	-0,1261	-0,0222			
8	+0,0054	-0,0032	0,06192	0,19559	
12	-0,0028	+0,0022			
Wartości ściste [1]				0,06375	0,20620



Rys. 3

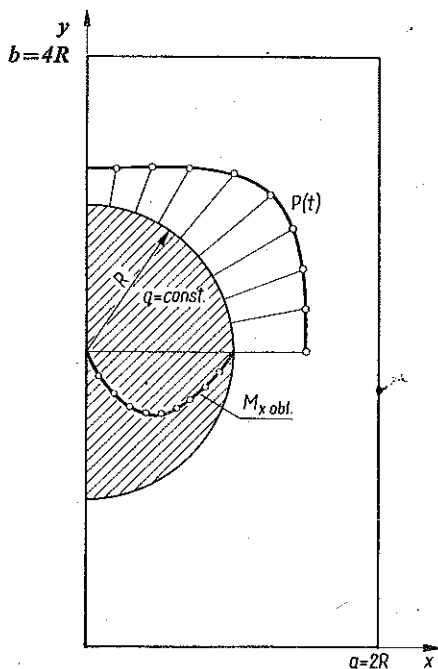


Rys. 4

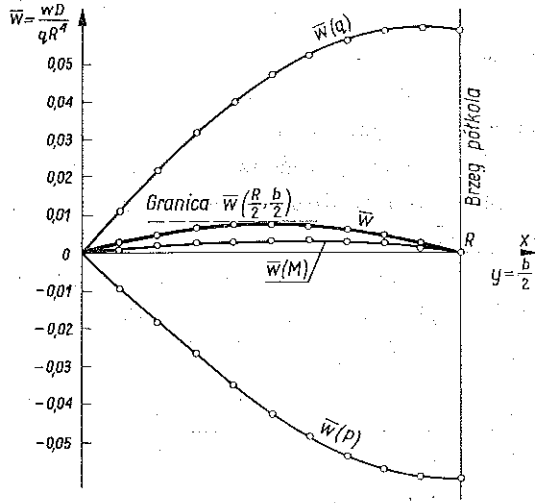
Wyniki stanowi mapa zbieżności ujmująca pośrednie sumy częściowe podwójnych szeregów opisujących reakcje brzegowe oraz ugięcie w_0 i moment gnący $m_{x0}=m_{y0}$ w środku płyty. Na rys. 3 pokazano początkowe fragmenty odwzorowania powyższej mapy zaznaczając osobno wpływ obciążeń zewnętrznych i reakcji, natomiast na rys. 4—jej fragmenty końcowe (w odpowiednio zwiększonej skali). Na podstawie mapy obliczono przybliżone granice szeregów—rozwiązań. Ze względu na nierównomierny przebieg funkcji zbieżności (rys. 4) w przypadku momentów najlepsze rezultaty uzyskano stosując hiperboliczną procedurę całkową [6] przez punkty $m^*=n^*=12, 24, 48, 96$ ($m, n=1, 3, 5, \dots, 95$) dla ustalonego $\mu^*=4$ ($\mu=0,4$). Błąd w stosunku do wartości ścisłej wyniósł

$$(4.1) \quad \delta = \left| \frac{\bar{m}_{x0 \text{ obl.}} - \bar{m}_{x0 \text{ rzecz.}}}{m_{x0 \text{ rzecz.}}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{0,2046 - 0,2062}{0,2062} \right| \cdot 100\% = 0,78\%$$

Z kolei rozwiązano obciążoną w sposób ciągły płytę półkolistą. W przykładzie tym wykorzystano dodatkową możliwość metody, jaką jest dobudowanie płyty danej do boku (naroża lub odcinka) płyty pomocniczej (rys. 5). Jest to najwygodniejsze, w przypadku gdy odpowiedni fragment danej płyty ma warunki brzegowe swobodnego podparcia; możliwe jednakże jest również modelowanie dobudowanej płyty utwierdzonej (na odcinku brzegu płyty pomocniczej przykładamy wówczas sam moment kompensacyjny).

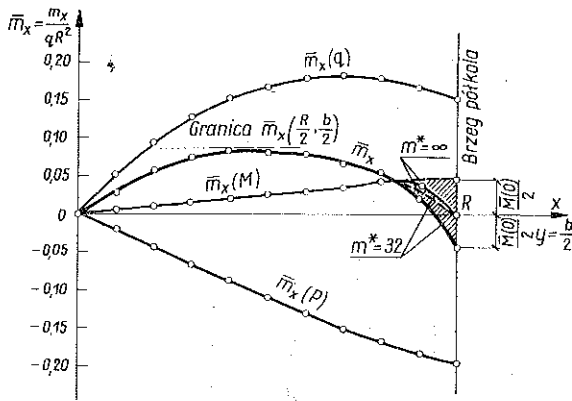


Rys. 5



Rys. 6

Wyniki przykładu z płytą półkolistą obrazują wykresy na rys. 6 i 7. Widoczne na rys. 7 efekty brzegowe są skutkiem uskoku funkcji momentów gnących wywołanego skupionym momentem kompensacyjnym (rys. 1). Uzasadniony fizycznie rozkład tej funkcji otrzymamy ekstrapolując ją do wartości zerowej na brzegu.

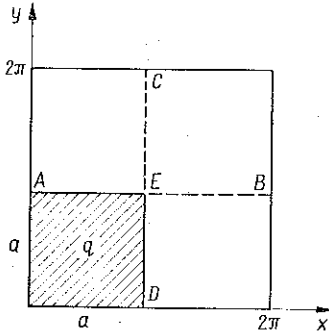


Rys. 7

Ze względu na drugoplanowe znaczenie przykładu nie wykonano w tym przypadku dokładnej mapy zbieżności szeregów. Jednak wyniki bezpośrednie ($\mu^* = 3$, $m^* = n^* = 32$):

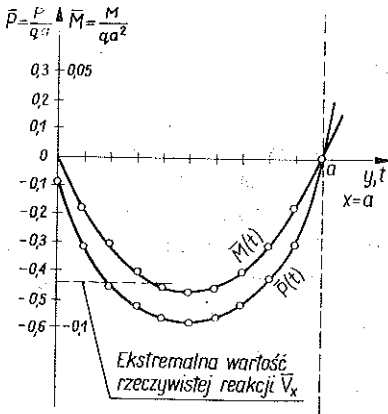
$$(4.2) \quad \begin{aligned} \bar{m}_{\max \text{ obl.}} &= 0,0830, & \bar{m}_{\max \text{ rzecz.}} &= 0,0868, & \delta_M &= 4,37\%, \\ \bar{w}_{\max \text{ obl.}} &= 0,00771, & \bar{w}_{\max \text{ rzecz.}} &= 0,00811, & \delta_w &= 4,93\% \end{aligned}$$

wskazują na możliwość dokładnego określenia interesujących nas wielkości przy zastosowaniu procedur przybliżających granice szeregów [6].

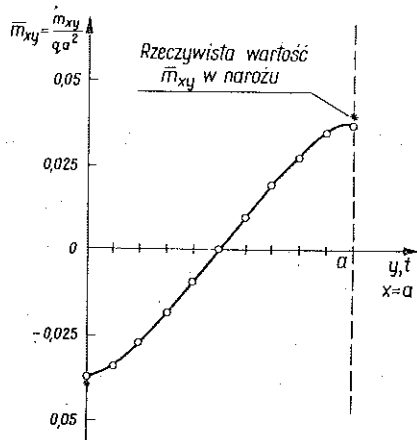


Rys. 8

Ostatnim rozważanym przykładem w ramach badania płyt o brzegu swobodnie podpartym było modelowanie naroża (rys. 8). Przykład ten jest o tyle istotny, że obrazuje przebieg rozwiązania omawianą metodą płyt z efektami skupionymi w narożach. Charakterystyczny jest fakt uzyskania zbieżnych szeregów na momenty gnące i obciążenia kompensacyjne dopiero po przyłożeniu reakcyjnych obciążeń $P(t)$ i $M(t)$ na całych odcinkach AB i CD . W przypadku przyłożenia ich na samych bokach AE i ED uzyskano rozwiązania rozbieżne (zbieżne były jedynie szeregi określające ugięcie płyty). Stanowi to pewne ograniczenie metody eliminujące możliwość rozwiązania stanów naprężenia w swobodnie podpartych płytach z wklęsłymi narożami.

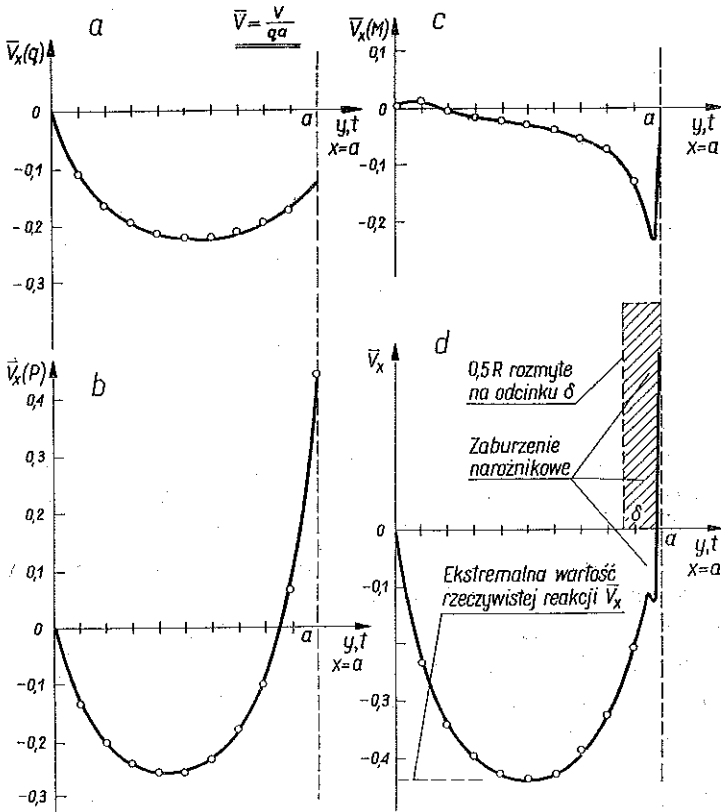


Rys. 9



Rys. 10

Główne wyniki przykładu ujęto w rys. 9–11. Na rys. 9 przedstawiono zmienność reakcji kompensacyjnych wzdłuż brzegu płyty; rys. 10 obrazuje przebieg momentów skręcających, pozwalający określić wartość reakcji skupionej w narożu, natomiast na rys. 11 zamieszczono rozkłady poszczególnych składowych zastępczej siły poprzecznej V_x będącej rzeczywistą reakcją na odcinku DE (rys. 8). Jak można było przypuszczać szeregi odwzorowujące tę siłę są słabiej zbieżne niż w przypadku pozostałych wiel-

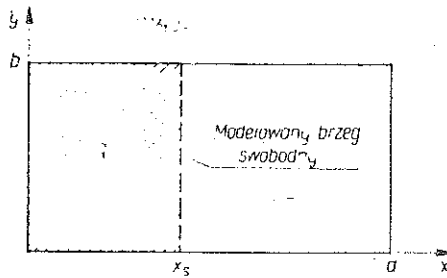


Rys. 11

kości fizycznych w płycie. Na wynikowym wykresie 11d daje się zauważyć zaburzenie narożnikowe wywołane odmiennym w okolicy naroża rozkładem odpowiednich składników siły poprzecznej (rys. 11b i rys. 11c), które powinny się wzajemnie w narożach wygasić. Siła poprzeczna $V_x(P)$ ma w narożu charakter zbliżony do parzystego względem punktu $y=a$ ($V_x(P)|_{x=a} \cong V_x(P)|_{x=a+\varepsilon}$) w przeciwieństwie do $V_x(M)$ o charakterze w przybliżeniu nieparzystym ($V_x(M)|_{a=x} \cong -V_x(M)|_{x=a+\varepsilon}$), co przy skończonej liczbie wyrazów szeregu odzwierciedla się wspomnianym zaburzeniem. Nie ma ono nic wspólnego z efektami skupionymi naroża, które są nieporównanie większe. Na rys. 11d naniesiono rozmytą na odcinku δ siłę skupioną obliczoną według wzoru

$$(4.3) \quad R = 2m_{xy}|_{x=y=a}$$

Obliczenia wykonywane były dla różnych zestawów wyrazów szeregu $-\mu^*=10$, $m^*=n^*=64$ oraz $\mu^*=15$, $m^*=n^*=80$, nie wykazując istotnych zmian przy zwiększaniu liczby tych wyrazów. Wystąpiło jedynie (przy większej liczbie wyrazów szeregu) wyraźne zmniejszenie wyżej wspomnianych zaburzeń narożnikowych siły poprzecznej.



Rys. 12

Jako przykład modelowania swobodnego brzegu, pokazano rozpatrywaną płytę na rys. 12. Z uwagi na osiową symetrię płyty przyjęto równanie modelowanego odcinka w postaci

$$(4.4) \quad y = t + \frac{b}{2}, \quad -\frac{b}{2} \leq t \leq \frac{b}{2}$$

i stosowano w pojedynczym szeregu wyłącznie wyrazy cosinusowe. Z warunków brzegowych otrzymano więc następujący układ równań algebraicznych na nieznane współczynniki rozwinięć obciążeń kompensacyjnych $P_{c\mu}$ i $M_{c\mu}$:

$$(4.5) \quad \begin{aligned} & \sum_{mn} \xi_{mn} \bar{\alpha}_{mn}^a (\alpha_m^2 + \tilde{\nu} \beta_n^2) s_{am} C_{nv} = \sum_{\mu} P_{c\mu} \sum_{mn} \xi_{m\mu} (\alpha_m^2 + \tilde{\nu} \beta_n^2) s_{am}^2 C_{n\mu} C_{nv} + \\ & + \sum_{\mu} M_{c\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} (\alpha_m^3 + \tilde{\nu} \alpha_m \beta_n^2) s_{am} c_{am} C_{n\mu} C_{nv} - \frac{ab\lambda_{\nu}}{8} M_{c\nu}, \\ & \sum_{mn} \xi_{mn} \bar{\alpha}_{mn}^a [\alpha_m^3 + (2 - \tilde{\nu}) \alpha_m \beta_n^2] c_{am} C_{nv} = \\ & = \sum_{\mu} P_{c\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} [\alpha_m^3 + (2 - \tilde{\nu}) \alpha_m \beta_n^2] s_{am} c_{am} C_{n\mu} C_{nv} + \frac{ab\lambda_{\nu}}{8} P_{c\nu} + \\ & + \sum_{\mu} M_{c\mu} \sum_{mn} \xi_{mn} (-\beta_n^4 - \nu \alpha_m^2 \beta_n^2) c_{am}^2 C_{n\mu} C_{nv} - \frac{b\lambda_{\nu}}{4} M_{c\nu}, \end{aligned}$$

gdzie

$$C_{n\mu} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \sin \beta_n \left(t + \frac{b}{2} \right) \cos \beta_{\mu} t \, dt = \frac{2\beta_n (-1)^{\frac{\mu}{2}}}{\beta_n^2 - \beta_{\mu}^2},$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b}, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

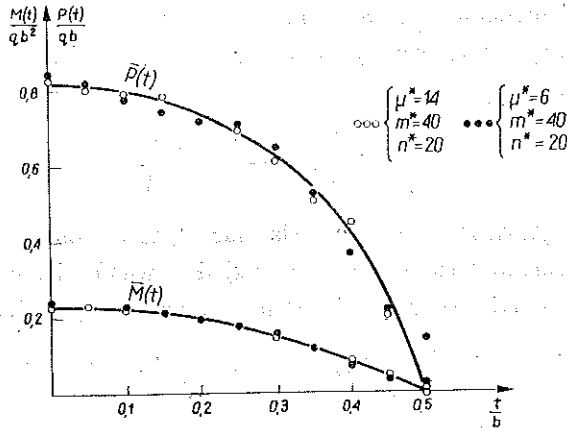
$$\beta_{\mu} = \frac{\mu\pi}{b}, \quad \mu = 0, 2, 4, \dots,$$

$C_{n\mu}=0$ dla pozostałych n, μ ,

$$s_{am} = \sin(\alpha_m x_s), \quad c_{am} = \cos[\alpha_m x_s],$$

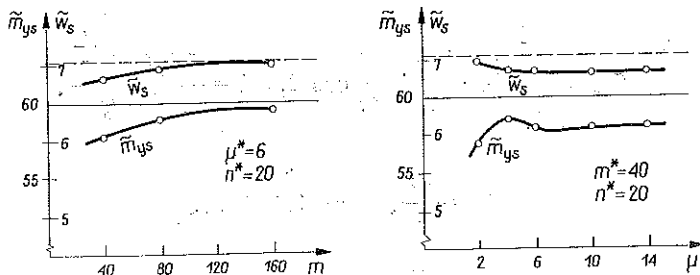
$$\tilde{a}_{mn}^a = \frac{2q}{\alpha_m \beta_n} \left(\cos \frac{m\pi x_s}{a} - 1 \right),$$

$$\lambda_v = \begin{cases} b & \text{dla } v=0, \\ \frac{b}{2} & \text{dla } v=1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad \begin{matrix} m=1, 2, 3, \dots, \\ n=1, 3, 5, \dots \end{matrix}$$



Rys. 13

Na rys. 13 pokazano wykresy obciążeń kompensacyjnych. Widoczne są ich „zafalowania” związane ze stosunkową małą liczbą harmonicznych w pojedynczym szeregu ($\mu^*=6$ oznacza tutaj cztery harmoniczne $\mu=0, 2, 4, 6$). Zafalowania te nie wpływają w istotny sposób na wyniki dalszych obliczeń. Rys. 14 obrazuje przebieg zbieżności $w(x_s, b/2)$ i $m_y(x_s, b/2)$ przy wzrastającej liczbie wyrazów szeregu

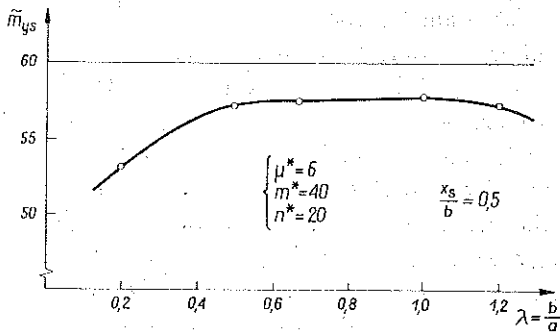


Rys. 14

podwójnego i pojedynczego, przy czym ich ściśle bezwymiarowe wartości wynoszą [1]:

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_s &= \tilde{w} \left(x_s, \frac{b}{2} \right) = w_s \frac{1000 D}{qb^4} = 7,10, \\ \tilde{m}_{ys} &= \tilde{m}_y \left(x_s, \frac{b}{2} \right) = m_{ys} \frac{1000}{qb^2} = 60,0. \end{aligned}$$

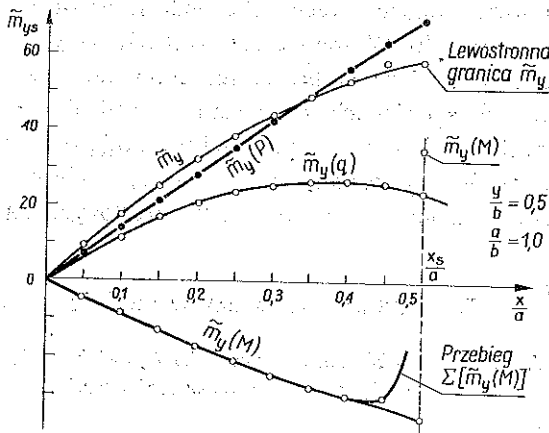
Ze względu na specyficzną budowę płyty ustalono $n^*=20$ (w kierunku y szeregi są nieporównanie lepiej zbieżne), natomiast zmianom ulegała wartość m^* .



Rys. 15

Na rys. 15 zamieszczono wyniki badania proporcji płyty danej i pomocniczej przy ustalonej ilości wyrazów szeregu, a na rys. 16 pokazano wpływ poszczególnych obciążeń (w tym kompensacyjnych) na momenty gnące w płycie. W przypadku $m_y(M)$ zaznaczono uskok w miejscu przyłożenia momentu $M(0)$. Interesującą nas lewostronną granicą funkcji $m_y(M)$ obliczamy ze wzoru

$$(4.7) \quad m_y(M)|_{x=x_s-0} = \sum [m_y(M)]_{x=x_s} - \frac{\tilde{v}M}{2},$$



Rys. 16

5. WNIOSKI KOŃCOWE

Przedstawiona powyżej metoda szeregów trygonometrycznych pozwala na stosunkowo łatwe rozwiązywanie pewnej klasy zagadnień inżynierskich dotyczących obiektów powierzchniowych o dowolnym konturze. W obecnym stadium rozwoju nie jest ona tak uniwersalna, jak metody elementów skończonych czy różnic skończonych. W pewnych jednak zastosowaniach (dotyczy to szczególnie płyt o konturach gładkich lub o niewielkiej liczbie naroży) widać wyraźnie jej zalety w stosunku do wspomnianych metod dyskretyzujących zagadnienie. Niezwykle proste jest przedstawienie różnorodnych obciążeń płyty przez współczynniki (2.7) oraz kształtów brzegu przez równania parametryczne (2.1) wstawione do całek (2.9). Bez trudności otrzymujemy wyniki w dowolnym punkcie danej płyty rozwiązując w końcowej fazie metody klasyczne zagadnienie płyty Naviera poddanej dawnym obciążeniom $q(x, y)$ oraz znanym już obciążeniom kompensacyjnym $P(t)$ i $M(t)$. Na podkreślenie zasługuje również łatwe badanie zbieżności rozwiązań, których dokładność zależy od liczby wyrazów szeregów określanej danymi w programie obliczeń.

Metoda ma jednakże istotne ograniczenia związane głównie z własnościami szeregów trygonometrycznych. Nie należy jej stosować w przypadku obciążeń zewnętrznych skupionych punktowo, szczególnie gdy umieszczone są w pobliżu konturu badanego obiektu. Wywołuje to koncentrację reakcji brzegowej; co pociąga za sobą konieczny wzrost liczby harmonicznych szeregu konturowego. Pewną wadą metody jest też stosunkowo złożona postać warunku brzegowego dla brzegu swobodnego. Nie jest również korzystne stosowanie jej w obecnej postaci do płyt o reakcjach skupionych w narożach (trudności występujące w tych przypadkach obrazuje częściowo przykład numeryczny naroża płyty kwadratowej swobodnie podpartej). Należy tu jednak podkreślić, że umieszczenie naroży z siłami skupionymi na brzegu płyty pomocniczej eliminuje wszelkie związane z nimi zakłócenia zbieżności szeregów.

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na pewne analogie przedstawionej metody do metody granicznych równań całkowych. W obu przypadkach bazę matematyczną stanowią krzywoliniowe funkcje Greena (tu budowane za pomocą podwójnych szeregów trygonometrycznych). W obu też przypadkach otrzymuje się układ równań całkowych na niewiadome funkcje brzegowe. Odmienny jest natomiast sposób uzyskania tych równań, sposób ich rozwiązania i rodzaj niewiadomych funkcji brzegowych. Z uwagi na niewątpliwe korzyści wynikające ze stosowania energetycznych równań Somigliana obecne prace autora idą w kierunku skojarzenia obu metod przy zachowaniu zalet metody szeregów określonych na konturach.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. TIMOSZENKO, W. WOJNOWSKY-KRIEGER, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa 1962.
2. A. ZIELIŃSKI, *Application of the trigonometric contour series method to shells of an arbitrary contour* [w druku].
3. A. P. ZIELIŃSKI, *On curvilinear distributions expressed by double Fourier series*, ZAMP, 6/31 717-729, 1980.

4. A. ZIELIŃSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Metoda trygonometrycznych szeregów konturowych w zastosowaniu do utwierdzonych płyt o dowolnym kształcie*, Rozprawy Inżynierskie [w druku].
5. A. P. ZIELIŃSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *The trigonometric contour series method in application to clamped plates of an arbitrary contour*, Biuletyn PAN [w druku].
6. A. P. ZIELIŃSKI, M. ŻYCZKOWSKI, *Certain generalizations of Aitken's accelerator for slowly convergent sequences* [w druku].

Резюме

МЕТОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА КОНТУРЕ
В ПРИМЕНЕНИИ К ПЛИТАМ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ И СВОБОДНО
ПОДПЕРТЫХ

В работе представлен метод тригонометрических рядов определенных на контуре в применении к плитам с произвольной формой контура и с разнородными граничными условиями. Метод заключается в расширении заданной плиты к вспомогательной прямоугольной плите и реализации действительных граничных условий при помощи, разлагаемых в тригонометрические ряды, компенсационных нагрузок дистрибутивного характера. Помещен ряд примеров, иллюстрирующих обсуждаемый метод.

SUMMARY

METHOD OF TRIGONOMETRICAL SERIES DETERMINED AT THE CONTOUR APPLIED
TO PLATES WITH FREE BOUNDARIES

The paper presents the method of trigonometric contour series in application to plates of arbitrary contours and various boundary conditions. The method consists in the extension of the given plate to the auxiliary rectangular plate and the realization of the actual boundary conditions by means of compensatory loadings of distributional character, expanded into trigonometric series. Some numerical examples illustrating the method discussed are given in the paper.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 9 kwietnia 1981 r.