

JEDNO I DWUMODALNA OPTIMALIZACJA RAMY PORTALOWEJ

BOGDAN BOCHENEK i ANTONI GAJEWSKI (KRAKÓW)

W pracy przedstawiono problem optymalnego kształtowania ramy portalowej narażonej na utratę stateczności. Wykazano niewystarczalność jednomodalnego sformułowania problemu i określono jego zakres poprawności w zależności od wyniosłości ramy oraz ograniczeń geometrycznych nałożonych na przekrój poprzeczny. Sformułowano i rozwiązano również zadanie optymalizacji parametrycznej w klasie odcinkowo stałych funkcji określających przekrój poprzeczny elementów ramy.

1. UWAGI WSTĘPNE

Problematyka badania drgań swobodnych, utraty stateczności w ujęciu liniowym oraz krytycznego i pokrytycznego zachowania się prostych układów ramowych w ujęciu nieliniowym jest przedmiotem wielu prac. Znacznie mniejsza liczba publikacji poświęcona jest zagadnieniom optymalnego kształtowania drgających lub narażonych na utratę stateczności ram. Wśród nich należy wymienić pracę B. R. McCARTA, E. J. HAUGA i I. D. STREETERA [3], w której znaleziono optymalny rozkład masy ramy portalowej przy warunku minimum ciężaru i ustalonej podstawowej częstości drgań własnych, oraz pracę B. OLSZOWSKIEGO i A. TOMANY [10], dotyczącą bezpośredniego kształtowania płaskich układów prętowych ze względu na wybrane właściwości częstości ich drgań własnych. Na podstawie dość uniwersalnego algorytmu wyznaczania częstości i form drgań własnych, rozwiązano kilka różnych zadań optymalizacji, np. maksymalizacji podstawowej częstości drgań własnych, maksymalizacji drugiej częstości własnej, optymalnego rozstrojenia układu, polegającego na maksymalnym odsunięciu częstości układu od danej częstości wymuszania. Optymalne kształtowanie złożonych układów ramowych z uwzględnieniem warunków ograniczających utratę stateczności przedstawione jest w pracy C. FLEURY i M. GERADINA [4], w której podano również szerszy przegląd literatury.

We wszystkich znanych pracach, dotyczących optymalizacji ram sprężystych, kształtowanie przeprowadzone jest ze względu na wybraną pojedynczą wartość własną (częstość, siłę krytyczną). Jednak w wielu przypadkach różnych konstrukcji inżynierskich jednomodalne sformułowanie zagadnienia okazuje się niewystarczające. Sytuacja taka ma miejsce wówczas, gdy element ukształ-

towany ze względu na początkowo najniższą wartość własną związaną z pewną określoną formą drgań (lub wyboczenia) posiada niższą wartość drugiej wartości własnej, związanej z inną formą drgań (lub wyboczenia).

Po raz pierwszy zwrócili na to uwagę N. OLHOFF i S. H. RASMUSSEN w pracy [9] przy okazji kształtowania obustronnie utwierdzonego pręta ściskanego. Podali oni również poprawne rozwiązanie zagadnienia, wprowadzając tzw. sformułowanie bimodalne. Otrzymany kształt optymalny (symetryczny względem osi przechodzącej przez środek pręta) nie ma punktów o zerowym przekroju poprzecznym i odpowiada dwu różnym formom wyboczenia, związanym jednak z tą samą siłą krytyczną.

Bimodalna optymalizacja modelu pręta ściskanego ze względu na podstawową częstość jego drgań poprzecznych przedstawiona jest w pracy A. GAJEWSKIEGO [5]. Uogólniono w niej rozwiązanie S. PRAGERA i W. PRAGERA [12] dotyczące bimodalnej optymalizacji modelu składającego się z kilku sztywnych prętów, połączonych ze sobą oraz z podporami za pomocą sprężystych przegubów. Próbę bimodalnego sformułowania problemu optymalizacji pręta ściskanego siłą śledzącą zawiera również praca J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [1].

Sformułowanie bimodalne staje się konieczne w przypadku optymalizacji łuków drgających i narażonych na utratę stateczności; szereg rozwiązań dotyczących sprężystych łuków znajdujących się w bezmomentowym stanie przedwyboczeniowym (o osi nierozciągliwej) otrzymano w pracy J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [2]. Podobne zjawisko pojawia się w przypadku prostej ramy portalowej ściskanej siłami skupionymi, działającymi w kierunku osi nieodkształconych słupów. Zwrócili na to uwagę E. F. MASUR i Z. MRÓZ [8], którzy przedstawili proste przybliżone rozwiązanie dla pręta i ramy portalowej złożonej z elementów o przekrojach sandwiczowych.

Celem niniejszej pracy jest uni i bimodalna optymalizacja sprężystej ramy portalowej, złożonej z elementów o zmiennych przekrojach (w sposób ciągły lub skokowy) ze względu na jej wyboczenie.

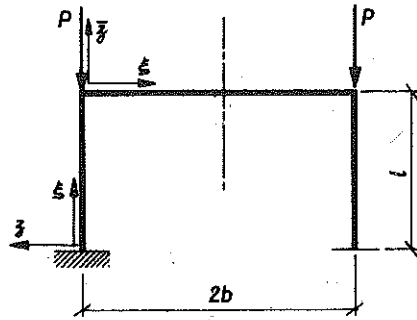
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

2.1. Równania stanu i warunki brzegowe

Rozważmy prosty układ ramowy (ramę portalową), złożony z liniowo sprężystych niewydłużalnych prętów, przedstawiony na rys. 1. Siły skupione o stałych kierunkach podczas wyboczenia działają w węzłach układu i wywołują, przy wzroście aż do wartości krytycznej, jedynie siły podłużne.

Stan krytyczny układu (w ramach teorii liniowej przy założeniu małych ugięć) opisany jest następującymi równaniami:

$$(2.1) \quad [EI(\xi) \zeta_i''(\xi)]'' + P \zeta_i''(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq l$$



Rys. 1

dla prętów pionowych oraz

$$(2.2) \quad [EI(\xi) \zeta_i''(\xi)]'' = 0, \quad l \leq \xi \leq l+b$$

dla pręta poziomego.

W równaniach (2.1) i (2.2) ζ_i oraz ζ_i oznaczają ugięcie prętów względem przyjętych układów współrzędnych (rys. 1), ξ zmienną niezależną, mierzoną od utwierdzenia wzdłuż nieodkształconych osi prętów ramy, $I(\xi)$ moment bezwładności przekroju poprzecznego, E moduł Younga, P siłę ściskającą, działającą stale pionowo. Wskaźnik i , przyjmujący wartość 1 lub 2, wyróżnia przyjętą formę wybozczenia ramy. Załóżmy, że wartość $i = 1$ odpowiada wybozczeniu według formy antysymetrycznej, natomiast $i = 2$ wybozczeniu według formy symetrycznej.

Przyjmijmy w dalszym ciągu, że pomiędzy momentem bezwładności I a polem powierzchni przekroju poprzecznego A zachodzi związek

$$(2.3) \quad I(\xi) = c [A(\xi)]^\nu,$$

w którym c oznacza pewną stałą, a wykładnik ν przyjmuje, w najczęściej spotykanych przypadkach, wartości 1, 2 lub 3 ($\nu = 1$ dla płasko zbieżnych prętów o stałej wysokości, $\nu = 2$ dla prętów równomiernie zbieżnych, $\nu = 3$ dla płasko zbieżnych prętów o stałej szerokości).

W celu uproszczenia dalszych obliczeń wprowadzimy następujące parametry i zmienne bezwymiarowe:

$$(2.4) \quad \eta = b/l, \quad \eta_1 = 1/(1+\eta), \quad x = \xi/(l+b), \quad y = \zeta_i/(l+b), \quad \bar{y} = \zeta_i/(l+b), \\ \Phi(x) = A(x)/A_0,$$

gdzie A_0 jest polem powierzchni przekroju poprzecznego w tak wybranym punkcie $x = x_0$, aby objętość ramy

$$(2.5) \quad V = 2 \int_0^{l+b} A(\xi) d\xi$$

można było przedstawić w postaci

$$(2.6) \quad V = 2(l+b) A_0.$$

Wówczas poszukiwana bezwymiarowa funkcja określająca kształt optymalny spełnia warunek unormowania

$$(2.7) \quad \int_0^1 \Phi(x) dx = 1.$$

Z uwagi na przyjętą dalej metodę optymalizacji, równania (2.1) i (2.2) napiszemy w postaci układu równań różniczkowych liniowych (równań stanu):

$$(2.8) \quad y'_i = \varphi_i, \\ \varphi'_i = -\frac{m_i}{\Phi^v}, \quad m'_i = q_i + \beta \varphi_i, \quad q'_i = 0, \quad i = 1, 2,$$

w których wprowadzono następujące bezwymiarowe wielkości:

$$(2.9) \quad m_i = \frac{2^v (l+b)^{v+1}}{EcV^v} M_i, \quad q_i = \frac{2^v (l+b)^{v+2}}{EcV^v} Q_i, \quad \beta = \frac{2^v (l+b)^{v+2}}{EcV^v} P,$$

określające kolejno moment zginający, siłę prostopadłą do osi nieodkształconych prętów oraz siłę ściskającą. Układ (2.8) opisuje ugięcie słupów ramy dla $0 \leq x \leq \eta_1$ oraz ugięcie rygła przy założeniu $\beta = 0$ dla $\eta_1 \leq x \leq 1$. Przy opisie ugięcia rygła ramy oznaczenia y_i , φ_i , m_i i q_i należy zastąpić oznaczeniami \bar{y}_i , $\bar{\varphi}_i$, \bar{m}_i i \bar{q}_i . Ponadto, ze względu na symetrię układu rozważania ograniczymy do przedziału zmienności x od 0 do 1.

Do równań (2.8) należy dołączyć, w zależności od formy wybočenja (symetrycznej, antysymetrycznej), odpowiednie warunki brzegowe oraz niezależne od formy wybočenja warunki ciągłości w punkcie $x = \eta_1$:

1) $i = 1$ (forma antysymetryczna)

$$(2.10) \quad y_1(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad q_1(\eta_1) = 0, \\ \bar{y}_1(\eta_1) = 0, \quad \bar{y}_1(1) = 0, \quad \bar{m}_1(1) = 0;$$

2) $i = 2$ (forma symetryczna)

$$(2.11) \quad y_2(0) = 0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad y_2(\eta_1) = 0, \\ \bar{y}_2(\eta_1) = 0, \quad \bar{\varphi}_2(1) = 0, \quad \bar{q}_2(\eta_1) = 0;$$

3) warunki «zszycia»

$$(2.12) \quad \varphi_i(\eta_1) = \bar{\varphi}_i(\eta_1), \quad m_i(\eta_1) = \bar{m}_i(\eta_1), \quad i = 1, 2.$$

2.2. Warunek konieczny optymalności dla układu o ciągłym rozkładzie masy

Problem optymalizacji polega tu na znalezieniu funkcji $\Phi(x)$, która spełnia układ równań stanu (2.8) z odpowiednimi warunkami brzegowymi (2.10), (2.11) i (2.12), warunek unormowania (2.7), geometryczne warunki ograniczające

$$(2.13) \quad \Phi_1 \leq \Phi(x) \leq \Phi_2,$$

i która minimalizuje objętość ramy przy ustalonej sile krytycznej lub też,

w sformułowaniu dualnym, maksymalizuje wartość siły krytycznej przy ustalonej objętości.

2.2.1. *Optymalizacja jednomodalna* ($i = 1$ albo $i = 2$). Warunek konieczny dla ekstremum funkcjonału (2.5) wyprowadzimy opierając się na teorii sterowania optymalnego, wykorzystując «zasadę maksimum» Pontriagina. Wprowadzając dodatkową zmienną stanu $y_0(x)$, spełniającą warunki

$$(2.14) \quad y'_0(x) = \Phi(x), \quad y_0(1) = 1, \quad y_0(0) = 0,$$

oraz wektor stanu sprzężonego

$$(2.15) \quad \psi = (\psi_{y_i}, \psi_{\varphi_i}, \psi_{m_i}, \psi_{q_i}, \psi_0),$$

otrzymujemy Hamiltonian w następującej postaci:

$$(2.16) \quad H = \psi_{y_i} \varphi_i + \psi_{\varphi_i} \left(-\frac{m_i}{\Phi^v} \right) + \psi_{m_i} (q_i + \beta \varphi_i) + \psi_0 \Phi \quad (i = 1 \text{ albo } i = 2).$$

Układ równań sprzężonych

$$(2.17) \quad \psi'_{y_i} = 0, \quad \psi'_{m_i} = \psi_{\varphi_i} / \Phi^v, \quad \psi'_{\varphi_i} = -\psi_{y_i} - \beta \psi_{m_i}, \quad \psi'_{q_i} = -\psi_{m_i}$$

może być w naszym przypadku sprowadzony do układu równań stanu za pomocą podstawień:

$$(2.18) \quad \psi_{y_i} = kq_i, \quad \psi_{m_i} = k\varphi_i, \quad \psi_{\varphi_i} = -km_i, \quad \psi_{q_i} = -ky_i,$$

w których k jest dowolną stałą. Również odpowiednie warunki brzegowe oraz warunki zszycia, wyznaczone z warunków transwersalności, przyjmują identyczną postać z równaniami (2.10), (2.11) i (2.12). Mówimy wówczas, że układ jest samosprężony w silnym sensie [7] i Hamiltonian przyjmuje postać

$$(2.19) \quad H = k \left(2q_i \varphi_i + \frac{m_i^2}{\Phi^v} + \beta \varphi_i^2 \right) + \psi_0 \Phi.$$

Poszukiwany warunek konieczny optymalności jest zatem w naszym przypadku warunkiem ekstremum Hamiltonianu (2.19) względem zmiennej sterowania Φ ($\partial H / \partial \Phi = 0$):

$$(2.20) \quad \Phi = \lambda (m_i^2)^{\frac{1}{1+v}}, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \left(\frac{kv}{\psi_0} \right)^{\frac{1}{1+v}}$$

2.2.2. *Optymalizacja dwumodalna* ($i = 1, 2$). W tym przypadku dopuszczamy możliwość równoczesnego wystąpienia obu form wyboczenia, odpowiadających tej samej wartości własnej—sile krytycznej β . Hamiltonian, po uwzględnieniu własności samosprężenia, przyjmuje tu postać

$$(2.21) \quad H = \sum_{i=1}^2 k_i \left(2q_i \varphi_i + \frac{m_i^2}{\Phi^v} + \beta \varphi_i^2 \right) + \psi_0 \Phi$$

(gdzie k_i oznacza stałą ($i = 1, 2$)), z której wynika następujący warunek optymalności:

$$(2.22) \quad \Phi = \lambda [\mu m_1^2 + (1-\mu) m_2^2]^{1+v}, \quad 0 \leq \mu \leq 1,$$

gdzie

$$\lambda = \left[\frac{v(k_1+k_2)}{\psi_0} \right]^{1+v}, \quad \mu = \frac{k_1}{k_1+k_2}.$$

Stałą λ dobieramy tak, aby spełniony był warunek unormowania (2.7), a stałą μ tak, aby siła krytyczna otrzymana z rozwiązania układu (2.8) dla $i=1$ była równa sile krytycznej otrzymanej z rozwiązania tego układu dla $i=2$.

2.3. Warunek optymalności dla układu o odcinkowo stałym rozkładzie masy

Poszukując optymalnego kształtu ramy w klasie funkcji nieciągłych, podzielimy przedział $[0, \eta_1]$ na n a przedział $[\eta_1, 1]$ na m równych części. W każdej z nich odpowiednie funkcje $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots, \bar{\Phi}_m$ przyjmujemy jako stałe. Ograniczymy się w tym przypadku do optymalizacji jedno-modalnej, która jak pokażemy później, jest tu wystarczająca. Hamiltonian tworzymy tak samo jak w punkcie 2.2.1, uwzględniając fakt istnienia optymalizacji parametrycznej:

$$(2.23) \quad H = k \left(2q_i \varphi_i + \frac{m_i^2}{\Phi^v} + \beta \varphi_i^2 \right) + \psi_0 \left(\sum_{j=1}^n \Phi_j + \sum_{j=1}^m \bar{\Phi}_j \right).$$

Zgodnie z ogólną teorią, przedstawioną np. w monografii [11], warunek konieczny optymalności sprowadza się tu do warunków ekstremum wyrażenia H^* względem parametrów optymalizacji $\Phi_j, \bar{\Phi}_j$, przy czym

$$(2.24) \quad H^* = \int_0^1 H dx.$$

Po wykonaniu prostych obliczeń otrzymujemy

$$(2.25) \quad \Phi_j = \left[\frac{nv}{\lambda \eta_1} \int_{a_1}^{b_1} m_i^2 dx \right]^{1+v}, \quad a_1 = \frac{j-1}{n} \eta_1, \quad b_1 = \frac{j}{n} \eta_1$$

dla $j = 1, 2, \dots, n, 0 \leq x \leq \eta_1$,

$$(2.26) \quad \bar{\Phi}_j = \left[\frac{mv}{\lambda \eta \eta_1} \int_{a_2}^{b_2} m_i^2 dx \right]^{1+v}, \quad a_2 = \frac{m+(j-1)\eta}{m} \eta_1, \quad b_2 = \frac{m+j\eta}{m} \eta_1$$

dla $j = 1, 2, \dots, m, \eta_1 \leq x \leq 1$.

Warunek unormowania (2.7) pozwala obliczyć stałą λ ze wzoru

$$(2.27) \quad \lambda = (1 + \eta) \left[\frac{m (nv)^{\frac{1}{1+v}} \mathcal{S}_1 + \eta n \left(\frac{mv}{\eta} \right)^{\frac{1}{1+v}} \mathcal{S}_2}{mn} \right]^{1+v},$$

gdzie

$$\mathcal{S}_1 = \sum_{j=1}^n \left(\int_{a_1}^{b_1} m_j^2 dx \right) \quad \text{dla} \quad 0 \leq x \leq \eta_1,$$

$$\mathcal{S}_2 = \sum_{j=1}^m \left(\int_{a_2}^{b_2} m_j^2 dx \right) \quad \text{dla} \quad \eta_1 \leq x \leq 1.$$

3. METODA ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA

Poszukiwanie optymalnego kształtu ramy opiera się na iteracyjnej metodzie numerycznej, szeroko stosowanej przez W. B. GRINIEWA i A. P. FILIPPOWA [6] i wykorzystanej również w pracach J. BŁACHUTA i A. GAJEWSKIEGO [1 i 2]. Schemat obliczeń zależy od rodzaju optymalizacji (jednomodalna czy dwumodalna).

a) *Optymalizacja jednomodalna.* Zakładamy wstępnie $\Phi^{(0)} \equiv 1$ (rama o prętach przyrządkowanych). Następnie całkujemy układ równań (2.8) z odpowiednimi warunkami brzegowymi, stosując np. metodę Rungego-Kutty, i wyznaczamy odpowiednią siłę krytyczną $\beta^{(0)}$. Z warunku optymalności (2.20) albo (2.25) i (2.26) wyznaczamy poprawiony kształt $\Phi^{(1)}$, który wstawiamy do układu (2.8) i proces powtarzamy. Gdy wartości siły krytycznej, otrzymanej w dwóch kolejnych powtórzeniach procesu będą (z przyjętą dokładnością) bliskie sobie, proces kończymy.

b) *Optymalizacja dwumodalna.* Zakładając początkową postać funkcji $\Phi^{(0)}$ ($\Phi^{(0)} \equiv 1$) całkujemy układ równań (2.8) dla $i = 1$ a następnie dla $i = 2$ oraz wyznaczamy odpowiednie siły krytyczne $\beta_1^{(0)}$ i $\beta_2^{(0)}$. Przyjmując pewną wartość μ , wyznaczamy z warunku optymalizacji (2.22) poprawioną funkcję $\Phi^{(1)}$, którą podstawiamy do równań stanu i powtórnie całkując otrzymujemy siły krytyczne (na ogół różne od siebie). Odpowiedni dobór wartości μ pozwala zrównać siły krytyczne w danej iteracji. Kolejne iteracje kończymy, gdy podwójna siła krytyczna w danej iteracji nie różni się (z przyjętą dokładnością) od podwójnej siły krytycznej w iteracji poprzedniej.

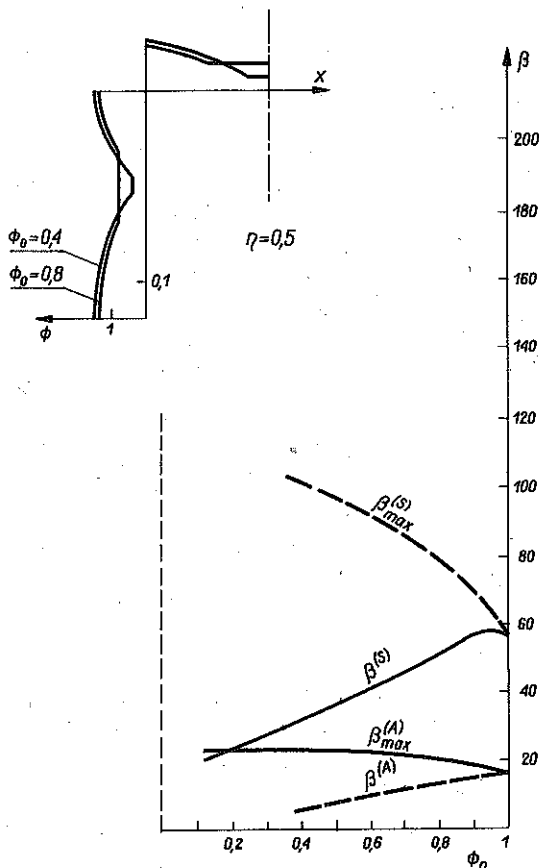
4. ANALIZA WYNIKÓW

4.1. Rama o ciągłym rozkładzie masy

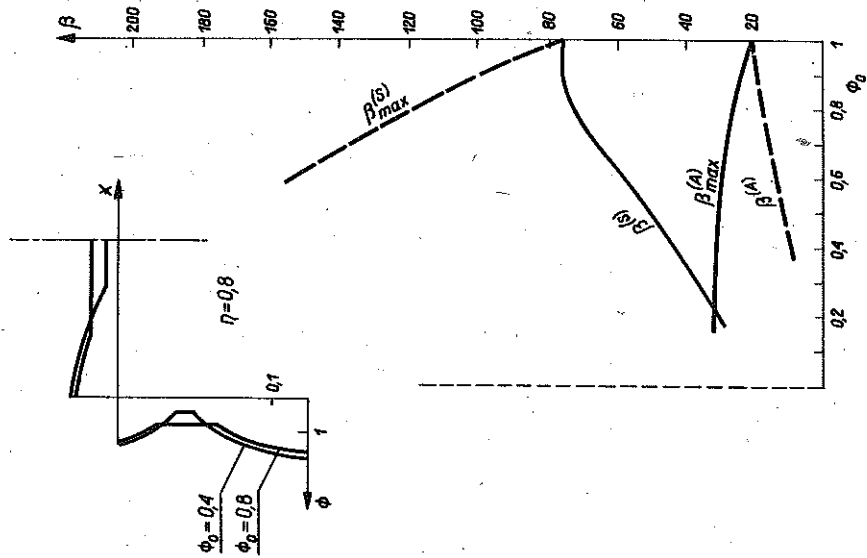
Metody opisane powyżej zastosowano do przykładowych obliczeń. Dla różnych wartości η (wyniosłość ramy) znalezione zostały optymalne kształty i odpowiadające im siły krytyczne. Ponadto dla danej wartości η zmieniano

ograniczenie Φ_0 (w przedziale $[0,1]$). Rysunki 2, 3, 4 i 5 ilustrują rezultaty obliczeń. Oznaczono na nich $\beta_{\max}^{(A)}$ —siłę krytyczną odpowiadającą kształtowi optymalnemu przy antysymetrycznej postaci wyboczenia, $\beta^{(S)}$ —siłę krytyczną przy symetrycznej postaci wyboczenia, odpowiadającą poprzedniemu kształtowi optymalnemu, $\beta_{\max}^{(S)}$ —siłę krytyczną odpowiadającą kształtowi optymalnemu przy symetrycznej postaci wyboczenia oraz $\beta^{(A)}$ —doliczoną siłę krytyczną dla antysymetrycznej postaci wyboczenia. Przedstawiono na nich również optymalne kształty dla kilku wybranych ograniczeń Φ_0 , odpowiadające antysymetrycznej formie wyboczenia.

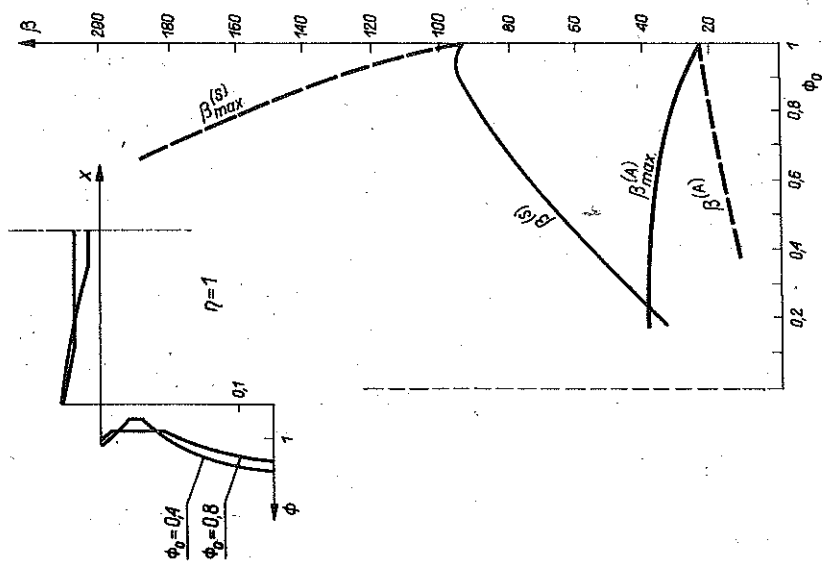
Należy zauważyć, że dla pewnych wyniosłości ramy η , krzywe $\beta_{\max}^{(A)}(\Phi_0)$ i $\beta^{(S)}(\Phi_0)$ przecinają się. Dla ograniczeń Φ_0 mniejszych od ograniczenia odpowiadającego punktowi przecięcia, otrzymane kształty ramy (odpowiadające maksymalnej antysymetrycznej sile krytycznej) nie mogą być traktowane jako optymalne, gdyż wyboczenie «symetryczne» ramy następuje przy niższej wartości siły. Staje się tu konieczne przeprowadzenie optymalizacji dwumodalnej. Sytuacja taka występuje w pewnym przedziale wartości wynio-



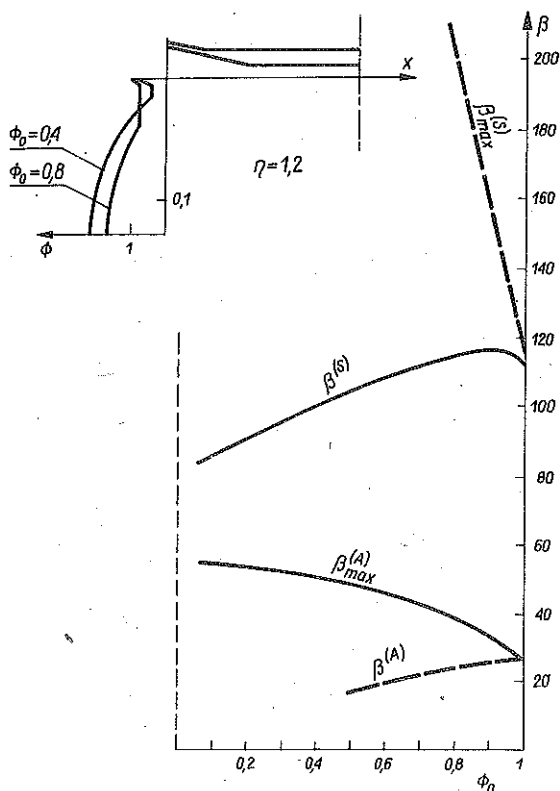
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



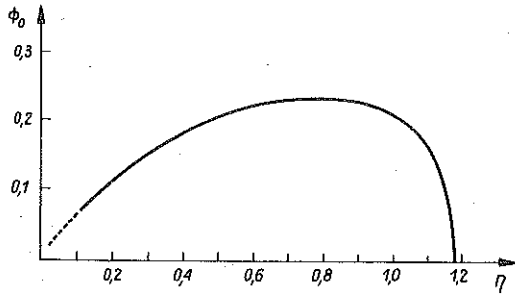
Rys. 5

słości ramy ($\eta \in [0; 1, 18]$), co ilustruje rys. 6, gdzie przedstawiono zależność ograniczenia odpowiadającego punktowi przecięcia $\Phi_0^{(P)}$ od parametru wyniosłości η .

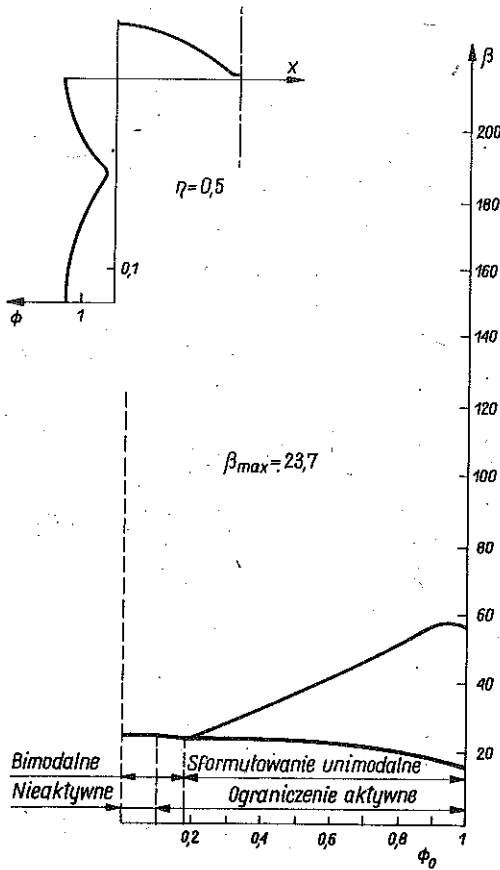
Rezultaty otrzymane z uwzględnieniem optymalizacji dwumodalnej przedstawiono na rys. 7, 8 i 9. Począwszy od pewnej wartości Φ_0 kształty optymalne nie zależą od ograniczenia (ograniczenie jest nieaktywne). Kształty te zostały również przedstawione na rysunkach.

4.2. Rama o odcinkowo stałym rozkładzie masy

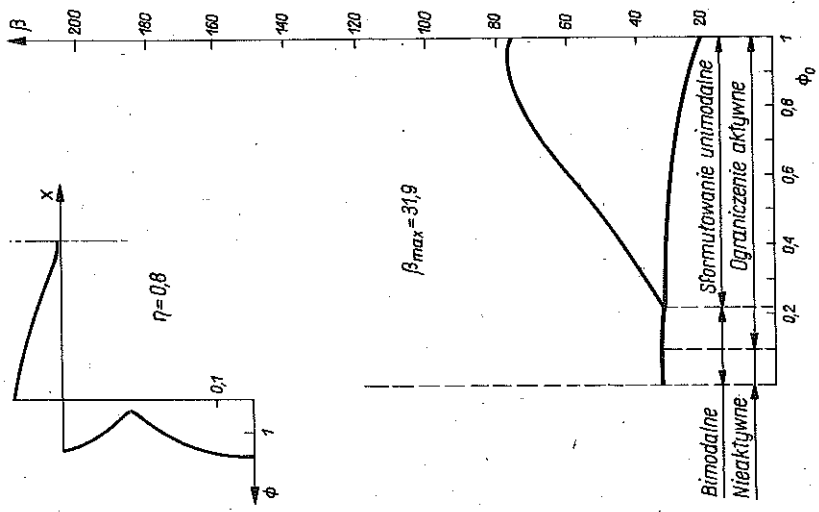
W procesie optymalizacji założono tu antysymetryczną formę wybočenja. Optymalne kształty ramy o wyniosłości $\eta = 2/3$, dla $\nu = 2$ i różnych wartości n i m pokazano na rys. 10. Przy zwiększeniu liczby stałych odcinków kształt optymalny zbliża się do kształtu o ciągłym rozkładzie masy. W każdym z przedstawionych przypadków siła krytyczna, odpowiadająca symetrycznej postaci wybočenja, ma wyższą wartość, co wyklucza konieczność optymalizacji dwumodalnej. Wzrost siły krytycznej w porównaniu z ramą o prętach przyzmatycznych i tej samej objętości wynosi odpowiednio 20%, 31% i 37%. W przypadku ciągłej funkcji Φ i optymalizacji dwumodalnej otrzymujemy $\beta^{(B)} = 28,1$, a więc prawie 50% wzrostu siły krytycznej.



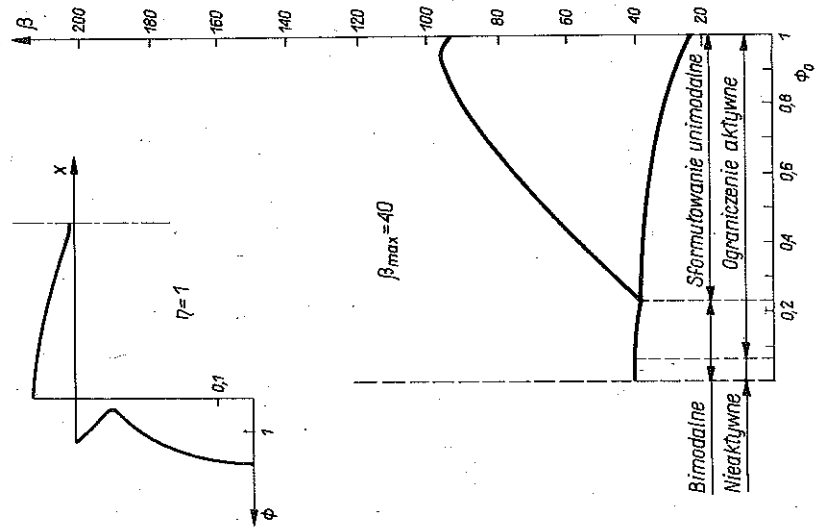
Rys. 6



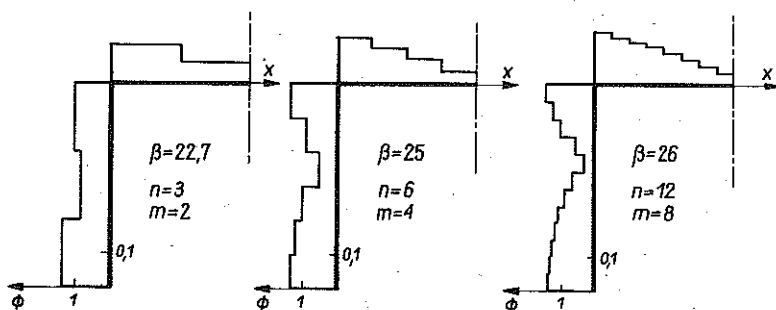
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

5. RÓWNOWAŻNOŚĆ METODY PONTRIAGINA I METODY ENERGETYCZNEJ

Punktem wyjścia metody energetycznej jest tu wzór na siłę krytyczną w zmiennych bezwymiarowych, wyprowadzony z rozważań energetycznych przy założeniu, że energia potencjalna układu musi być minimalna (lokalnie) w wygiętym położeniu równowagi:

$$(5.1) \quad \beta = \frac{\int_0^1 \Phi^v y_i'^2 dx}{\int_0^{\eta_1} y_i'^2 dx}$$

gdzie i oznacza jedną ustaloną wartość (np. $i=1$ albo $i=2$). Metoda energetyczna polega tu na poszukiwaniu ekstremum funkcjonału (5.1) przy stałej objętości pręta:

$$(5.2) \quad V = 2(l+b) A_0 \int_0^1 \Phi(x) dx$$

i to zarówno ze względu na funkcję $y_i^{(0)}(x)$ (warunek równowagi, minimum β), jak i ze względu na funkcję $\Phi(x)$ (optymalizacja, maksimum β). Otrzymujemy w ten sposób zagadnienie izoperymetryczne dla funkcjonału (5.1) z warunkiem pobocznym (5.2). Obliczając wobec tego wariację rozszerzonego funkcjonału:

$$(5.3) \quad I^* = \frac{\int_0^1 \Phi^v y_i'^2 dx}{\int_0^{\eta_1} y_i'^2 dx} + \bar{\lambda} [2(l+b) A_0 \int_0^1 \Phi(x) dx - V]$$

ze względu na zmienną $\Phi(x)$ i przyrównując ją do zera, otrzymujemy warunek konieczny optymalności w postaci:

$$v\Phi^{v-1} y_i'^2 - \bar{\lambda}_1 = 0, \quad \bar{\lambda}_1 = -2\bar{\lambda} (l+b) A_0 \int_0^{\eta_1} y_i'^2 dx = \text{const.}$$

Uwzględniając równania stanu (2.8), warunek (5.4) możemy przekształcić do postaci (2.20), otrzymanej na podstawie metody Pontriagina.

Podobnie w przypadku optymalizacji dwumodalnej poszukujemy maksimum siły krytycznej, wyrażonej funkcjonalem (5.1) dla $i = 1$ przy warunku izoperymetrycznym stałej objętości (5.2) oraz dodatkowym założeniu o równości pierwszej i drugiej siły krytycznej.

Obliczając wariację rozszerzonego funkcjonału

$$(5.5) \quad I^* = \frac{\int_0^1 \Phi^v y_1''^2 dx}{\int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx} + \lambda_1 \left(\frac{\int_0^1 \Phi^v y_1''^2 dx}{\int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx} - \frac{\int_0^1 \Phi^v y_2''^2 dx}{\int_0^{\eta_1} y_2'^2 dx} \right) + \lambda_2 \int_0^1 \Phi dx$$

ze względu na zmienną $\Phi(x)$ otrzymujemy

$$(5.6) \quad v\Phi^{v-1} \left[(1 + \lambda_1) \left(\int_0^{\eta_1} y_2'^2 dx \right) y_1''^2 - \lambda_1 \left(\int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx \right) y_2''^2 + \lambda_2 \left(\int_0^{\eta_1} y_1'^2 dx \right) \left(\int_0^{\eta_1} y_2'^2 dx \right) \right] = 0.$$

Równanie (5.6) można łatwo przekształcić do otrzymanej poprzednio postaci (2.22); należy w tym celu wykorzystać drugie z równań (2.8) dla $i = 1$ oraz $i = 2$ ($m_i = -\Phi^v y_i''^2$) oraz wprowadzić nowe stałe λ i μ zamiast stałych λ_1 i λ_2 .

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na możliwość formalnego skonstruowania funkcjonału (K. TATARKIEWICZ [13]):

$$(5.7) \quad I = \int_0^1 [\psi_y y + \psi_\varphi \varphi + \psi_m m + \psi_q q - \psi_y y' - \psi_\varphi \varphi' - \psi_m m' - \psi_q q' + \\ + 2H(x, y, \varphi, m, q, \psi_y, \psi_\varphi, \psi_m, \psi_q, \Phi)] dx,$$

dla którego równania Eulera-Lagrange'a (dla zmiennych $y, \varphi, m, q, \psi_y, \psi_\varphi, \psi_m$ i ψ_q) prowadzą do układu równań kanonicznych Hamiltona, natomiast warunek ekstremum ze względu na zmienną $\Phi(x)$ jest identyczny z (2.20). Trudno jest jednak znaleźć interpretację fizyczną funkcjonału (5.7).

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy przedstawiono jeszcze jeden (obok obustronnie utwierdzonego pręta ściskanego [9] oraz obustronnie zamocowanego łuku [2]) przykład ilustrujący niewystarczalność jednomodalnego sformułowania problemu optymalnego kształtowania niektórych elementów konstrukcyjnych. Zbadano również zakres poprawności sformułowania jednomodalnego w zależności od wyniosłości ramy oraz ograniczeń geometrycznych nałożonych na przekrój poprzeczny. Sformułowano i rozwiązano ponadto problem optymalizacji parametrycznej w klasie odcinkowo stałych funkcji określających przekrój

poprzeczny elementów ramy. Otrzymane tu kształty odpowiadają mniejszym kosztom wykonania w porównaniu z rozwiązaniami ścisłymi (w klasie funkcji ciągłych).

Ogólnie należy stwierdzić, że rozważania zawarte w pracy mają charakter teoretyczny; problem praktycznego stosowania tego typu rozwiązań wymaga osobnego zbadania, uwzględniającego inne zmienne optymalizacji, np: koszty technologiczne, warunki wytrzymałościowe itp.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *A unified approach to optimal design of columns*. Solid Mech. Arch. 5, 4, 363-413, 1980.
2. J. BLACHUT, A. GAJEWSKI, *On unimodal and bimodal optimal design of funicular arches*. Int. J. Solids Struct. 17, 7, 653-667, 1981.
3. B. R. MCCART, E. J. HAUG, T. D. STREETER, *Optimal design of structures with constraints on natural frequency*, AIAA J., 8, 6, 1012-1019, 1970.
4. C. FLEURY, M. GERADIN, *Optimality criteria and mathematical programming in structural weight optimization*, Computers and Structures, 8, 1, 7-17, 1978.
5. A. GAJEWSKI, *A note on unimodal and bimodal optimal design of vibrating compressed columns*, Int. J. Mech. Sci. 23, 1, 11-16, 1981.
6. W. B. GRINIEW, A. P. FILIPOW, *Ob optimalnych očertanijach stierżnej v zadačach ustrojčivosti*, Stroit. Mech. i Rasč. Sooruz., 2, 21-27, 1974.
7. E. KAMKE, *Differentialgleichungen*, Gewöhnliche, Leipzig 1959.
8. E. F. MASUR, Z. MRÓZ, *Singular solutions in structural optimization problems*, Proc. IUTAM Conf. «Variational Methods in Solid Mechanics», Northwestern University, Sept. 1978, Ed. S. Nemat-Nasser.
9. N. OLHOFF, S. H. RASMUSSEN, *On single and bimodal optimum buckling loads of clamped columns*, Int. J. Solids Struct., 13, 605-614, 1977.
10. B. OLSZOWSKI, A. TOMANA, *Optymalne kształtowanie pretowych układów drgających* [w druku].
11. L. PONTRIAGIN, W. BOLTIAŃSKI, R. GAMKRELIDZE, E. MISZCZENKO, *Theorie mathematique des processus optimaux*, Moskwa 1974.
12. S. PRAGER, W. PRAGER, *A note on optimal design of columns*, Int. J. Mech. Sci., 21, 249-251, 1979.
13. K. TATARKIEWICZ, *Rachunek wariacyjny*, t. 2, WNT, Warszawa 1969.

РЕЗЮМЕ

ОДНО- И ДВУХМОДАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТАЛОВОЙ РАМЫ

В работе представлена проблема оптимального формирования порталовой рамы, подвергнутой потере устойчивости. Показано недостаточность одномодальной формулировки проблемы и определена ее область правильности в зависимости от пологости рамы и геометрических ограничений, наложенных на поперечное сечение. Сформулирована и решена также задача параметрической оптимизации в классе отрезками постоянных функций, определяющих поперечное сечение элементов рамы.

SUMMARY

UNIMODAL AND BIMODAL OPTIMIZATION OF A PORTAL FRAME

The problem of optimum design of a portal frame under stability loss is presented. The unimodal formulation of the problem is shown to be insufficient, and its range of application is determined as a function of frame's height and the geometric limitations imposed on the cross-section. The problem of parametric optimization is also formulated and solved, in which the solution are sought within the class of sectionally constant functions describing the cross-sectional area variation of the frame elements.

POLITECHNIKA KRAKOWSKA
INSTYTUT MECHANIKI I PODSTAW KONSTRUKCJI MASZYN
oraz
INSTYTUT FIZYKI

Praca została złożona w Redakcji w dniu 15 grudnia 1980 r.
