

STATECZNOŚĆ ŚCISKANEJ W KIERUNKU WŁÓKIEN WARSTWY KOMPOZYTU PRZY RÓŻNYCH WARUNKACH BRZEGOWYCH

ANDRZEJ BLINOWSKI (WARSZAWA)

Rozpatrzono stateczność wewnętrzną nieskończonej warstwy materiału zbrojonego niewydłużalnymi elementami o skończonej sztywności na zginanie w kierunku poprzecznym do warstwy — przy ściskaniu pomiędzy dwoma sztywnymi płytami przy różnych kombinacjach warunków brzegowych na styku płyt z materiałem. Wyznaczono krytyczną wartość naprężenia ściskającego oraz postać utraty stateczności dla dziesięciu różnych przypadków.

W pracach [1 i 2] zaproponowano momentowy model kompozytu włóknistego, dla którego rozpatrzono dwa przypadki wewnętrznej utraty stateczności przy ściskaniu dla granicznego przypadku niewydłużalnych włókien.

W niniejszej pracy rozpatrzymy szerszy wachlarz warunków brzegowych i znajdziemy odpowiadające im obciążenia krytyczne oraz pierwszą formę utraty stateczności. Ze względu na to, że rozpatrujemy zlinearyzowane zadanie, ograniczymy się do płaskiego przypadku; przypadki przestrzenne otrzymać można drogą superpozycji płaskich rozwiązań we wzajemnie ortogonalnych płaszczyznach.

Uważny czytelnik łatwo dostrzeże oczywistą analogię otrzymanych rozwiązań do rozwiązań zadania o utracie stateczności ściskanego pręta.

Rozpatrujemy ściskanie nieskończonej warstwy pomiędzy sztywnymi płytami przyjmując następującą postać wektora przemieszczenia $V(u_1, u_2, u_3)$:

$$V^2 = V^2(u_3), \quad V^1 = 0, \quad V^3 = 0,$$

gdzie $\{u_i\}$ oznacza konwekcyjne współrzędne materialne, a składowe wektora V określone są w bazie generowanej przez układ $\{u_i\}$.

Dla materiału nieściśliwego o niewydłużalnych włóknach przebiegających w kierunku u_2 równanie równowagi przyjmuje postać [2]

$$(1.1) \quad (A - T) \frac{\partial^2 V^2}{\partial u_3^2} - R \frac{\partial^4 V^2}{\partial u_3^4} = 0,$$

gdzie A i R oznaczają stałe materiałowe, a T bezwzględną wartość naprężenia ściskającego. Stała A ma interpretację modułu ścinania w materiale nieodkształconym, a stała R charakteryzuje sztywność włókien zbrojenia na

zginanie [1 i 2]. Na powierzchniach płyt, tj. dla $u_3 = \pm h$, sformułujemy następujące warunki brzegowe:

$$(1.2) \quad \left. \begin{aligned} \alpha_1 V_2 + \beta_1 t_2 = 0 \\ \gamma_1 \frac{\partial V_2}{\partial u^3} + \varphi_1 \frac{\partial^2 V_2}{\partial (u^3)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ dla } u_3 = h;$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 V_2 + \beta_2 t_2 = 0 \\ \gamma_2 \frac{\partial V_2}{\partial u^3} + \varphi_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial (u^3)^2} = 0 \end{aligned} \right\} \text{ dla } u_3 = -h,$$

gdzie t_2 oznacza składową styczną wektora naprężenia. Ograniczymy się przy tym do rozpatrzenia przypadku, gdy $\alpha_i \beta_i = 0$, $\gamma_i \varphi_i = 0$ ($i = 1, 2$), tj. gdy jeden ze współczynników w warunkach (1.2) jest równy zero. Przypadek $\alpha_i = 0$ odpowiada zerowej składowej stycznej wektora naprężenia dla odpowiedniej powierzchni (płyta gładka); $\beta_i = 0$ zerowym przemieszczeniem (płyta idealnie szorstka); $\gamma_i = 0$ odpowiada zerowej krzywiznie włókien zbrojenia, więc zerowemu momentowi na powierzchni; $\varphi_i = 0$ odpowiada końcom włókien zbrojenia na sztywno zamocowanym w płycie.

Zauważymy dalej, że ze względu na niewydłużalność włókien i nieściśliwość materiału, dla małych przemieszczeń εV ($\varepsilon \ll 1$) normy różnic wektorów bazy i kobazy są rzędu ε . Zatem składowe kowariantne i kontrawariantne wektora przemieszczenia są sobie równe z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu względem ε . Nie zakładamy natomiast, że naprężenia ściskające T są małe, zatem musimy znaleźć składową kowariantną t_2 , która może zależeć od T . Warunki (1.2) sformułowaliśmy tu z wykorzystaniem kowariantnej składowej t_2 , ponieważ dla danego schematu odkształcenia wektor g_2 pozostaje równoległy do powierzchni. Własności tej natomiast nie posiada wektor g^2 .

Mamy więc

$$t_2 = n_k T^{kl} g_{l2},$$

gdzie n jest jednostkowym wektorem ortogonalnym do powierzchni, a T jest tensorem naprężenia, przy czym $\hat{T}^{33} = -T$, gdzie przez \hat{T}^{33} oznaczono składowe tensora naprężenia dla $V = 0$, tj. w stanie nieodkształconym (podstawowym).

Oznaczając wielkości w stanie podstawowym znakiem $\hat{(\cdot)}$, a ich przyrost po nałożeniu pola przemieszczeń εV przez „prim” $(\cdot)'$, znajdziemy

$$(1.4) \quad n = \hat{n}, \quad n_k = \hat{n} \cdot (\hat{g}_k + g'_k) = \hat{n}_k + n'_k,$$

$$(1.5) \quad T^{ij} = (\hat{g}^i + g'^i) \cdot (\hat{T} + T') \cdot (\hat{g}^j + g'^j) = \hat{T}^{ij} + T'^{ij},$$

$$(1.6) \quad g_{ij} = (\hat{g}_i + g'_i) \cdot (\hat{g}_j + g'_j) = \hat{g}_{ij} + g'_{ij}$$

Podstawiając do (1.3) i zanedbując kwadraty wielkości „primowanych” oraz uwzględniając, że jedynie składowe \hat{n}_3 i n'_3 są różne od zera otrzymujemy:

$$(1.7) \quad t_2 = \hat{n}_3 \hat{T}^{3l} \hat{g}_{l2} + \hat{n}_3 \hat{T}^{3l} g'_{l2} + n'_3 \hat{T}^{3l} \hat{g}_{l2} + \hat{n}_3 T'^{3l} \hat{g}_{l2}.$$

Jedyną niezerową składową \hat{T}^{ij} jest $\hat{T}^{33} = -T$, natomiast ze wszystkich wielkości \hat{g}_{12} różna od zera jest jedynie \hat{g}_{22} zatem uwzględniając że $\hat{n}_3 = \pm 1$ mamy

$$(1.8) \quad t_2 = \pm(-Tg'_{32} + T^{32}),$$

gdzie górny znak odnosi się do powierzchni $u^3 = h$, a dolny do $u^3 = -h$ i dalej, ponieważ $g'_2 = 0$, natomiast $g'_3 \cdot \hat{g}_2 = \partial V_2 / \partial u^3$, to biorąc wartość T^{32} z pracy [2] otrzymujemy

$$(1.9) \quad t_2 = \pm \left[(A-T) \frac{\partial V^2}{\partial u^3} - R \frac{\partial^3 V^2}{(\partial u^3)^3} \right]; \quad \text{dla} \quad u^3 = \pm h.$$

Rozwiązujemy zatem równanie (1.1) z warunkami brzegowymi (1.2) wyrażonymi przez wartości przemieszczenia i jego pochodnej na brzegu za pośrednictwem (1.9).

Tak sformułowane zadanie posiada oczywiście rozwiązanie trywialne $V = 0$, które nazwalismy podstawowym. Jako kryterium utraty stateczności traktować będziemy istnienie statycznego, różnego od zera pola przemieszczeń $V = (0, V_2(u^3), 0)$, spełniającego równanie (1.1) i warunki brzegowe.

Jak łatwo się przekonać istnieje dokładnie 10 istotnie różnych układów warunków brzegowych spełniających warunki $\alpha_i \beta_i = 0$, $\varphi_i \gamma_i = 0$. Sens fizyczny można również przypisać przypadkom, gdy iloczyny te są różne od zera, np. przypadek $\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$ może imitować sprężystą podatność płyt ściskających na ścinanie. W naszej pracy jednakże ograniczymy się do wspomnianych dziesięciu przypadków. Dla uproszczenia oznaczeń zmienną u^3 oznaczymy przez x . Ogólne rozwiązanie równania (1.1) ma postać

$$(1.10) \quad V(x) = C_1 + C_2 x + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx \quad \text{dla} \quad T \neq A,$$

gdzie

$$k = \sqrt{\frac{T-A}{R}},$$

bądź

$$(1.11) \quad V(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 \quad \text{dla} \quad T = A.$$

W szczególności jeżeli $T < A$ i k ma wartość urojoną, to stała C_3 w wyrażeniu (1.10) musi mieć również wartość urojoną.

Podstawienie (1.10) do warunków brzegowych prowadzi do następującego układu równań na wartości stałych C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \alpha_1 C_1 + (\alpha_1 - R\beta_1) C_2 + \alpha_1 \sin kh C_3 + \alpha_1 \cos kh C_4 &= 0, \\ \alpha_2 C_1 + (\alpha_2 - R\beta_2) C_2 - \alpha_2 \sin kh C_3 + \alpha_2 \cos kh C_4 &= 0, \\ \gamma_1 C_2 + (\gamma_1 k \cos kh - \varphi_1 k^2 \sin kh) C_3 - (\gamma_1 k \sin kh + \varphi_1 k^2 \cos kh) C_4 &= 0, \\ \gamma_2 C_2 + (\gamma_2 k \cos kh + \varphi_2 k^2 \sin kh) C_3 + (\gamma_2 k \sin kh - \varphi_2 k^2 \cos kh) C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Warunek istnienia nietrywialnego rozwiązania układu (1.12) ma postać

$$(1.13) \quad 4\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \sin kh (\sin kh - kh \cos kh) + \\ + \alpha_1 \alpha_2 (\varphi_2 \gamma_1 - \varphi_1 \gamma_2) k (2kh \cos 2kh - \sin 2kh) + \\ + R (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \gamma_1 \gamma_2 \sin 2kh - R (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) (\varphi_2 \gamma_1 - \varphi_1 \gamma_2) k^2 \cos 2kh + \\ + [R (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - 2\alpha_1 \alpha_2 h] k \varphi_1 \varphi_2 \sin 2kh = 0.$$

Zauważmy, że dla przypadku $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ równanie (1.13) jest tożsamościowo spełnione. Zauważmy także, że warunek $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ może opisywać nie tylko idealnie gładkie płyty, ale również np. ściskanie pomiędzy gładkimi płytami warstwy zaopatrzonej w sztywne okładki, w których z jednej lub obu stron mogą być zamocowane końce zbrojenia. Sens fizyczny tożsamościowego spełnienia równania (1.13) przy $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ jest oczywisty: zawsze istnieje rozwiązanie trywialne opisujące sztywne przemieszczenie.

Zauważmy, że dwa pierwsze równania układu (1.12) są spełnione, jeżeli $C_2 = 0$. Pozostają zatem dwa równania na dwie niewiadome C_3 i C_4 . Warunek rozwiązalności tych dwu równań ma postać

$$(1.14) \quad \gamma_1 \gamma_2 \sin 2kh - (\varphi_2 \gamma_1 - \varphi_1 \gamma_2) k \cos 2kh + k^2 \varphi_1 \varphi_2 \sin 2kh = 0.$$

Nie trudno stwierdzić, że warunki $\alpha_i \beta_i = 0, \varphi_i \gamma_i = 0$ "wycinają" niejako z równania (1.13) lub (1.14) pojedyncze składniki. Ponieważ dla $k = ik', k' \in \text{Re}, h \neq 0$, przeto mamy $\cos kh = \text{ch}k' h, \sin kh = i \text{sh}k' h \neq 0$, więc równanie (1.14) nie może być spełnione. Natomiast aby było spełnione równanie, (1.13) musiałoby zachodzić w zależności od warunków brzegowych bądź $kh \text{ch}kh - \text{sh}kh = 0$, bądź ta sama relacja dla podwojonego argumentu. Rozkładając jednakże w szereg oba wyrazy otrzymujemy:

$$(1.15) \quad kh \text{ch}kh - \text{sh}kh = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kh)^{2n+1}}{(2n)!} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] > 0.$$

Zatem jedynym rozwiązaniem dopuszczalnym dla $T < A$ jest rozwiązanie trywialne oraz sztywne przemieszczenie przy $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$. Ponieważ interesuje nas najmniejsza wartość T powodująca utratę stateczności, więc zanim przystąpimy do rozpatrywania przypadku $T > A$ rozpatrzmy $T = A$. Podstawienie warunków (1.11) do warunków brzegowych prowadzi do następujących warunków rozwiązalności układu:

$$(1.16) \quad 8\alpha_1 \alpha_2 h^2 [-2h^2 \gamma_1 \gamma_2 - 2h (\gamma_1 \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_2) - 6\varphi_1 \varphi_2] + \\ + 12R (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) [(\gamma_1 \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_2) - 2\gamma_1 \gamma_2 h] = 0.$$

Przy $\alpha_i \beta_i = 0, \varphi_i \gamma_i = 0$ oraz $h \neq 0$ warunek ten jest spełniony, jedynie gdy $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$, lub też gdy $\alpha_1 \alpha_2 = 0, \gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$. Dla przypadku $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$ warunkiem istnienia nietrywialnego rozwiązania jest spełnienie równości

$$(1.17) \quad -4\gamma_1 \gamma_2 h + 2(\gamma_1 \varphi_2 - \varphi_1 \gamma_2) = 0.$$

Zatem jedynymi przypadkami istnienia nietrywialnego rozwiązania jest spełnienie warunku $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0, \alpha_1 \alpha_2 = 0$. Stąd utrata stateczności może

nastąpić przy $T = A$ jedynie wtedy, gdy na żadnym z brzegów końce zbrojenia nie są zamocowane na sztywno i gdy co najmniej na jednym brzegu dopuszczone są przemieszczenia.

Wyliczając stałe w równaniu (1.11) otrzymujemy $V(x)$ w postaci funkcji liniowej, przy czym stała C_1 może być wyznaczona przez stałą C_2 , lub też przyjmować dowolne wartości w zależności od tego, czy dopuszczamy przemieszczenia na jednym czy też na obu brzegach. Dla wszystkich pozostałych przypadków wartość krytyczną oraz postać utraty stateczności wyznaczamy z równania (1.14) (przy $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$) lub (1.13) (w pozostałych przypad-

kach). Mianowicie wyznaczamy k i ze wzoru $k = \sqrt{\frac{T-A}{R}}$ obliczamy T .

Przed przystąpieniem do rozpatrywania przypadków typu $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$ musimy jeszcze znaleźć numerycznie rozwiązanie równania przestępnego

$$(1.18) \quad 2kh \cos 2kh - \sin 2kh = 0.$$

Najmniejsza dodatnia wartość argumentu $2kh$ spełniająca to równanie wynosi 4,49341....

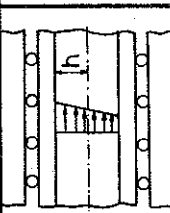
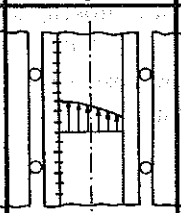
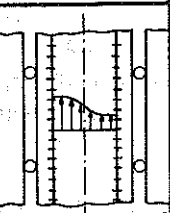
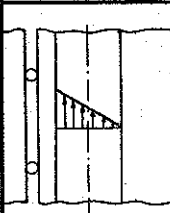
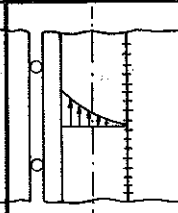
Pomijając trywialne obliczenia podajemy poniżej tablicę rozwiązań dla dziesięciu istotnie różnych przypadków wyczerpujących (z dokładnością do symetrii) wszystkie możliwości przy $\alpha_i \beta_i = 0$, $\varphi_i \gamma_i = 0$. Na szkicach ilustrujących schemat obciążenia przypadek braku tarcia będziemy symbolicznie przedstawiać w postaci sztywnej okładki przesuwającej się bez tarcia po płycie. Natomiast przypadek zamocowanych końców zbrojenia przedstawiamy w postaci pionowych kresiek (Tablica 1).

Uważna lektura przedstawionej tablicy pozwala zredukować liczbę istotnie różnych sytuacji do sześciu, mianowicie, przypadki 1 i 4 przedstawiają to samo rozwiązanie różniące się jedynie o sztywne przemieszczenie; podobnie rzecz się ma dla przypadków 2, 5, 6 (z dokładnością do symetrii "górną-dół") oraz przypadków 3 i 7. Otrzymane wartości krytyczne dla T są całkowicie zgodne z inżynierską intuicją przewidującą wzrost wartości obciążenia krytycznego w miarę "usztywniania" zamocowania.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. A. BLINOWSKI, *Nonlinear micropolar continuum model of a composite reinforced by elements of finite rigidity. Part I. Equations of motion and constitutive relations*, Arch. Mech., 33, 5, 753-761, 1981.
2. A. BLINOWSKI, *Nonlinear micropolar continuum model of a composite reinforced by elements of finite rigidity. Part II. Stability at compression*, Arch. Mech., 33, 5, 763-771, 1981.

Tablica 1

№	Warunki brzegowe	Warunek na k istnienia nietrywialnego rozwiązania	Postać utraty stateczności	Krytyczne naprężenie sciskające
1	 <p> $\alpha_1=0$ $\gamma_1=0$ $\alpha_2=0$ $\gamma_2=0$ </p>	<p>_____</p>	<p>$V = C_1 + C_2 x$</p>	<p>$T = A$</p>
2	 <p> $\alpha_1=0$ $\varphi_1=0$ $\alpha_2=0$ $\gamma_2=0$ </p>	<p>$(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \varphi_2 \gamma_1 \cos 2kh = 0$</p>	<p>$V = C_1 + C_3 \left(\sin \frac{\sqrt{I_x}}{4h} + \cos \frac{\sqrt{I_x}}{4h} \right)$</p>	<p>$T = A + \frac{\sqrt{I_x}^2 R}{16 h^2}$</p>
3	 <p> $\alpha_1=0$ $\varphi_1=0$ $\alpha_2=0$ $\varphi_2=0$ </p>	<p>$(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \gamma_1 \gamma_2 \sin 2kh = 0$</p>	<p>$V = C_1 + C_3 \sin \frac{\sqrt{I_x}}{2h}$</p>	<p>$T = A + \frac{\sqrt{I_x}^2 R}{4 h^2}$</p>
4	 <p> $\alpha_1=0$ $\gamma_1=0$ $\beta_2=0$ $\gamma_2=0$ </p>	<p>_____</p>	<p>$V = C_2 x$</p>	<p>$T = A$</p>
5	 <p> $\alpha_1=0$ $\gamma_1=0$ $\beta_2=0$ $\varphi_2=0$ </p>	<p>$\alpha_2 \beta_1 \varphi_1 \gamma_2 \cos 2kh = 0$</p>	<p>$V = C_3 \left(\sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{I_x}}{4h} - \cos \frac{\sqrt{I_x}}{4h} \right)$</p>	<p>$T = A + \frac{\sqrt{I_x}^2 R}{16 h^2}$</p>

$\alpha_1=0$ $\varphi_1=0$ $\beta_2=0$ $\gamma_2=0$		$\alpha_2 \beta_1 \varphi_2 \gamma_1 \cos 2kh = 0$	$V = C_3 \left(\sin \frac{\pi x}{4h} + \cos \frac{\pi x}{4h} \right)$	$T = A + \frac{\pi^2 R}{16 h^2}$
$\alpha_1=0$ $\varphi_1=0$ $\beta_2=0$ $\varphi_2=0$		$\alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \gamma_2 \sin 2kh = 0$	$V = C_3 \left(\sin \frac{\pi x}{2h} + 1 \right)$	$T = A + \frac{\pi^2 R}{4 h^2}$
$\beta_1=0$ $\gamma_1=0$ $\beta_2=0$ $\gamma_2=0$		$\alpha_1 \alpha_2 \varphi_1 \varphi_2 \sin 2kh = 0$	$V = C_4 \cos \frac{\pi x}{2h}$	$T = A + \frac{\pi^2 R}{4 h^2}$
$\beta_1=0$ $\gamma_1=0$ $\beta_2=0$ $\varphi_2=0$		$\alpha_1 \alpha_2 \varphi_1 \gamma_2 (2kh \cos 2kh - \sin 2kh) = 0$	$V = C_4 \left[0.626 \left(1 - \frac{x}{h} \right) + 0.824 \sin \frac{2.247x}{h} + \cos \frac{2.247x}{h} \right]$	$T = A + \frac{(2.247)^2 R}{h^2}$
$\beta_1=0$ $\varphi_1=0$ $\beta_2=0$ $\varphi_2=0$		$\alpha_1 \alpha_2 \gamma_1 \gamma_2 \sin kh (\sinh kh - kh \cosh kh) = 0$	$V = C_1 \left(1 + \cos \frac{\pi x}{h} \right)$	$T = A + \frac{\pi^2 R}{h^2}$

РЕЗЮМЕ

УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИТНОГО СЛОЯ СЖИМАЕМОГО В НАПРАВЛЕНИИ ВОЛОКОН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ

Рассмотрена внутренняя устойчивость бесконечного слоя, поперечно армированного нерастяжимыми элементами конечной жесткости на изгиб при сжатии двумя жесткими штампами. Найдены критические значения сжимающего усилия и моды потери устойчивости для десяти различных случаев, соответствующих различными сочетаниям краевых условий на контакте штампов с материалом.

SUMMARY

STABILITY OF A COMPOSITE LAYER COMPRESSED ALONG THE FIBERS AND SUBJECT TO VARIOUS BOUNDARY CONDITIONS

An infinite layer of a material reinforced by inextensible elements of finite bending stiffness in the direction perpendicular to the layer is compressed between two rigid plates under various boundary conditions at the layer-plate interface. The problem of stability of the layer is discussed. The critical value of compressive stresses is determined, and the post-critical configurations are found in ten different cases.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 23 listopada 1982 r.
