

ANALIZA DRGAŃ LOSOWYCH MAŁOWYNIOSŁEJ POWŁOKI WALCOWEJ

RADOSŁAW IWANKIEWICZ i MAREK WITT (WROCLAW)

Rozważane są drgania ustalone małowyniosłej powłoki walcowej przy ciągłym, stacjonarnym wymuszeniu stochastycznym oraz drgania niestalone przy wymuszeniu niestacjonarnym szumem śrutowym. W celu rozwiązania (rozprzężenia) klasycznych równań Własowa powłoki małowyniosłej zastosowano metodę funkcji własnych. Wzór na wariancję reakcji powłoki na wymuszenie stacjonarne i niestacjonarne otrzymano stosując odpowiednio metodę widmową i impulsowe funkcje przejścia. W szczególności dla różnych wyniosłości powłoki zbadano udział poszczególnych postaci drgań własnych i ich korelacji wzajemnych w kształtowaniu wariancji reakcji układu. Wyniki przedstawiono graficznie.

1. WSTĘP

Drgania cienkich powłok pod wpływem losowych obciążeń były przedmiotem wielu prac. Drganiami losowymi małowyniosłych powłok zajmował się m.in. PALMOV [1 i 2], przyjmując wymuszenie jako przestrzenno-czasowe, jednorodne pole losowe. Liniowymi drganiami powłoki walcowej pod wpływem stacjonarnych wymuszeń zajmowali się SKALMIERSKI i CZOGAŁA [3] oraz drganiami nieliniowymi — TYLIKOWSKI [4]. Osiowo-symetryczne drgania powłoki walcowej przy wymuszeniu o charakterze procesu szerokopasmowego rozważał np. ELISHAKOFF i in. [5].

Istotnym problemem, jaki pojawia się przy stosowaniu metody funkcji własnych w analizie losowych drgań układów liniowych, jest problem wzajemnych korelacji między współrzędnymi uogólnionymi (albo inaczej korelacji między postaciami drgań), czyli problem sprzężenia postaci drgań (oprócz oczywistej w tym przypadku kwestii koniecznej dokładności rozwinięcia w szereg funkcji własnych). Ogólne warunki, przy spełnieniu których można pominąć korelacje wzajemne, podał BOŁOTIN [6]. Warunki te, to małe tłumienie i dostatecznie oddalone od siebie częstości drgań własnych (duże odstępy między częstościami w widmie drgań własnych układu). W wielu pracach określano także szczegółowe warunki w tym zakresie (np. PIETROV i BAZILEVSKI [7]) oraz badano wspomniany problem dla różnych układów,

np. dla wieloprzęstowej belki ciągłej — MERCER [8], dla płyty utwardzonej na obwodzie — DIMENTBERG [9] oraz dla małowyniosłej powłoki kulistej — ELISHAKOFF [10]. Analiza przeprowadzona w ostatniej pracy jest obszerna, jednakże dotyczy tylko odpowiedzi ustalonej układu na wymuszenie o charakterze białego szumu. Jak się okazuje problem wzajemnych korelacji między współzrędnymi uogólnionymi jest w analizie drgań powłok szczególnie ważny.

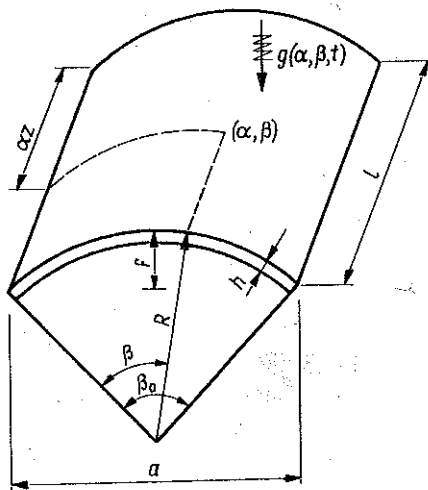
Przedmiotem niniejszej pracy są drgania ustalone małowyniosłej powłoki walcowej przy wymuszeniu ciągłym o charakterze stacjonarnego procesu stochastycznego oraz drgania przejściowe tej powłoki poddanej działaniu niestacjonarnego stochastycznego wymuszenia impulsowego (tzw. szumu sruutowego). Celem pracy jest zbadanie udziału, jaki mają poszczególne postacie drgań oraz ich wzajemne korelacje w kształtowaniu średniokwadratowej odpowiedzi powłoki na wymuszenia tego typu, a w szczególności określenie tego udziału dla powłok o różnych wyniosłościach.

2. RÓWNANIA DRGAŃ I ŚREDNIOKWADRATOWA REAKCJA POWŁOKI NA WYMUSZENIE LOSOWE

Rozważane są drgania losowe swobodnie podpartej, małowyniosłej powłoki walcowej (rys. 1). Równania drgań tłumionych takiej powłoki, zgodnie z techniczną teorią Własowa, mają postać (por. NOWACKI [11]).

$$(2.1) \quad \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - R \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0,$$

$$R \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + N \nabla^2 \nabla^2 w + cR^4 \frac{\partial w}{\partial t} + mR^4 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R^4 g(\alpha, \beta) F(t).$$



Rys. 1

gdzie E oznacza moduł Younga, $N = Eh^2/12(1-\nu^2)$ — płytową sztywność na zginanie, c — parametr tłumienia, m — powierzchniową gęstość masy oraz $\nabla^2 = \partial^2/\partial\alpha^2 + \partial^2/\partial\beta^2$. Zakładamy, że wymuszenie może być przedstawione w postaci iloczynu deterministycznej funkcji $g(\alpha, \beta)$ opisującej rozkład przestrzenny i procesu stochastycznego $F(t)$. Funkcja $\varphi(\alpha, \beta, t)$ jest losową funkcją naprężeń, a $w(\alpha, \beta, t)$ losową funkcją ugięcia.

Rozwijając funkcję naprężeń φ i funkcję ugięcia w w szereg funkcji własnych

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \varphi(\alpha, \beta, t) &= \sum_{i,j} p_{ij}(t) f_{ij}(\alpha, \beta), \\ w(\alpha, \beta, t) &= \sum_{i,j} q_{ij}(t) f_{ij}(\alpha, \beta), \end{aligned}$$

gdzie $f_{ij}(\alpha, \beta) = \sin \lambda_i \alpha \sin \mu_j \beta$ jest funkcją własną, $\lambda_i = i\pi R/l$, $\mu_j = j\pi/\beta_0$, otrzymujemy niezależne równania o postaci

$$(2.3) \quad \ddot{q}_{ij} + 2\alpha_{ij} \Omega_{ij} \dot{q}_{ij} + \Omega_{ij}^2 q_{ij} = \gamma_{ij} F(t),$$

gdzie $\alpha_{ij} = c/2m\Omega_{ij}$ oznacza liczbę tłumienia odpowiadającą postaci f_{ij} . Częstość kołowa drgań własnych Ω_{ij} jest wyznaczona ze wzoru

$$(2.4) \quad \Omega_{ij}^2 = \frac{1}{mR^2} \left[\frac{\lambda_i^4 Eh}{(\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2} + \frac{N}{R^2} (\lambda_i^2 + \mu_j^2)^2 \right],$$

współczynnik zaś γ_{ij}

$$(2.5) \quad \gamma_{ij} = \int_0^{\beta_0} \int_0^{l/R} g(\alpha, \beta) \sin \lambda_i \alpha \sin \mu_j \beta d\alpha d\beta / m \int_0^{\beta_0} \int_0^{l/R} \sin^2 \lambda_i \alpha \sin^2 \mu_j \beta d\alpha d\beta.$$

Zalóżmy, że $F(t)$ jest stacjonarnym procesem stochastycznym o zerowej wartości przeciętnej oraz o znanej funkcji korelacyjnej $K_F(\tau)$. Wariancję ugięcia powłoki w ustalonym stanie drgań obliczamy ze wzoru

$$(2.6) \quad \sigma_w^2(\alpha, \beta) = \sum_{i,j,k,l} k_{q_{ij}q_{kl}}(0) f_{ij}(\alpha, \beta) f_{kl}(\alpha, \beta),$$

gdzie funkcja korelacji wzajemnej (w tej samej chwili) współrzędnych uogólnionych q_{ij} i q_{kl} wyraża się wzorem

$$(2.7) \quad k_{q_{ij}q_{kl}}(0) = \gamma_{ij} \gamma_{kl} \int_{-\infty}^{\infty} S_F(\omega) H_{ij}(i\omega) H_{kl}(-i\omega) d\omega,$$

gdzie $S_F(\omega)$ jest funkcją gęstości widmowej procesu wymuszenia, $H_{ij}(\omega)$ zaś funkcją transmitancji układu.

Przyjmijmy następnie proces wymuszenia w postaci losowej serii impulsów Diraca:

$$(2.8) \quad F(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} P_i \delta(t-t_i),$$

gdzie $N(t)$ jest losową liczbą impulsów w przedziale $(0, t]$, P_i jest zaś losową wielkością impulsu pojawiającego się w chwili t_i . Zakładamy, że $N(t)$ jest procesem Poissona, tzn. że chwile t_i są niezależne, prawdopodobieństwo pojawienia się impulsu w przedziale czasu o długości dt jest równe $\lambda(t) dt$ (gdzie $\lambda(t)$ jest średnim natężeniem pojawiania się impulsów) oraz prawdopodobieństwo pojawienia się więcej niż jednego impulsu w tym przedziale jest pomijalnie małe. Założmy również, że zmienne losowe P_i są wzajemnie niezależne, niezależne od chwil t_i , mają dowolny rozkład prawdopodobieństwa i zerową wartość przeciętną. Tak zdefiniowany proces wymuszenia jest tzw. szumem śrutowym (*shot noise*).

Reakcję układu według postaci f_{ij} w przejściowym stanie drgań przedstawiamy, jako rozwiązanie równania (2.3), w formie całki

$$(2.9) \quad k_{q_{ij}q_{kl}}(t) = \gamma_{ij} \int_0^t h_{ij}(t-\tau) P(\tau) dN(\tau),$$

gdzie $h_{ij}(t)$ jest impulsową funkcją przejścia.

Funkcja korelacji wzajemnej między współrzędnymi uogólnionymi wyraża się wzorem [12]

$$(2.10) \quad k_{q_{ij}q_{kl}}(t) = \gamma_{ij} \gamma_{kl} \int_0^t h_{ij}(t-\tau) h_{kl}(t-\tau) E[P^2(\tau)] \lambda(\tau) d\tau.$$

Wariancję ugięcia powłoki w przejściowym stanie drgań otrzymujemy na podstawie wzoru

$$(2.11) \quad \sigma_w^2(\alpha, \beta, t) = \sum_{i,j,k,l} k_{q_{ij}q_{kl}}(t) f_{ij}(\alpha, \beta) f_{kl}(\alpha, \beta).$$

3. ANALIZA DRGAŃ PRZY WYMUSZENIU LOSOWYM RÓWNOMIERNIE ROZŁOŻONYM PRZESTRZENNIE

W dalszych, szczegółowych rozważaniach przyjęto, że wymuszenie ma równomierny rozkład przestrzenny, tj. $g(\alpha, \beta) = \text{const} = g$. Ze wzoru (2.5) otrzymujemy w tym przypadku

$$(3.1) \quad \gamma_{ij} = 16g/\pi^2 \text{ } ijm.$$

Przyjmijmy, że wymuszenie ciągle jest scharakteryzowane stacjonarnym procesem stochastycznym o funkcji korelacyjnej

$$(3.2) \quad K_F(\tau) = \sigma_F^2 \exp(-s|\tau|) \cos r\tau$$

i gęstości widmowej

$$(3.3) \quad S_F(\omega) = \frac{\sigma_F^2 s (\omega^2 + s^2 + r^2)}{\pi [(\omega^2 - s^2 - r^2)^2 + 4s^2 r^2]}.$$

Całkę (2.7) obliczamy, wykorzystując twierdzenie Cauchy'ego o residuach, według wzoru

$$(3.4) \quad k_{a_{ij}a_{kl}}(0) = \gamma_{ij} \gamma_{kl} \frac{\sigma_F^2 s}{\pi} \times \\ \times \sum_{n=1}^4 \frac{\pi i (\omega_n^2 + s^2 + r^2) [z(-i\omega)]^{-1}}{(\omega_n - ib) (\omega_n^2 - 2\zeta_{ij} i \omega_n - \Omega_{ij}^2) + (\omega_n - \zeta_{ij} i) (\omega_n^2 - 2ib\omega_n - d^2 - b^2)},$$

gdzie

$$z(-i\omega) = (\omega - d + ib) (\omega + d + ib) (\omega + \zeta_{kl} i + \alpha_{kl} \Omega_{kl}) (\omega + \zeta_{kl} i - \alpha_{kl} \Omega_{kl}).$$

$$(3.5) \quad \zeta_{ij} = \Omega_{ij} \sqrt{1 - \alpha_{ij}^2}, \\ d = \sqrt{\frac{s^2 + r^2 - \sqrt{(s^2 + r^2)^2 + 4s^2 r^2}}{2}}, \\ b = \sqrt{\frac{-s^2 - r^2 + \sqrt{(s^2 + r^2)^2 + 4s^2 r^2}}{2}},$$

ω_n są zaś pierwiastkami wielomianu $z(-i\omega)$.

Niestacjonarne stochastyczne wymuszenie impulsowe przyjmiemy w postaci procesu scharakteryzowanego następująco:

$$(3.6) \quad E [P^2(t)] \lambda(t) = A \exp(-ut).$$

Na podstawie wzoru (2.10) otrzymujemy

$$(3.7) \quad k_{a_{ij}a_{kl}}(t) = \frac{\gamma_{ij} \gamma_{kl}}{\zeta_{ij} \zeta_{kl}} \frac{A}{2} \exp(-ut) \left\{ \exp \left[\left(u - \frac{c}{m} \right) t \right] \times \right. \\ \times \left[\frac{\left(u - \frac{c}{m} \right) \cos(\zeta_{ij} - \zeta_{kl}) t + (\zeta_{ij} - \zeta_{kl}) \sin(\zeta_{ij} - \zeta_{kl}) t}{\left(u - \frac{c}{m} \right)^2 + (\zeta_{ij} - \zeta_{kl})^2} \right. \\ \left. \left. - \frac{\left(u - \frac{c}{m} \right) \cos(\zeta_{ij} + \zeta_{kl}) t + (\zeta_{ij} + \zeta_{kl}) \sin(\zeta_{ij} + \zeta_{kl}) t}{\left(u - \frac{c}{m} \right)^2 + (\zeta_{ij} + \zeta_{kl})^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{4\zeta_{ij} \zeta_{kl} \left(u - \frac{c}{m} \right)}{\left[\left(u - \frac{c}{m} \right)^2 + (\zeta_{ij} - \zeta_{kl})^2 \right] \left[\left(u - \frac{c}{m} \right)^2 + (\zeta_{ij} + \zeta_{kl})^2 \right]} \right\}$$

Do obliczeń przyjęto powłokę stalową o wymiarach $a = l = 2 m$, grubości $h = 0,01 m$. Liczbę tłumienia odpowiadającą postaci drgań $f_{1,1}$ przyjęto $\alpha_{1,1} = 0,03$.

Przedmiotem obliczeń jest wariancja ugięcia w środku rozpiętości powłoki $\sigma_w^2(l/2R, \beta_0/2) = \sigma_w^2$; uwzględnione zostały zatem tylko symetryczne postacie drgań. W obliczeniach uwzględniono pierwsze szesnaście postaci, tj. $f_{ij}(\alpha, \beta)$ dla $i = 1, 3, 5, 7, j = 1, 3, 5, 7$.

Częstości drgań własnych odpowiadające tym postaciom, dla powłok o czterech różnych wyniosłościach (scharakteryzowanych stosunkiem f/a), przedstawione są w tabelicy 1. Widoczne jest, że podstawową (najniższą)

Tablica 1. Częstości kołowe odpowiadające pierwszym szesnastu symetrycznym postaciom drgań własnych powłoki

		$\Omega_{ij} [s^{-1}]$			
i	j	$\frac{f}{a} = \frac{1}{5}$	$\frac{f}{a} = \frac{1}{10}$	$\frac{f}{a} = \frac{1}{20}$	$\frac{f}{a} = \frac{1}{50}$
1	1	1 945,5	1 015,5	514,25	219,67
1	3	530,81	420,64	392,75	385,21
1	5	842,88	952,54	985,9	995,79
1	7	1 585,8	1 824,0	1 894,1	1 914,7
3	1	3 267,3	1 826,3	987,97	533,15
3	3	2 043,5	1 216,1	854,1	720,04
3	5	1 565,1	1 368,4	1 320,0	1 307,2
3	7	1 998,1	2 154,5	2 206,7	2 222,6
5	1	3 569,4	2 147,0	1 392,0	1 073,2
5	3	3 002,7	1 955,0	1 498,8	1 338,6
5	5	2 614,2	2 126,8	1 972,8	1 927,6
5	7	2 848,3	2 830,0	2 835,9	2 839,0
7	1	3 973,6	2 724,9	2 158,8	1 960,5
7	3	3 762,1	2 775,3	2 380,1	2 251,9
7	5	3 653,7	3 091,8	2 905,8	2 850,6
7	7	3 938,7	3 802,8	3 770,4	3 762,2

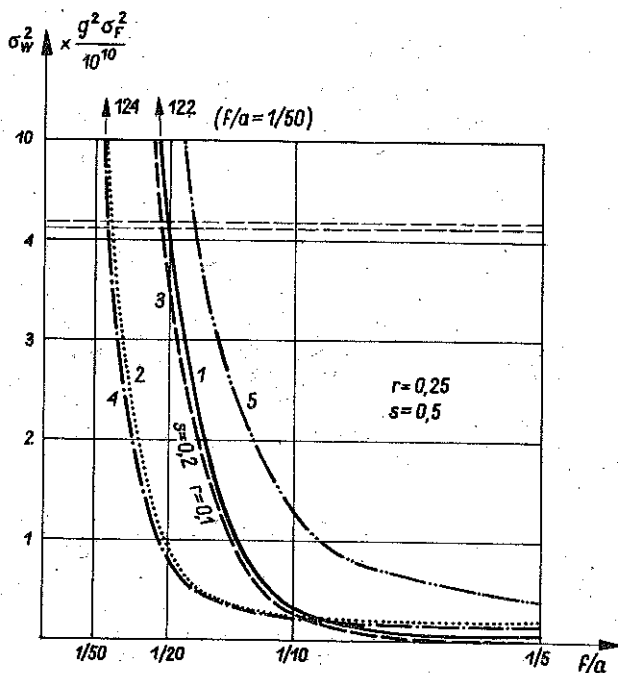
częstością jest na ogół $\Omega_{1,3}$ (z wyjątkiem powłoki o wyniosłości $f/a = 1/50$) (por. ONIASZWIL, [13]). Drugą w koleności rosnącej częstością jest dla powłoki o wyniosłości $f/a = 1/5$ i $f/a = 1/10$ częstość $\Omega_{1,5}$. Częstość drgań własnych $\Omega_{1,1}$ odpowiadająca postaci $f_{1,1}(\alpha, \beta) = \sin \pi(R\alpha/l) \sin \pi\beta/\beta_0$ (pierwszej wynikającej z rozwinięcia w szereg trygonometryczny) jest w przypadku powłoki o wyniosłości $f/a = 1/5$ piątą częstością, w przypadku $f/a = 1/10$ — trzecią częstością, a w przypadku $f/a = 1/20$ — drugą częstością.

Jedynie w przypadku powłoki o najmniejszej analizowanej wyniosłości ($f/a = 1/50$) $\Omega_{1,1}$ jest częstością podstawową. Powłoka o tak małej wyniosłości pracuje bowiem prawie tak, jak płyta. Potwierdza to układ dalszych częstości drgań własnych; częstości Ω_{ij} są na ogół bardzo bliskie częstościom Ω_{ji} (w przypadku płyty kwadratowej są to częstości podwójne), częstości $\Omega_{1,7}, \Omega_{5,5}, \Omega_{7,1}$ są również bardzo skupione (częstość potrójna w przypadku płyty kwadratowej).

Cechą charakterystyczną widma częstości drgań własnych powłoki (uporządkowanego w kolejności rosnącej) jest to, że poszczególnym częstościom odpowiadają różne, zależnie od wyniosłości, postacie drgań. Widoczne jest także znaczne zagęszczenie widma.

Udział poszczególnych postaci drgań w kształtowaniu odpowiedzi (ugięcia) powłoki zależy od wielkości częstości odpowiadających tym postaciom, ale także od struktury geometrycznej wymuszenia, tj. od współczynnika γ_{ij} . W rozważanym przypadku wymuszenia równomiernie rozłożonego, jak wynika ze wzoru (3.1), udział postaci drgań (tzn. ich wariacji oraz korelacji wzajemnych) w kształtowaniu wariacji odpowiedzi powłoki maleje ze wzrostem wskaźników i, j (i, j -tej postaci).

Wyniki obliczeń wariacji ugięcia w środku powłoki przedstawione są na rysunkach. Rys. 2 dotyczy stanu ustalonego drgań przy wymuszeniu o charakterze stacjonarnego, ciągłego procesu stochastycznego o przykładowych wartościach parametrów r, s . Rysunek ten obrazuje kształtowanie się, przy różnych wyniosłościach powłoki, wariacji ugięcia w zależności od uwzględnionej liczby postaci drgań własnych oraz uwzględnienia korelacji wzajemnych. Widoczne jest, że rozwiązanie uzyskane tylko dla postaci $f_{1,1}$ (czyli $\sigma_{4,1,1}^2$) — oznaczone cyfrą 1 — jest obciążone dużym błędem w stosunku do rozwiązania pełnego (w ramach przyjętej bazy aproksymacyjnej) oznaczonego cyfrą 4. Zależnie od wyniosłości powłoki jest to błąd nadmiaru lub niedomiaru. Uwzględniając tylko wariacje σ_{4ij}^2 (elementy diagonalne macierzy



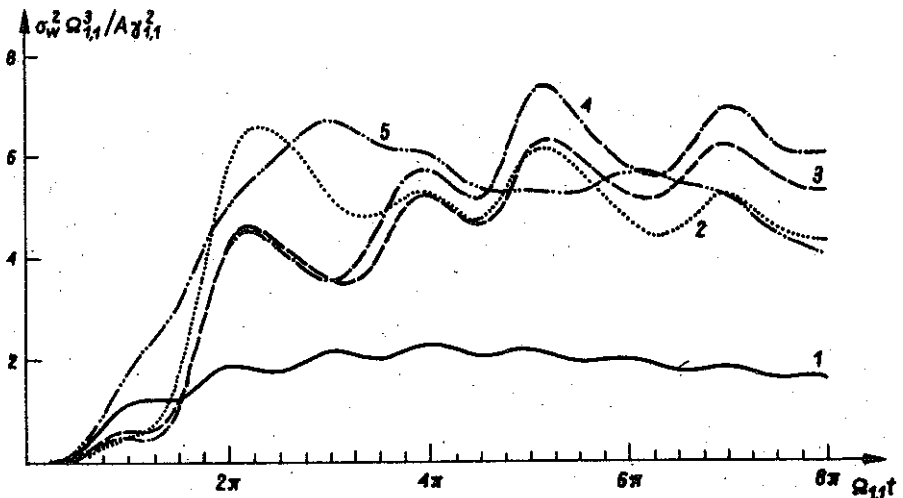
Rys. 2

korelacyjnej) otrzymuje się rozwiązanie 5 ze znacznym błędem nadmiaru, niezależnie od wyniosłości powłoki. Rozwiązanie bardzo bliskie pełnemu 2 otrzymuje się w bazie $f_{1,1}$ i $f_{1,3}$ (tzn. uwzględniając wariancje $\sigma_{q_{1,1}}^2$, $\sigma_{q_{1,3}}^2$ oraz korelację wzajemną $k_{q_{1,1}q_{1,3}}$), czyli uwzględniając dodatkowo postać, której odpowiada częstość podstawowa $\Omega_{1,3}$. Bliskość rozwiązań 1, 2, 4 i 5 w przypadku $f/a = 1/50$ jest potwierdzeniem płytowego charakteru pracy powłoki o tej wyniosłości. Cyfrą 3 oznaczone jest rozwiązanie $\sigma_{q_{1,1}}^2$ uzyskane dla innej pary parametrów r, s ; widoczne jest, że taka zmiana parametrów korelacji nie powoduje istotnej zmiany rozwiązania.

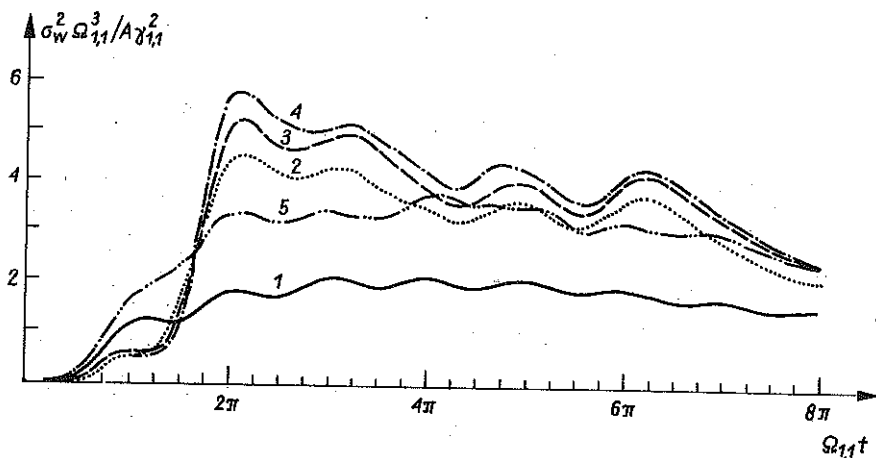
Na rysunkach 3, 4, 5 i 6 przedstawione są przebiegi w czasie wariancji ugięcia powłoki w przejściowym stanie drgań pod działaniem niestacjonarnego szumu śrutowego. Wariancja ugięcia jest tu w formie bezwymiarowej $\sigma_w^2 \Omega_{1,1}^3 / A \gamma_{1,1}^2$. Parametr u przyjęto równy $4\alpha_{1,1} \Omega_{1,1}$, a więc dla rozważanych powłok o różnych wyniosłościach parametr u ma różne wartości. Cyfrą 1 jest oznaczone rozwiązanie dla postaci $f_{1,1}$ (czyli $\sigma_{q_{1,1}}^2$), cyfrą 2 — rozwiązanie w bazie $f_{1,1}, f_{1,3}$, cyfrą 3 — rozwiązanie w bazie $f_{1,1}, f_{1,3}, f_{1,5}$, cyfrą 4 — pełne rozwiązanie, a cyfrą 5 — rozwiązanie uzyskane na podstawie samych wariancji $\sigma_{q_{1,p}}^2$, czyli z pominięciem korelacji wzajemnych.

W przypadku powłoki o największej analizowanej wyniosłości ($f/a = 1/5$) (rys. 3) rozwiązanie uzyskane tylko dla postaci $f_{1,1}$ jest obarczone bardzo dużym błędem. Poszerzenie bazy aproksymacyjnej o $f_{1,3}$ a następnie o $f_{1,5}$, czyli o postacie, którym odpowiadają częstości znacznie niższe od $\Omega_{1,1}$, wydatnie poprawia rozwiązanie. Pominięcie korelacji wzajemnych powoduje duży błąd w rozwiązaniu, przy czym zależnie od przedziału czasu jest to błąd nadmiaru lub niedomiaru.

Podobnie zjawisko przebiega w przypadku powłoki o wyniosłości $f/a = 1/10$ (rys. 4) z tym, zastrzeżeniem że poszerzanie bazy aproksymacyjnej powoduje



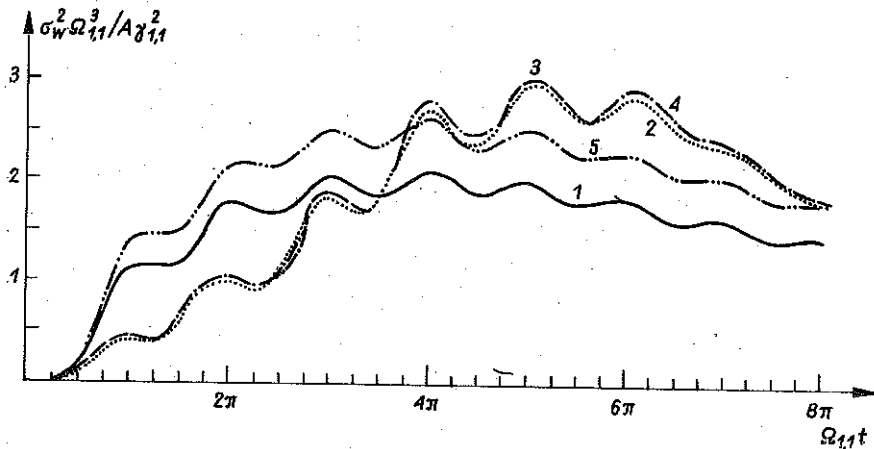
Rys. 3 $f/a = 1/5$

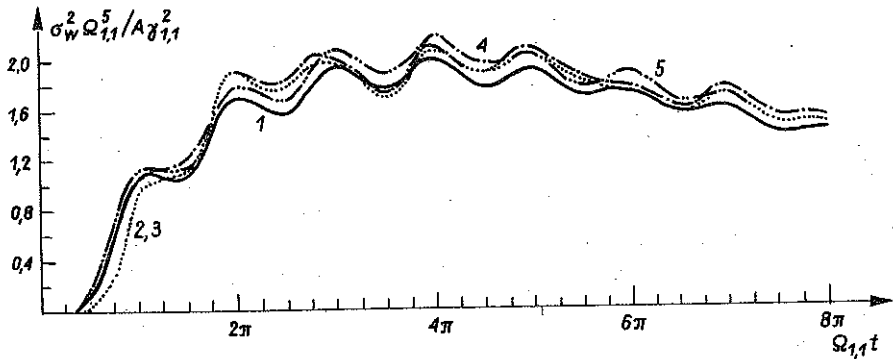
Rys. 4 $f/a = 1/10$

tu mniejsze niż poprzednio zmiany w rozwiązaniu. W tym przypadku bowiem częstotliwości $\Omega_{1,3}$ i $\Omega_{1,5}$ są również niższe od $\Omega_{1,1}$, w tym $\Omega_{1,5}$ jest bliska $\Omega_{1,1}$. Uwzględnienie tylko wariancji $\sigma_{q_{ij}}^2$ daje tu wyniki w zasadzie z niedomiarem.

W przypadku powłoki o wyniosłości $f/a = 1/20$ (rys. 5) rozwiązanie w zakresie postaci $f_{1,1}$ jest ciągle jeszcze bardzo niedokładne, ale poszerzenie bazy aproksymacyjnej o postać $f_{1,3}$ daje już rozwiązanie bardzo bliskie pełnemu. Tutaj jak widać częstotliwości $\Omega_{1,1}$ i $\Omega_{1,3}$ są dwiema początkowymi częstotliwościami widma. Pominięcie korelacji wzajemnych związane jest tu nadal z dużym błędem: w początkowym przedziale czasu z nadmiarem, następnie z niedomiarem.

Odmienne przebiega zjawisko kształtowania wariancji ugięcia powłoki o wyniosłości $f/a = 1/50$ (rys. 6). Poszerzenie bazy aproksymacyjnej przynosi tu niewielki efekt. Rozwiązanie pełne niewiele różni się od $\sigma_{q_{1,1}}^2$. Wpływ

Rys. 5 $f/a = 20$

Rys. 6 $f/a = 1/50$

wariancji następnych postaci drgań oraz korelacji wzajemnych nie jest w tym przypadku istotny: ponownie uwidacznia się płytowy charakter pracy powłoki o bardzo małej wyniosłości.

4. PODSUMOWANIE

Widmo częstości drgań własnych (uporządkowane rosnąco) małowyniosłej powłoki walcowej charakteryzuje się tym, że poszczególnym częstościom odpowiadają różne, zależnie od wyniosłości powłoki, postacie drgań. Częstością podstawową w przypadku drgań symetrycznych, jest na ogół $\Omega_{1,3}$, której odpowiada postać drgań własnych $f_{1,3}(\alpha, \beta) = \sin \frac{\pi R}{l} \alpha \sin 3\pi \frac{\beta}{\beta_0}$ (stwierdzenie to jest prawdziwe na pewno w przedziale $1/20 \leq f/a \leq 1/5$). Widmo drgań własnych jest znacznie zagęszczone, a ze zmniejszaniem się wyniosłości powłoki jego struktura zmierza do płytowej.

Udział poszczególnych postaci drgań własnych w kształtowaniu średniokwadratowej odpowiedzi układu zależy od wielkości częstości drgań odpowiadających tym postaciom oraz od struktury geometrycznej wymuszenia (od charakteru funkcji $g(\alpha, \beta)$; por. wzór (2.5)). W rozważanym przypadku wymuszenia równomiernie rozłożonego ugięcie środka powłoki jest kształtowane głównie przez postacie drgań $f_{1,1}$ i $f_{1,3}$. W przypadku innego przestrzennego rozkładu wymuszenia ugięcie to może być kształtowane przez inne postacie drgań (w szczególnym przypadku, gdy funkcja $g(\alpha, \beta)$ jest równa dokładnie jednej z funkcji własnych, wówczas ze względu na ortogonalność funkcji własnych wzbudzana jest tylko postać drgań określona przez tę funkcję). Udział korelacji wzajemnych między postaciami okazuje się bardzo wysoki, co wynika z zagęszczenia widma drgań własnych. Szczególnie duży udział ma korelacja między postaciami $f_{1,1}$ i $f_{1,3}$.

Ścisłej mówiąc udział postaci drgań własnych w kształtowaniu średniokwadratowej odpowiedzi ustalonej układu na wymuszenie stacjonarne zależy

od relacji między widmem drgań własnych a widmem wymuszenia. W rozważanym przypadku procesu stacjonarnego o funkcji korelacyjnej określonej wzorem (3.2) przy parametrach o przyjętych w obliczeniach wartościach zasadnicza część mocy wymuszenia odpowiada przedziałowi częstości poniżej podstawowej częstości drgań własnych («ostrze» funkcji gęstości widmowej jest w otoczeniu $\omega = r + s$). Dlatego w tym przypadku udział postaci drgań własnych maleje ze wzrostem częstości drgań.

Obliczenia wykazały, że udział następnych czternastu (trzynastu) postaci drgań w stosunku do pierwszych dwóch (trzech) jest bardzo mały; świadczy o tym różnica między krzywymi 2 i 4 na rys. 2 (odpowiednio między krzywymi 3 i 4 na rys. 3—6). Udział wysokich postaci drgań w ramach przyjętej wstępnie szesnastoelementowej bazy okazuje się tu pomijalnie mały. Można zatem stwierdzić, że szereg funkcji własnych jest w tym przypadku szybkozbieżny oraz rozwiązanie uzyskane dla pierwszych szesnastu postaci drgań uznać za wystarczająco dokładne dla celów technicznych.

Problem udziału postaci drgań oraz ich korelacji wzajemnych w kształtowaniu średniokwadratowej odpowiedzi powłoki został przeanalizowany dla wybranego punktu środkowego powłoki. W innych punktach powłoki udział ten może się kształtować inaczej (jest to widoczne we wzorach (2.6) i (2.11)), a w szczególności pominięcie korelacji wzajemnych w obliczaniu wariancji ustalonej odpowiedzi powłoki walcowej na wymuszenie stacjonarne może powodować, zależnie od punktu powłoki błąd nadmiaru lub niedomiaru (por. ELISHAKOFF [10]).

W przypadku wymuszeń niestacjonarnych omawiany udział jest różny w różnych przedziałach czasu, może ponadto zależeć od charakteru niestacjonarności wymuszenia.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. В. А. Пальмов, *Тонкие оболочки под действием широкополосной случайной нагрузки*, Прикл. Математика и Механика, **29**, 4, 1965.
2. В. А. Пальмов, В. А. Пупырев, *Вынужденные колебания цилиндрической оболочки с акустической средой при широкополосной и высокочастотной случайной нагрузке*, Труды Ленинградского Политехи. Инст. 279, 1967.
3. В. SKALMERSKI, E. SZOGALA, *O pewnym problemie niestacjonarnych drgań powłok pod wpływem obciążeń przypadkowych*, Rozpr. Inż., **17**, 2, 1969.
4. A. TYLIKOWSKI, *Nonlinear random vibration of the cylindrical shell*, Zag. Drgań Nielin., **12**, 1971.
5. I. ELISHAKOFF, A. TH. VAN ZANTEN, S. H. GRANDALL, *Wide-band random axisymmetric vibration of cylindrical shells*, J. Appl. Mech., ASME, **46**, June 1979.
6. W. W. BOLOTIN, *Metody statystyczne w mechanice budowli*, Arkady, Warszawa 1968.
7. А. А. ПЕТРОВ, С. В. БАЗИЛЕВСКИЙ, *Влияние взаимной корреляции между обобщенными координатами при случайных колебаниях линейных систем*, Строит. Мех. и Расч. Соор. **4**, 1979.
8. C. A. MERCER, *Response of a multi-supported beam to a random pressure field*, J. Sound and Vibr., **12**, 2, 1965.

9. М. Ф. ДИМЕНТБЕРГ, *Вынужденные колебания пластины при нагрузке представляющей собой пространственно-временный случайный процесс*, Инж. Журнал, 2, 1961.
10. I. ELISHAKOFF, *On the role of cross-correlations in the random vibrations of shells*, J. Sound and Vibr., 50, 2, 1977.
11. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.
12. R. IWANKIEWICZ, *Drgania belki przy stochastycznym wymuszeniu impulsowym*, Rozpr. Inż., 30, 3-4, 1982.
13. О. Д. ОНЯШВИЛИ, *Некоторые динамические задачи теории оболочек*. Изд. АН СССР, 1957.

РЕЗЮМЕ

АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ
ОБОЛОЧКИ

Рассматриваются установившиеся колебания пологой цилиндрической оболочки при непрерывном, стационарном стохастическом вынуждении, а также неустановившиеся колебания при вынуждении нестационарным дробовым шумом. С целью решения (распряжения) классических уравнений (Власова) пологой оболочки применен метод собственных функций. Выражение на вариацию реакции оболочки на стационарные и нестационарные вынуждения получено, применяя соответственно спектральный метод и импульсные функции перехода. В частности, для разной степени пологости оболочки исследовано участие отдельных типов собственных колебаний и их взаимных корреляций в формировании varianций реакции системы. Результаты представлены графически.

SUMMARY

ANALYSIS OF RANDOM RESPONSE
OF A SHALLOW CYLINDRICAL SHELL

A steady-state response of a shallow cylindrical shell to continuous, stationary stochastic excitation and a transient response to non-stationary shot noise are considered. Normal-mode approach is used to decouple classical shallow shell (Vlasov) equations. The expression for variance of the shell response to stationary and non-stationary excitation is evaluated using spectral method and impulse response functions, respectively. In particular, the contribution of subsequent normal modes and their cross-correlations in variance of the total structural response are analysed for shells with various height-to-span ratio. The results are shown graphically.

POLITECHNIKA WROCLAWSKA
INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ

Praca została złożona w Redakcji dnia 5 sierpnia 1982 r.