

POWŁOKA WALCOWA ZAMKNIĘTA, OBCIĄŻONA SIŁAMI SKUPIONYMI NORMALNYMI DO PRZEGUBOWO ZAMOCOWANEGO BRZEGU I STYCZNYMI DO POWIERZCHNI ŚRODKOWEJ

TADEUSZ K A C P E R S K I (WARSZAWA)

Zostały przedstawione rozważania na temat powłoki walcowej zamkniętej, obciążonej siłami skupionymi normalnymi do przegubowo zamocowanego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej.

Przedstawiono dwa rozwiązania tego zadania. W pierwszym wyprowadzono wzory oparte na równaniach Donnella-Własowa. W drugim wyprowadzono wzory na podstawie równań udoskonalonych przez Łukasiewicza. Wykonano obliczenia numeryczne promieniowych ugięć powłoki obciążonej kilkoma różnymi liczbami jednakowych sił rozstawianych na obwodzie w jednakowych podziałkach. Stwierdzono, że odległość maksymalnych ugięć od obciążonego brzegu zależy od liczby wprowadzonych sił. Ze wzrostem liczby sił odległość ta zmniejsza się.

1. WSTĘP

W pracy [1] zostały przedstawione rozwiązania dla powłoki walcowej zamkniętej obciążonej siłami skupionymi normalnymi do jej swobodnego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej. Otrzymane dla tego przypadku wyniki teoretyczne, ze wzorów opartych na równaniach Donnella-Własowa, porównano z wynikami doświadczeń, polegających na pomiarach ugięć powłoki oraz na tensometrycznym pomiarze naprężeń. Stwierdzono, że uzyskany stopień zgodności tych wyników jest dostateczny dla zastosowań technicznych.

Rozwiązanie sformułowanego w tytule zadania można również łatwo uzyskać opierając się na technicznej teorii powłok opracowanej przez DONNELLA [2], WŁASOWA [3] lub też na teorii udoskonalonej przez ŁUKASIEWICZA i przedstawionej w pracy [4]. Zadanie to nie zostało jeszcze szczegółowo opisane w literaturze. W pracy [4] są analizowane podobne problemy, jednakże nie zostały podane pełne wyniki oraz wzory dla tego ważnego technicznie przypadku.

W niniejszej pracy zostaną wyprowadzone wzory dla powłoki walcowej zamkniętej obciążonej siłami skupionymi normalnymi do przegubowo zamocowanego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej. Wzory te będą wyprowadzone na podstawie równań Donnella-Własowa i następnie na podstawie równań udoskonalonych przedstawionych w pracy [4]. Zostaną przeprowadzone obliczenia numeryczne promieniowych ugięć powłoki. Znajomość tych ugięć jest istotna dla określania zmian luzów pomiędzy współpracującymi powierzchniami elementów maszyn typu cienkościenna tuleja-tłok. Deformacje powłoki, polegające na obwodowych

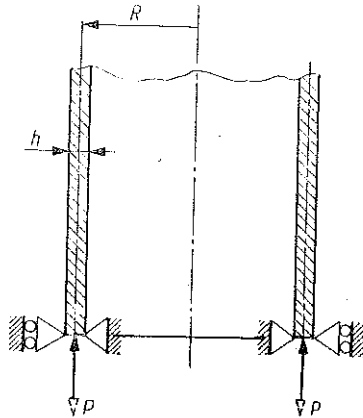
pofalowaniach i zmiennych wzdłuż tworzącej promieniowych ugięciach, mogą mieć istotny wpływ na współpracę tych elementów.

Wykorzystanie równań Donnella-Własowa do wyprowadzenia wzorów dla badanego przypadku obciążenia wydaje się poprawne dla zastosowań praktycznych.

Przyjęcie równań udoskonalonych przez Łukasiewicza jako podstawy do wyprowadzenia wzorów stwarza nieco więcej trudności niż wykorzystanie równań Donnella-Własowa. Otrzymuje się wtedy bardziej złożone równanie charakterystyczne i poszukiwanie jego pierwiastków wymaga więcej pracy. W efekcie uzyskuje się dokładniejsze wzory, również dobrze nadające się do obliczeń numerycznych.

2. ROZWIĄZANIE I

Wprowadzenie wzorów na podstawie równań Donnella-Własowa dla powłoki zamocowanej i obciążonej jak to pokazano na rys. 1 i 2 sprowadza się do rozwiązania dwóch równań różniczkowych cząstkowych czwartego rzędu



Rys. 1.

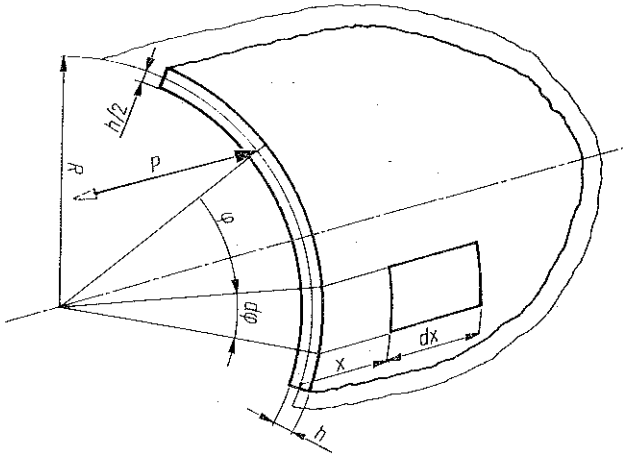
$$(2.1) \quad \begin{aligned} D\Delta\Delta w - \Delta_k \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta\Delta\Phi + \Delta_k w &= 0, \end{aligned}$$

gdzie $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ oznacza sztywność powłoki; Δ jest operatorem Laplace'a, który dla powłoki walcowej ma postać

$$(2.2) \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

Δ_k jest operatorem mającym następującą budowę:

$$(2.3) \quad \Delta_k = \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$



Rys. 2.

Wprowadzono przy tym następujące oznaczenia:

- w promieniowe przemieszczenie powłoki,
- Φ funkcja naprężeń,
- E moduł sprężystości wzdłużnej,
- h grubość powłoki,
- ν współczynnik Poissona,
- R promień powierzchni środkowej powłoki,
- x odległość rozpatrywanego punktu powłoki od jej przegubowo zamocowanego brzegu.

Promieniowe przemieszczenie powłoki w oraz funkcja naprężeń φ będą poszukiwane w postaci:

$$(2.4) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(x) \cos n\varphi,$$

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) \cos n\varphi.$$

Ze wzorów (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) oraz korzystając z podstawienia

$$(2.5) \quad w_n = e^{ik\frac{x}{R}}, \quad \Phi_n = \lambda e^{ik\frac{x}{R}}$$

otrzymuje się następujące równania:

$$(2.6) \quad \frac{k^4}{R^4} + 2 \frac{n^2}{R^4} k^2 + \frac{n^4}{R^4} + \frac{1}{DR^3} \lambda k^2 = 0,$$

$$\lambda \left(\frac{k^4}{R^4} + 2 \frac{n^2}{R^4} k^2 + \frac{n^4}{R^4} \right) - \frac{Eh}{R^3} k^2 = 0.$$

Z równań (2.6) uzyskuje się równanie charakterystyczne w następującej postaci:

$$(2.7) \quad (k^2 + n^2)^4 + 4\kappa^4 k^4 = 0,$$

gdzie

$$(2.8) \quad \kappa = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}}$$

oraz zależność pomiędzy funkcją naprężeń i ugięciem

$$(2.9) \quad \lambda_n = \frac{\Phi_n}{w_n} = \mp 2i \kappa^2 \frac{D}{R},$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$.

Rozwiązując równanie charakterystyczne (2.7) ustalono, że we wzorze (2.9) znak plus odnosi się do współczynników parzystych, a znak minus do nieparzystych.

Po wyznaczeniu z równania (2.7) ośmiu pierwiastków k_1, \dots, k_8 i wykorzystaniu wzoru

$$(2.10) \quad w_n = A_1 e^{ik_1 \frac{x}{R}} + A_2 e^{ik_2 \frac{x}{R}} + \dots + A_8 e^{ik_8 \frac{x}{R}}$$

oraz po przejściu do funkcji trygonometrycznych i po pominięciu wyrazów z indeksami 5, 6, 7, 8, a następnie po niezbędnych przekształceniach otrzymuje się ugięcie i funkcję naprężeń w postaci

$$(2.11) \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-b \frac{x}{R}} \left(C_1 \cos a \frac{x}{R} + C_2 \sin a \frac{x}{R} \right) + e^{-d \frac{x}{R}} \left(C_3 \cos c \frac{x}{R} + C_4 \sin c \frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi,$$

$$(2.12) \quad \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} 2\kappa^2 \frac{D}{R} \left[-e^{-b \frac{x}{R}} \left(C_1 \sin a \frac{x}{R} - C_2 \cos a \frac{x}{R} \right) + e^{-d \frac{x}{R}} \left(C_3 \sin c \frac{x}{R} - C_4 \cos c \frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi,$$

gdzie

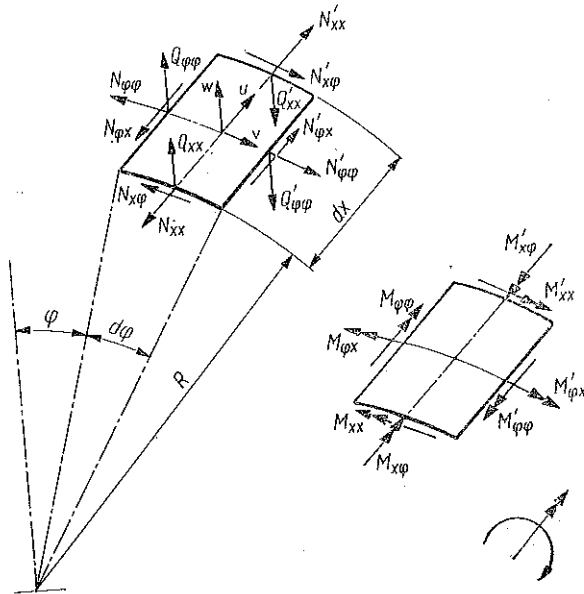
$$(2.13) \quad \begin{aligned} a &= \frac{\kappa}{2} \left(1 - \sqrt{\sqrt{1+\delta_n^2} - \delta_n} \right), \\ b &= \frac{\kappa}{2} \left(-1 + \sqrt{\sqrt{1+\delta_n^2} + \delta_n} \right), \\ c &= \frac{\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{\sqrt{1+\delta_n^2} - \delta_n} \right), \\ d &= \frac{\kappa}{2} \left(1 + \sqrt{\sqrt{1+\delta_n^2} + \delta_n} \right), \\ \delta_n &= \frac{2n^2}{\kappa^2} \quad \text{dla } n \geq 1. \end{aligned}$$

Znajomość ugięć pozwala na określenie momentów zginających i sił tnących. Natomiast siły błonowe uzyskuje się na podstawie funkcji naprężeń.

Zaznaczone na elementarnym wycinku powłoki walcowej siły przekrojowe i momenty przekrojowe można przedstawić w postaci następujących związków fizycznych:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{R^2} w \right), \\
 M_{\varphi\varphi} &= -D \left(\frac{\partial^2 w}{R^2 \partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{w}{R^2} \right), \\
 M_{x\varphi} &= -(1-\nu) \frac{D}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}, \\
 Q_{xx} &= -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \varphi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\
 Q_{\varphi\varphi} &= -D \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \\
 N_{xx} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad N_{\varphi\varphi} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad N_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Występujące we wzorach (2.11) i (2.12) stałe C_1, C_2, C_3 i C_4 zostaną wyznaczone z warunków brzegowych.



Rys. 3.

W rozważanym przypadku dla $x=0$ warunki te są następujące:

$$N_{xx} = P\delta(\varphi), \quad M_{xx} = 0, \quad N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} = 0, \quad w = 0,
 \tag{2.15}$$

gdzie $\delta(\varphi)$ jest funkcją Diraca.

Wtedy z równań (2.14) otrzymamy

$$(2.16) \quad \begin{aligned} N_{xx} &= - \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right]_{x=0} = \pm P \delta(\varphi), \\ M_{xx} &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{\nu}{R^2} w \right]_{x=0} = 0, \\ N_{x\varphi} + \frac{M_{x\varphi}}{R} &= \left[\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi} - (1-\nu) \frac{D}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right]_{x=0} = 0, \\ [w]_{x=0} &= 0. \end{aligned}$$

Przy P wyrażonym w funkcji Diraca znak plus odnosi się do sił rozciągających, natomiast znak minus do sił ściskających. Po wstawieniu do równań (2.16) wyrażen na ugięcia (2.11) i funkcji naprężeń (2.12) oraz po wykonaniu operacji różniczkowania i po przekształceniach otrzymuje się równania, z których można wyznaczyć stałe C_1, C_2, C_3, C_4 .

Równania te można napisać następująco:

$$(2.17) \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

gdzie

$$(2.18) \quad \begin{aligned} a_{11} &= 0, & a_{12} &= 1, & a_{13} &= 0, \\ a_{21} &= b^2 - a^2 - \nu(n^2 - 1), & a_{22} &= -2ab, & a_{23} &= d^2 - c^2 - \nu(n^2 - 1), \\ a_{31} &= 2\kappa^2 a - (1-\nu)b, & a_{32} &= 2\kappa^2 b + (1-\nu)a, & a_{33} &= -2\kappa^2 c - (1-\nu)d, \\ a_{41} &= 1, & a_{42} &= 0, & a_{43} &= 1, \\ & & & & a_{14} &= -1, \\ & & & & a_{24} &= -2cd, \\ & & & & a_{34} &= -2\kappa^2 d + (1-\nu)c, \\ & & & & a_{44} &= 0, \end{aligned}$$

$$a_{10} = \frac{mPR^2}{2\pi n^2 \kappa^2 D} \quad \text{dla} \quad n = mk, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Pierwiastki a, b, c i d są określone za pomocą wzorów (2.13), m oznacza liczbę sił wprowadzonych w brzeg powłoki. We wzorach (2.11) i (2.12) uwzględnia się odpowiednie wyrazy w zależności od liczby m obciążonych punktów. Należy brać pod uwagę tylko wyrazy szeregu, w których wystąpią $m, 2m, 3m, 4m \dots$

Po wstawieniu (2.11) i (2.12) do (2.14) oraz po przeprowadzeniu różniczkowania, otrzymuje się następujące wzory na momenty i siły odniesione do jednostkowej długości przekroju powłoki dla wyższych harmonicznych ($n \geq 1$). Promieniowe przemieszczenie powłoki uzyskuje się ze wzoru (2.11):

$$\begin{aligned}
 M_{xx} = & -\frac{D}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[(b^2 - a^2 - m^2 + \nu) \cos a \frac{x}{R} + 2ab \sin a \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left[(b^2 - a^2 - m^2 + \nu) \sin a \frac{x}{R} - 2ab \cos a \frac{x}{R} \right] \right\} + \\
 & + e^{-d \frac{x}{R}} \left\{ C_3 \left[(d^2 - c^2 - m^2 + \nu) \cos c \frac{x}{R} + 2cd \sin c \frac{x}{R} \right] + \right. \\
 & \left. + C_4 \left[(d^2 - c^2 - m^2 + \nu) \sin c \frac{x}{R} - 2cd \cos c \frac{x}{R} \right] \right\} \Bigg\} \cos n\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi\varphi} = & -\frac{D}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[[\nu(b^2 - a^2) - n^2 + 1] \cos a \frac{x}{R} + 2\nu ab \sin a \frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left[[\nu(b^2 - a^2) - n^2 + 1] \sin a \frac{x}{R} - 2\nu ab \cos a \frac{x}{R} \right] \right\} + \\
 & + e^{-d \frac{x}{R}} \left\{ C_3 \left[[\nu(d^2 - c^2) - n^2 + 1] \cos c \frac{x}{R} + 2\nu cd \sin c \frac{x}{R} \right] + \right. \\
 & \left. + C_4 \left[[\nu(d^2 - c^2) - n^2 + 1] \sin c \frac{x}{R} - 2\nu cd \cos c \frac{x}{R} \right] \right\} \Bigg\} \cos n\varphi,
 \end{aligned}$$

(2.19)

$$\begin{aligned}
 M_{x\varphi} = & -(1-\nu) \frac{D}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left(b \cos a \frac{x}{R} + a \sin a \frac{x}{R} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left(b \sin a \frac{x}{R} - a \cos a \frac{x}{R} \right) \right] + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left(d \cos c \frac{x}{R} + c \sin c \frac{x}{R} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left(d \sin c \frac{x}{R} - c \cos c \frac{x}{R} \right) \right] \right\} \sin n\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} = & -\frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-b \frac{x}{R}} \left[C_1 \left[b(3a^2 - b^2 + n^2 - 1) \cos a \frac{x}{R} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + a(-3b^2 + a^2 + n^2 - 1) \sin a \frac{x}{R} \right] + C_2 \left[b(3a^2 - b^2 + n^2 - 1) \sin a \frac{x}{R} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - a(-3b^2 + a^2 + n^2 - 1) \cos a \frac{x}{R} \right] \right] + e^{-d \frac{x}{R}} \left[C_3 \left[d(3c^2 - d^2 + n^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 1) \cos c \frac{x}{R} + c(-3d^2 + c^2 + n^2 - 1) \sin c \frac{x}{R} \right] + C_4 \left[d(3c^2 - d^2 + n^2 - \right. \right. \\
 & \left. \left. - 1) \sin c \frac{x}{R} - c(-3d^2 + c^2 + n^2 - 1) \cos c \frac{x}{R} \right] \right] \Bigg\} \cos n\varphi,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.19) \quad Q_{\varphi\varphi} = & -\frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ e^{-b\frac{x}{R}} \left[C_1 \left[(a^2 - b^2 + n^2 - 1) \cos a\frac{x}{R} - 2ab \sin a\frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_2 \left[(a^2 - b^2 + n^2 - 1) \sin a\frac{x}{R} + 2ab \cos a\frac{x}{R} \right] \right] + \right. \\
 & \left. + e^{-d\frac{x}{R}} \left[C_3 \left[(c^2 - d^2 + n^2 - 1) \cos c\frac{x}{R} - 2cd \sin c\frac{x}{R} \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + C_4 \left[(c^2 - d^2 + n^2 - 1) \sin c\frac{x}{R} + 2cd \cos c\frac{x}{R} \right] \right] \right\} \sin n\varphi, \\
 N_{xx} = & 2\kappa^2 \frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left[-e^{-b\frac{x}{R}} \left(C_1 \sin a\frac{x}{R} - C_2 \cos a\frac{x}{R} \right) + \right. \\
 & \left. + e^{-d\frac{x}{R}} \left(C_3 \sin c\frac{x}{R} - C_4 \cos c\frac{x}{R} \right) \right] \cos n\varphi, \\
 N_{\varphi\varphi} = & 2\kappa \frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-b\frac{x}{R}} \left[C_1 \left[(b^2 - a^2) \sin a\frac{x}{R} - 2ab \cos a\frac{x}{R} \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - C_2 \left[(b^2 - a^2) \cos a\frac{x}{R} + 2ab \sin a\frac{x}{R} \right] \right] - \right. \\
 & \left. - e^{-d\frac{x}{R}} \left[C_3 \left[(d^2 - c^2) \sin c\frac{x}{R} - 2cd \cos c\frac{x}{R} \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - C_4 \left[(d^2 - c^2) \cos c\frac{x}{R} + 2cd \sin c\frac{x}{R} \right] \right] \right\} \cos n\varphi, \\
 N_{x\varphi} = & 2\kappa^2 \frac{D}{R^3} \sum_{n=1}^{\infty} n \left\{ -e^{-b\frac{x}{R}} \left[C_1 \left(b \sin a\frac{x}{R} - a \cos a\frac{x}{R} \right) - C_2 \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(b \cos a\frac{x}{R} + a \sin a\frac{x}{R} \right) \right] + e^{-d\frac{x}{R}} \left[C_3 \left(d \sin c\frac{x}{R} - c \cos c\frac{x}{R} \right) - C_4 \times \right. \right. \\
 & \left. \left. \times \left(d \cos c\frac{x}{R} + c \sin c\frac{x}{R} \right) \right] \right\} \sin n\varphi.
 \end{aligned}$$

Wzory (2.19) nie są całkowitym rozwiązaniem. Należy jeszcze uwzględnić zerowy wyraz rozwinięcia w szereg Fouriera, tzn. zerową składową odpowiadającą obciążeniu $p_0 = mP/2\pi R$. Dla $n=0$, to znaczy gdy $w = w_0(x)$, co odpowiada obciążeniu zerową składową $p_0 = mP/2\pi R$, układ równań (2.1) przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad \frac{d}{dx^2} \left(\frac{RD}{Eh} \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{1}{R} w_0 \right) &= -\frac{1}{R} \left(\frac{d^4 g(\varphi)}{d\varphi^4} + x \frac{d^4 f(\varphi)}{d\varphi^4} \right), \\
 \Phi &= RD \frac{d^2 w}{dx^2} + x f(\varphi) + g(\varphi),
 \end{aligned}$$

gdzie stałe całkowania f, g zostaną wyznaczone z warunków brzegowych.

Uwzględniając

$$(2.21) \quad N_{xx} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -\frac{1}{R^2} \left(x \frac{d^2 f}{d\varphi^2} + \frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right),$$

$$N_{x\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \varphi} = \frac{1}{R} \frac{df}{d\varphi},$$

na podstawie warunków brzegowych (2.16)_{1,3} otrzymuje się

$$(2.22) \quad \frac{d^2 g}{d\varphi^2} = -p_0 R^2, \quad \frac{df}{d\varphi} = 0,$$

stąd

$$(2.23) \quad g = -\frac{1}{2} p_0 R^2 \varphi^2 + a_1 \varphi + a_2, \quad f = a_3.$$

Po podstawieniu (2.23) do (2.20a), równanie to przyjmuje postać

$$(2.24) \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(D \frac{d^4 w_0}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w_0 \right) = 0$$

o rozwiązaniu ogólnym

$$(2.25) \quad w_0 = e^{-\kappa \frac{x}{R}} \left(A_1 \cos \kappa \frac{x}{R} + A_2 \sin \kappa \frac{x}{R} \right) + e^{\kappa \frac{x}{R}} \times \\ \times \left(A_3 \cos \kappa \frac{x}{R} + A_4 \sin \kappa \frac{x}{R} \right) + A_5 x + A_6,$$

Dla półnieskończonej powłoki walcowej $A_3 = A_4 = A_5 = 0$. Podstawiając (2.25) do warunków brzegowych (2.16)_{1,2,4} następnie rozwiązując układ trzech równań otrzymuje się wzór na ugięcie w_0 :

$$(2.26) \quad w_0 = \frac{\nu m P}{2\pi Eh} \left(e^{-\kappa \frac{x}{R}} \cos \kappa \frac{x}{R} - 1 \right).$$

Funkcja naprężeń Φ określona wzorem (2.20)₂ przyjmuje więc postać:

$$(2.27) \quad \Phi = \frac{p_0 R^2}{2} \left(\frac{1}{\kappa^2} e^{-\kappa \frac{x}{R}} \sin \kappa \frac{x}{R} - \varphi^2 \right) + a_1 \varphi + a_2 + a_3 x.$$

Po podstawieniu (2.26) i (2.27) do (2.14), przeprowadzeniu operacji różniczkowania oraz pominięciu małych wielkości, otrzymuje się następujące wzory na momenty i siły odniesione do jednostkowej długości przekroju powłoki dla obciążenia zerową harmoniczną p_0 :

$$(2.28) \quad M_{xx}^0 = -\frac{\nu m P}{4\pi \kappa^2} e^{-\kappa \frac{x}{R}} \sin \kappa \frac{x}{R}, \quad M_{\varphi\varphi}^0 = \nu M_{xx}^0, \quad M_{x\varphi}^0 = 0, \\ Q_{xx}^0 = -\frac{\sqrt{2} \nu m P}{4\pi R \kappa} e^{-\kappa \frac{x}{R}} \cos \left(\kappa \frac{x}{R} + \frac{\pi}{4} \right), \quad Q_{\varphi\varphi}^0 = 0, \\ N_{xx}^0 = \frac{m P}{2\pi R}, \quad N_{\varphi\varphi}^0 = \frac{\nu m P}{2\pi R} e^{-\kappa \frac{x}{R}} \cos \kappa \frac{x}{R}, \quad N_{x\varphi}^0 = 0.$$

Wynikające ze wzorów (2.26) i (2.28) wielkości promieniowych przemieszczeń i naprężeń są, co do wartości maksymalnej, znacznie mniejsze od odpowiednich wartości wynikających z rozwiązania dla wyższych harmonicznych.

3. ROZWIĄZANIE II

Wyprowadzenie wzorów na podstawie równań udoskonalonych przez Łukasiewicza [4] sprowadza się do rozwiązania następujących dwóch równań różniczkowych czwartego rzędu:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} D \left(\Delta + \frac{1}{R^2} \right)^2 w - \Delta_k \Phi &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \Delta^2 \Phi + \Delta_k w &= 0. \end{aligned}$$

Oznaczenia w równaniach (3.1) są identyczne z oznaczeniami w rozwiązaniu I.

Z zależności (3.1), (2.2), (2.3), (2.4) oraz korzystając z podstawienia (2.5), po przeprowadzeniu operacji różniczkowania i po przekształceniach, otrzymuje się następujący układ równań:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{1}{R^4} [k^4 + 2k^2(n^2 - 1) - (n^2 - 1)^2] + \frac{\lambda}{DR^3} k^2 &= 0, \\ \frac{\lambda}{R^4} [k^4 - 2n^2 k^2 + n^4] - \frac{Eh}{R^3} k^2 &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązując układ równań (3.2) otrzymuje się następujące równanie charakterystyczne:

$$(3.3) \quad (k^2 + n^2 - 1)^2 (k^2 + n^2)^2 + 4n^4 k^4 = 0$$

oraz zależność pomiędzy funkcją naprężeń i ugięciem wyrażającą się wzorem (2.9).

Postępując podobnie jak w rozwiązaniu I uzyskuje się wzory na ugięcie i funkcje naprężeń w postaci (2.11) i (2.12).

We wzorach (2.11) i (2.12) pierwiastki a , b , c i d mają inną budowę niż w rozwiązaniu I. Po wyprowadzeniu można je przedstawić w następującej postaci:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\delta_2^2 + \Psi_2^2} + \delta_2)}, \\ b &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\delta_2^2 + \Psi_2^2} - \delta_2)}, \\ c &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\delta_1^2 + \Psi_1^2} + \delta_1)}, \\ d &= \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\delta_1^2 + \Psi_1^2} - \delta_1)}. \end{aligned}$$

Składniki występujące w pierwiastkach (3.4) mają następującą budowę:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \delta_1 &= \frac{1}{2} - n^2 + \eta_1, & \Psi_1 &= \kappa^2 + \eta_2, \\ \delta_2 &= \frac{1}{2} - n^2 - \eta_1, & \Psi_2 &= \kappa^2 - \eta_1, \end{aligned}$$

gdzie

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\xi_n + \left(\frac{1}{4} - \kappa^4\right)}, \\ \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\xi_n - \left(\frac{1}{4} - \kappa^4\right)}, \\ \xi_n &= \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \kappa^4\right)^2 + \kappa^4 (1 - 2n^2)^2}. \end{aligned}$$

Pozostałe wzory są takie same jak w rozwiązaniu I.

4. OBLICZENIA NUMERYCZNE PROMIENIOWYCH PRZEMIESZCZEŃ POWŁOKI

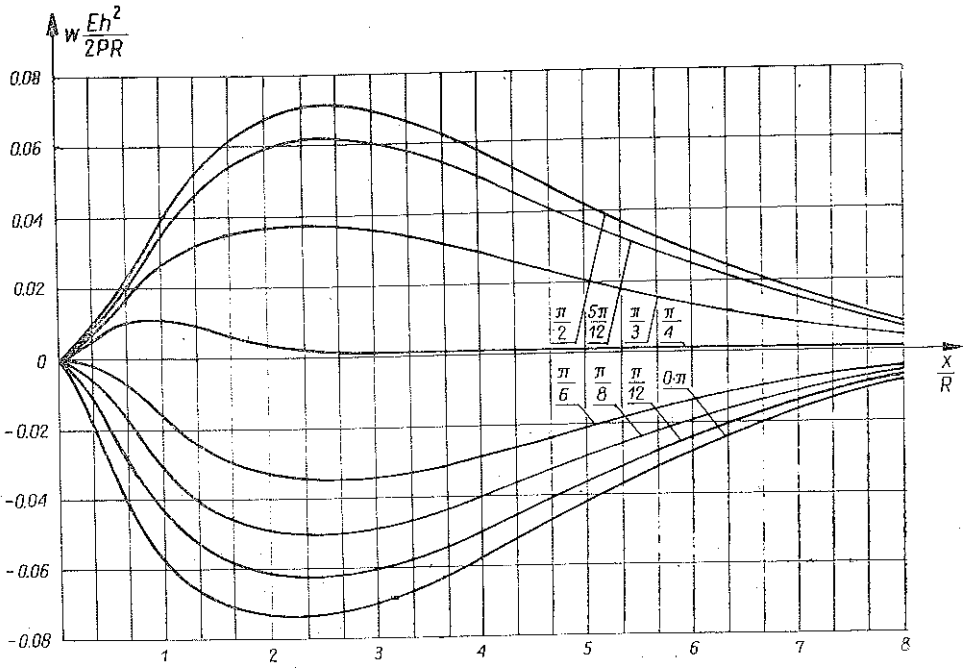
Korzystając z rozwiązania I, przeprowadzono obliczenia numeryczne ugięć powłoki o promieniu powierzchni środkowej $R=77$ mm i o grubości $h=R/20$. Przyjęto $E=2,06 \cdot 10^5$ MN/m² oraz $\nu=0,3$. Obliczenia zostały wykonane dla obciążenia siłami równymi sobie i «wprowadzonymi w punkty» obwodu jednakowo od siebie odległe. Wartość każdej z tych sił wynosi $P=5000$ N, a ich liczba $m=2, 3, 4, 6$. Wyniki obliczeń zostały przedstawione we współrzędnych bezwymiarowych.

W celu uzyskania dostatecznej dokładności wyników, należy do obliczeń przyjąć $n > 100$. Próby uwzględnienia na przykład 20 wyrazów szeregu nie dały zadowalających rezultatów.

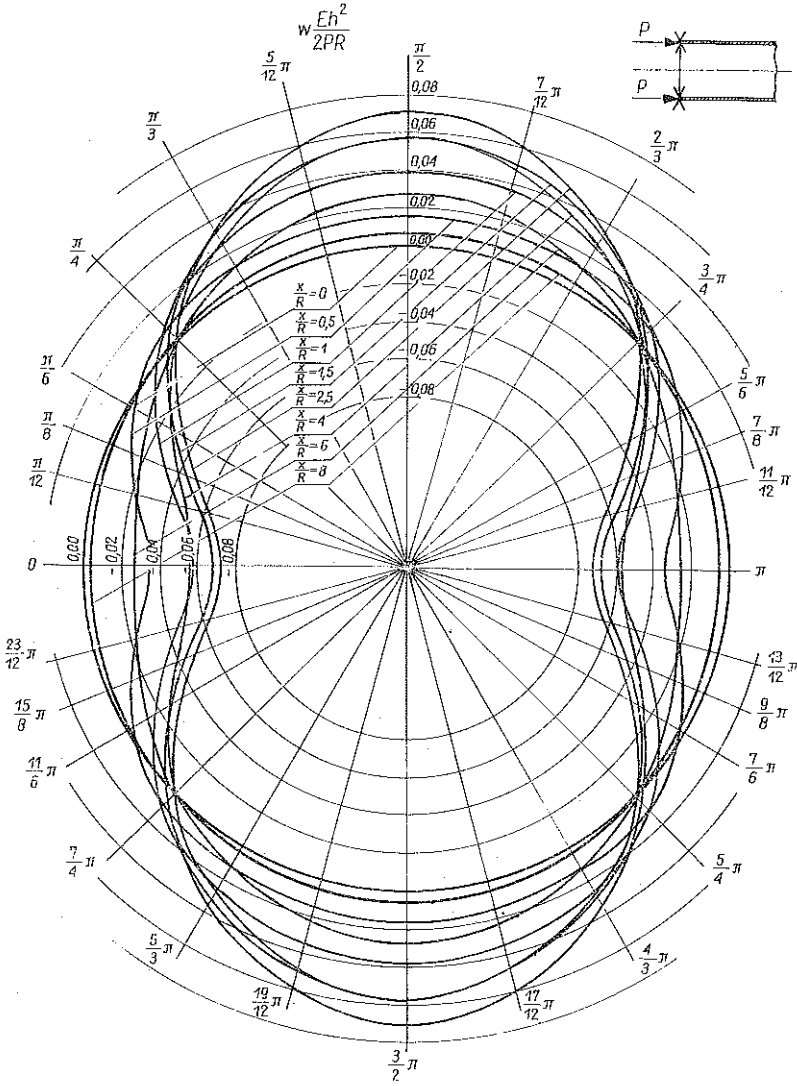
W dostatecznej odległości od brzegu rozkład naprężeń jest osiowo-symetryczny zgodnie z warunkiem $2\pi RN_{xx} = mP$. Występujące tam promieniowe przemieszczenia są jednakowe na całym obwodzie przekroju poprzecznego powłoki. Są one małe w porównaniu z lokalnymi ugięciami maksymalnymi występującymi w obszarach oddziaływania obciążeń skupionych.

Na rysunkach 4 i 5 pokazano wykresy promieniowych ugięć powłoki obciążonej siłami ściskającymi w dwóch punktach. Linie jednakowych ugięć tak obciążonej powłoki zostały przedstawione na rys. 6.

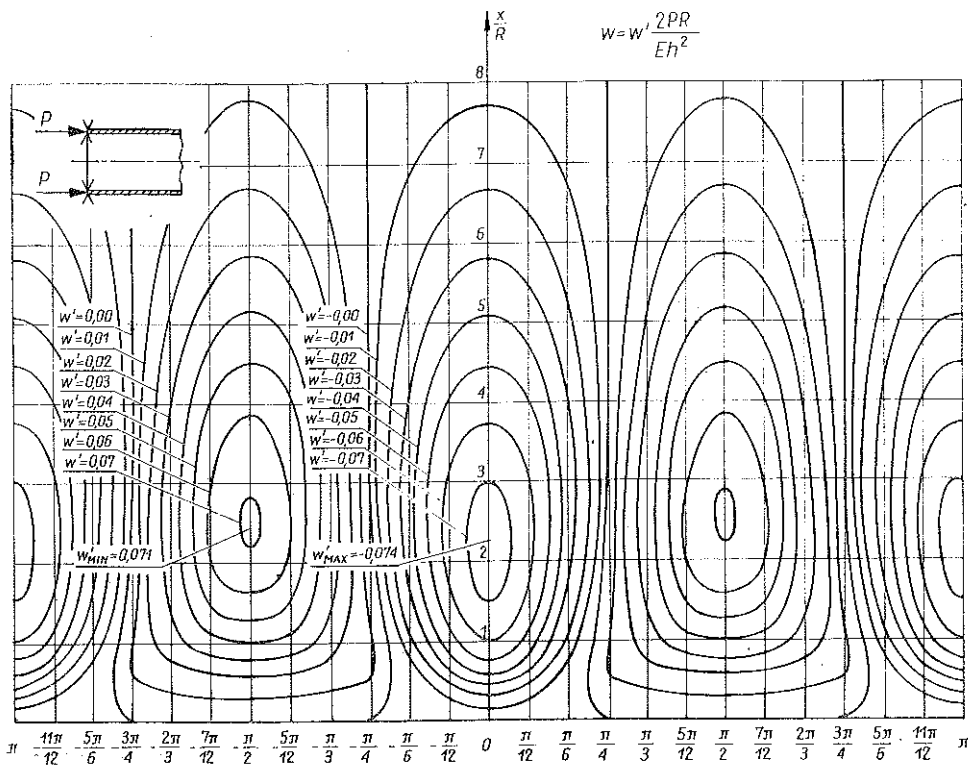
Na rysunkach 7, 8 i 9 pokazane są promieniowe ugięcia rozpatrywanej powłoki obciążonej siłami ściskającymi w trzech, czterech i sześciu punktach rozmieszczonych na obwodzie w jednakowej podziałce. W przypadku działania sił rozciągających przedstawione na wykresach promieniowe przemieszczenia będą miały znaki



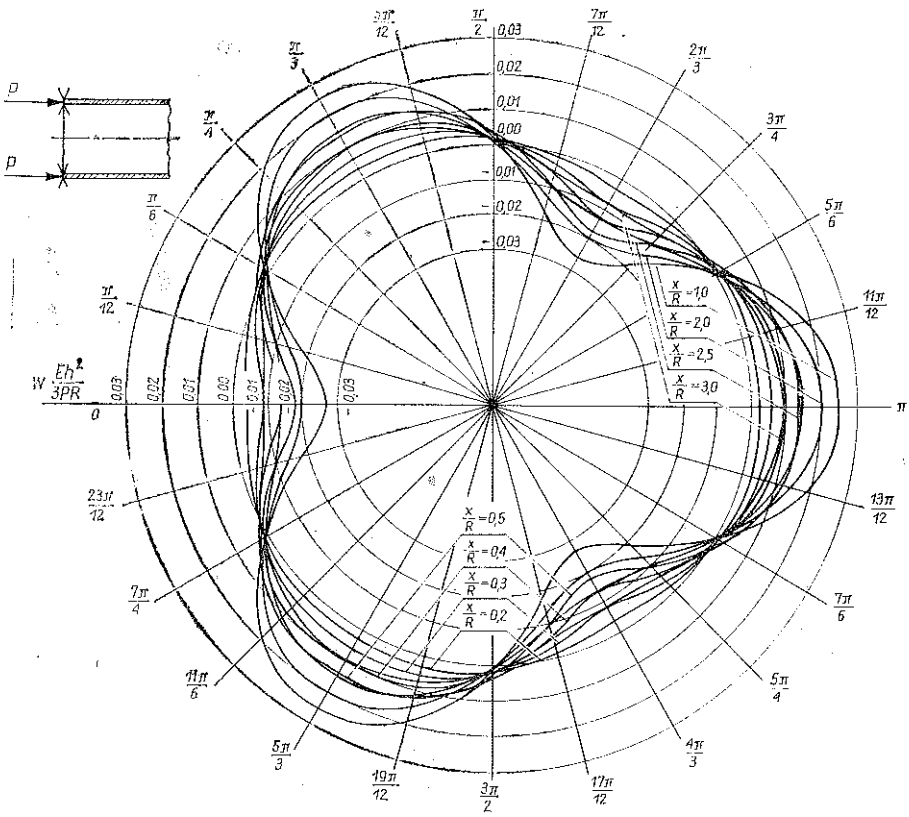
Rys. 4.



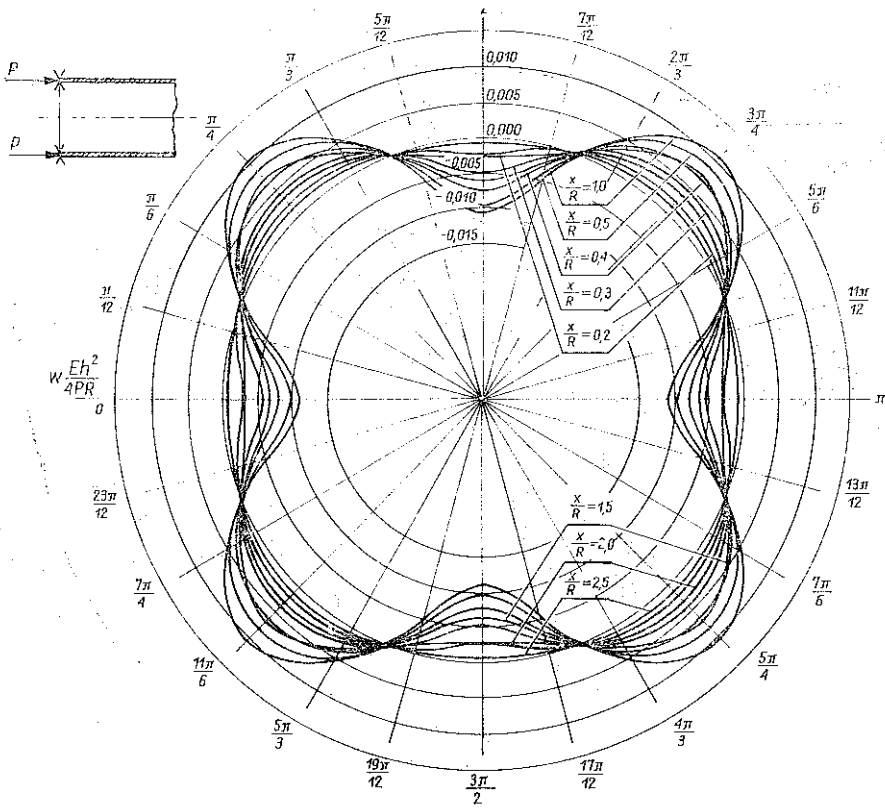
Rys. 5.



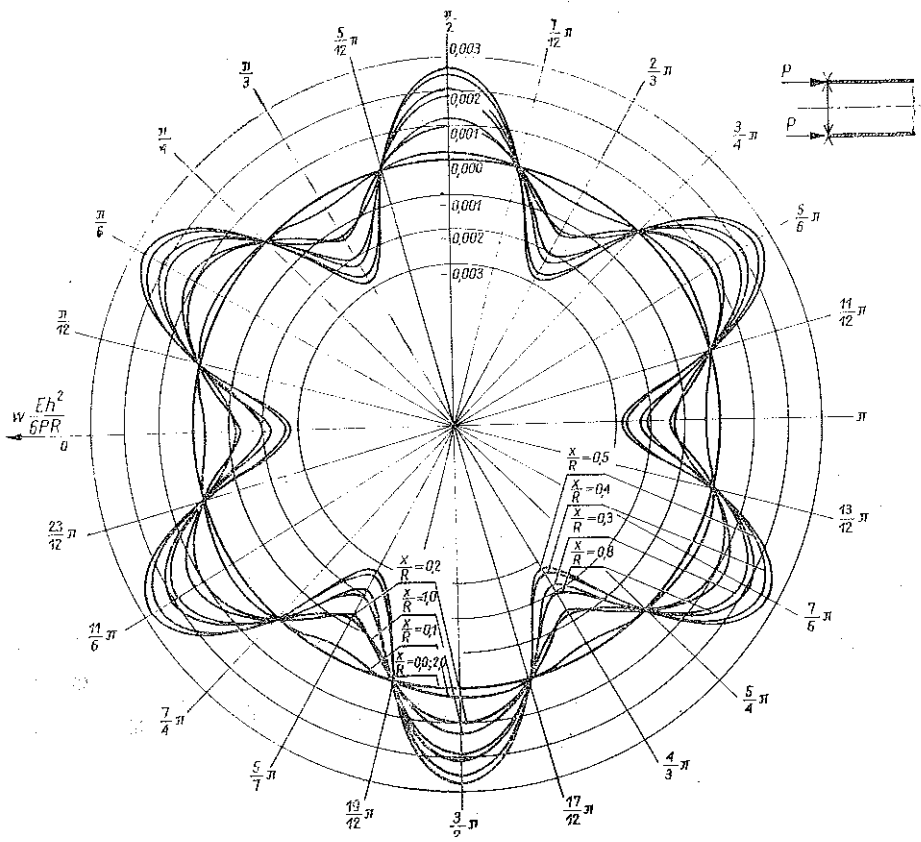
Rys. 6.



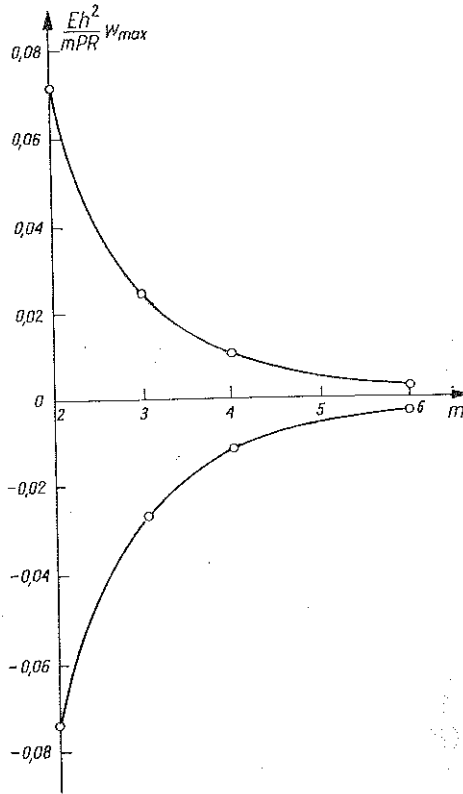
Rys. 7.



Rys. 8.



Rys. 9.



Rys. 10.

przeciwne. Promieniowe ugięcia powłoki zmniejszają się bardzo szybko, gdy liczba m obciążonych jednakowymi siłami wzrasta. Wykres na rys. 10 pokazuje zależność maksymalnych dodatnich i minimalnych ujemnych ugięć powłoki od liczby punktów obciążonych jednakowymi siłami.

5. WNIOSKI

Ugięcia promieniowe powłoki walcowej zamkniętej obciążonej siłami skupionymi normalnymi do przegubowo zamocowanego brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej sięgają daleko wzdłuż tworzącej.

Odległość maksymalnych ugięć od obciążonego brzegu zależy od liczby sił rozstawionych w jednakowej podziałce na obwodzie powierzchni środkowej. Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych wynika, że w badanej powłoce ze wzrostem liczby sił maleje odległość maksymalnych ugięć od obciążonego brzegu. Na przykład, jeśli liczba sił wynosi $m=2$, to maksymalne ugięcie w_{max} występuje w odległości od brzegu $x \approx 2,5 R$; gdy $m=6$, to w_{max} występuje w odległości od brzegu $x \approx 0,5 R$.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. T. KACPERSKI, *Powłoka walcowa zamknięta obciążona siłami skupionymi normalnymi do brzegu i stycznymi do powierzchni środkowej*, Rozpr. Inżyn., 25, 2, 1977.
2. L. H. DONNELL, *Stability of thin walled tubes under torsion*, NACA Report 479, 1933.
3. В. З. Власов, *Общая теория оболочек*, Москва--Ленинград 1949.
4. S. ŁUKASIEWICZ, *Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach*, PWN, Warszawa 1976.

Резюме

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ЗАМКНУТАЯ ОБОЛОЧКА НАГРУЖЕННАЯ СОСРЕДОТОЧЕН-
ЗАКРЕПЛЕННОМУ КРАЮ И КАСАТЕЛЬНЫМИ К СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Представлены рассуждения на тему цилиндрической замкнутой оболочки, нагруженной сосредоточенными силами нормальными к шарнирно закрепленному краю и касательными к срединной поверхности.

Представлены два решения этой задачи. В первом выведены формулы, опирающиеся на уравнения Доннелла-Власова. Во втором выведены формулы на основе уравнений усовершенствованных Лукасевичом. Проведены численные расчеты радиальных прогибов оболочки, нагруженной несколькими разными количествами одинаковых сил, распределенных по периметру в одинаковых масштабах. Констатировано, что расстояние максимальных прогибов от нагруженного края зависит от количества введенных сил. С ростом количества сил это расстояние уменьшается.

SUMMARY

CLOSED CYLINDRICAL SHELL LOADED BY CONCENTRATED FORCES NORMAL
TO THE HINGED BOUNDARY AND TANGENTIAL TO THE MIDDLE SURFACE

Two solutions of the title problem are given. The first one is based on the Donnell-Vlasov equation. The second one utilizes the improved Łukasiewicz equations. Numerical calculations concern the radial displacements of the shell loaded by several equal forces spaced uniformly along the periphery. It is found that the distance of maximum deflections from the loaded boundary depends on the number of the forces. With increasing number of forces the distance decreases.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA

Praca została złożona w Redakcji dnia 13 lipca 1983 r.