

METODA MODYFIKACJI W OBLICZENIACH WŁASNOŚCI DYNAMICZNYCH KONSTRUKCJI SPRĘŻYSTYCH

MACIEJ BOSSAK (WARSZAWA) I TOMASZ KOCH (WROCŁAW)

W pracy przedstawiono równanie ruchu modelu belkowego struktury sprężystej we współrzędnych uogólnionych oraz jego rozwiązanie, przy danym tłumieniu modalnym, metodą superpozycji postaci drgań własnych. Następnie opisano ruch struktury modelowej równaniem we współrzędnych głównych, związanych z najniższymi częstotliwościami drgań własnych i wskazano na dostateczną dla celów praktycznych dokładność takiego opisu.

W dalszej części pracy przedstawiono opis ruchu modelu równaniem we współrzędnych quasi-głównych, które stanowią kombinację współrzędnych głównych i uogólnionych i wykorzystano ten sposób opisu do budowy metody modyfikacji. Zamieszczono następnie algorytm obliczeń dynamicznych metodą modyfikacji, wykorzystującą współrzędne quasi-główne, według którego przeliczono trzy przykłady. Wyniki otrzymane z obliczeń metodą modyfikacji porównano w tabelach z wynikami obliczeń pełną belkową metodą sztywności.

1. WSTĘP

W projektowaniu konstrukcji sprężystych można wyróżnić dwie fazy. Wynikiem pierwszej jest pewna pierwotna wersja konstrukcji, która przechodzi w następnej fazie projektowania szereg zmian, mających na celu polepszenie jej własności mechanicznych, ekonomicznych, użytkowych lub innych. Celowość wprowadzania każdej zmiany musi być zweryfikowana obliczeniami, które dają odpowiedź na pytanie czy konstrukcja z tak wprowadzoną zmianą jest z punktu widzenia przyjętych kryteriów lepsza? Najprostszy sposób takiej weryfikacji, polegający na przeliczeniu całej konstrukcji po każdorazowym wprowadzeniu zmian, co wymaga korzystania z dużych systemów programów i maszyn cyfrowych o znacznej mocy obliczeniowej; jest zbyt kosztowny i czasochłonny, aby można go było powtarzać wielokrotnie. Z tego powodu rozwijają się tzw. metody modyfikacji konstrukcji. Przy obliczaniu zmodyfikowanej konstrukcji metody te pozwalają na wykorzystanie części wcześniej wykonanych obliczeń. Przez konstrukcję zmodyfikowaną rozumie się konstrukcję, w której wprowadzono zmiany sztywności i bezwłasności niektórych elementów.

Metody modyfikacji stosuje się już w obliczeniach statycznych konstrukcji sprężystych [1 i 2]. Zmniejszają one wydatnie czas obliczeń kolejnych wariantów konstrukcji, jak również zapotrzebowanie na pamięć operacyjną maszyny cyfrowej. Zalety te umożliwiają zastosowanie do obliczeń małych systemów cyfrowych (mini-komputerów, mikrokomputerów), których bardzo szybki rozwój notuje się ostatnio na całym świecie. Prace nad metodami modyfikacji, popierające rozwój małych

systemów cyfrowych, umożliwiając znaczne przyspieszenie i zwiększenie efektywności procesu konstruowania.

W pracy przedstawiono metodę modyfikacji dla obliczeń dynamicznych, zastosowaną do belkowej metody sztywności. Metoda ta wykorzystuje transformację współrzędnych uogólnionych, opisujących ruch konstrukcji do tzw. współrzędnych *quasi-głównych* i może być zastosowana nie tylko do metody belkowej, ale i do innych metod modelowania.

2. WSPÓLRZĘDNE GŁÓWNE

Przyjmujemy, że układ jest liniowy. Równanie ruchu modelu belkowego napisanego w prostokątnym, prawoskrętnym układzie współrzędnych XYZ ma postać

$$(2.1) \quad [M] \{\ddot{F}\} + [D] \{\dot{F}\} + [K] \{F\} = \{R\},$$

gdzie $[M]$, $[D]$ i $[K]$ oznaczają odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia i sztywności, $\{F\}$ — zależny od czasu wektor współrzędnych, uogólnionych, opisujących przemieszczenia translacyjne punktów węzłowych modelu belkowego w kierunku osi X , Y , Z oraz rotacyjne wokół tych osi oraz $\{R\}$ — zależny od czasu wektor sił uogólnionych opisujących siły działające wzdłuż osi X , Y , Z oraz momenty względem tych osi.

W analizie drgań układów o wielu stopniach swobody stosuje się metodę polegającą na wyznaczaniu nieznanego wektora współrzędnych uogólnionych jako superpozycji pewnej stosunkowo małej liczby postaci drgań własnych. Aby je określić trzeba najpierw rozwiązać układ równań

$$(2.2) \quad [M] \{\ddot{F}\} + [K] \{F\} = \{0\}.$$

Rozwiązanie tego równania jest postaci

$$(2.3) \quad \{F\} = \{F_0\} \sin(\omega t + \varphi),$$

gdzie $\{F_0\}$ oznacza wektor amplitud przemieszczeń punktów węzłowych, ω prędkość kątową drgań oraz φ fazę początkową. Podstawienie tego rozwiązania do układu (2.2) daje

$$(2.4) \quad ([K] - \omega^2 [M]) \{F_0\} = \{0\}.$$

Identyfikując w równaniu tym ω^2 jako wartość własną, a $\{F_0\}$ jako wektor własny, możemy obliczyć interesujące nas wielkości, tzn. częstości drgań własnych i odpowiadające im postaci drgań własnych. Wektor współrzędnych uogólnionych wyraża się następnie jako kombinację liniową wektorów własnych:

$$(2.5) \quad \{F\} = [P] \{q\},$$

gdzie $[P] = [\{F_0^1\} \{F_0^2\}, \dots, \{F_0^N\}] \{q\}$ zależny od czasu wektor tzw. współrzędnych głównych a $\{F_0^i\}$ i -ty wektor własny opisujący i -tą postać drgań. Podstawiając (2.5) do (2.1) i mnożąc (2.1) lewostronnie przez $[P]^T$ otrzymamy

$$(2.6) \quad [P]^T [M] [P] \{\ddot{q}\} + [P]^T [D] [P] \{\dot{q}\} + [P]^T [K] [P] \{q\} = [P]^T \{R\}$$

lub wprowadzając nowe oznaczenie

$$[M_p] \{\ddot{q}\} + [D_p] \{\dot{q}\} + [K_p] \{q\} = \{R_p\}.$$

Ponieważ kolumny macierzy $[P]$ są wektorami własnymi dla układu równań (2.4), przeto macierze $[M_p]$ i $[K_p]$ są diagonalne. W obliczeniach dynamicznych posługujemy się zazwyczaj tłumieniem modalnym (postaciowym), dla którego macierz $[D_p]$ również jest diagonalna. W ten sposób wyjściowy układ równań przekształca się w zbiór rozdzielonych równań ruchu postaci następującej:

$$(2.7) \quad m_i \ddot{q}_i + d_i \dot{q}_i + k_i q_i = f_i, \quad i=1, \dots, N.$$

Równania te dają się prosto rozwiązać, a mając rozwiązania q_i i korzystając ze wzoru (2.5), otrzymujemy rozwiązanie układu równań (2.1)

$$(2.8) \quad \{F\} = \sum_{i=0}^N \{F_0^i\} q_i.$$

Pod wpływem działającego obciążenia, z którym mamy do czynienia w konstrukcjach sprężystych, analizowana struktura zachowuje się z reguły tak, że wartości większości składników powyższej sumy są małe. O wartości przemieszczeń decydują tylko składniki odpowiadające kilku lub kilkunastu najniższym częstościom drgań własnych. A zatem wzór (2.8) można uprościć do postaci

$$(2.9) \quad \{F\} = \sum_{i=1}^M \{F_0^i\} q_i,$$

gdzie $M \ll N$.

Jeśli zamiast rozwiązania (2.5) podstawimy do równania (2.1) rozwiązanie (2.9), które sprowadza N współrzędnych uogólnionych do niewielkiej liczby M współrzędnych głównych, to otrzymamy następujący układ równań:

$$(2.10) \quad [M'_p] \{\ddot{q}\} + [D'_p] \{\dot{q}\} + [K'_p] \{q\} = \{R'_p\},$$

który pomimo że składa się tylko z kilku lub kilkunastu równań, opisuje ruch struktury dla celów praktycznych dostatecznie dokładnie.

3. WSPÓLRZĘDNE QUASI-GŁÓWNE

Spośród współrzędnych uogólnionych można wydzielić pewną grupę związaną z interesującym nas fragmentem struktury i nie transformować ich do współrzędnych głównych. Będziemy mieli wtedy do czynienia z transformacją, którą symbolicznie można napisać w sposób następujący:

$$(3.1) \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_K \\ F_{K+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \\ F_{K+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = \{y\},$$

gdzie symbole F_1, \dots, F_K oznaczają współrzędne uogólnione podlegające transformacji na M współrzędnych głównych q_1, \dots, q_M obliczonych dla całej struktury; F_{K+1}, \dots, F_N współrzędne niepodlegające przekształceniu oraz $\{y\}$ wektor tzw. współrzędnych *quasi-głównych*.

Próby wykorzystania podobnej kombinacji współrzędnych były już podejmowane do innych celów [3 i 4]. Transformację tę można zapisać macierzowo:

$$(3.2) \quad \{F\} = \left[\begin{array}{c|c} P_Q & 0 \\ \hline 0 & I \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_M \\ F_{K+1} \\ \vdots \\ F_N \end{Bmatrix} = [Q] \{y\},$$

gdzie $[P_Q]$ oznacza macierz, której kolumnami jest M -wektorów własnych, w których pominięto $(N-K)$ współrzędnych, $M \ll N$.

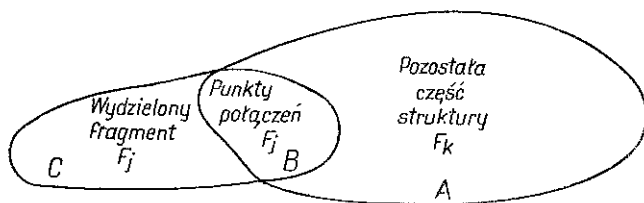
Podstawiając (3.2) do (2.1) i mnożąc lewostronnie przez $[Q]^T$, otrzymamy

$$(3.3) \quad [Q]^T [M] [Q] \{\ddot{y}\} + [Q]^T [D] [Q] \{\dot{y}\} + [Q]^T [K] [Q] \{y\} = [Q]^T \{R\}$$

lub po wprowadzeniu nowych oznaczeń

$$[M_q] \{\ddot{y}\} + [D_q] \{\dot{y}\} + [K_q] \{y\} = [R_q].$$

Występujące w tym układzie równań macierze mas, tłumienia i sztywności mają prostą budowę i dla celów interpretacji fizycznej oraz praktycznych zastosowań warto się z nią bliżej zapoznać. Ponieważ wszystkie macierze podlegają temu samemu przekształceniu, to wystarczy przeanalizować budowę jednej z nich, na przykład macierzy sztywności. W tym celu podzielmy współrzędne uogólnione F na



Rys. 1

rzy grupy F_j, F_i oraz F_k — związane z punktami węzłowymi należącymi wyłącznie do wspomnianego wydzielonego fragmentu struktury, do połączeń tego fragmentu z pozostałą częścią struktury oraz do tej pozostałej części struktury (rys. 1).

Odpowiednio do podziału współrzędnych uogólnionych daje się również przedstawić macierz sztywności jako sumę macierzy pochodzących od poszczególnych fragmentów.

Rozłóżmy więc macierz sztywności na sumę dwóch macierzy: jednej związanej tylko z częścią A struktury oraz drugiej związanej z wydzielonym fragmentem i połączeniami obu tych części, tzn. związanej z częściami B i C :

$$(3.4) \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{kk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix}$$

W podmacierzy K_{ii} oraz K_{ij} , niezerowe są tylko wiersze związane ze współrzędnymi opisującymi część B struktury. Daje to możliwość, w wyniku odpowiedniego prze-numerowania współrzędnych, przedstawienia drugiego składnika powyższej sumy jako macierzy o małym wymiarze.

W wyniku przekształcenia kongruentnego otrzymujemy

$$(3.5) \quad [K_q] = [Q]^T [K] [Q] = \begin{bmatrix} P_Q^T K_{kk} P_Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_Q^T K_{ii} P_Q & P_Q^T K_{ij} \\ K_{ji} P_Q & K_{jj} \end{bmatrix}.$$

Pierwszy składnik związany z częścią A zawiera współczynniki odpowiadające współrzędnym głównym. Drugi składnik opisuje części B i C struktury, przy czym fragment C we współrzędnych uogólnionych.

Ze względu na to, że do analizy dynamicznej branych jest pod uwagę tylko kilka lub kilkanaście postaci drgań własnych, a wydzielony fragment struktury jest nieduży, wymiar macierzy $[Q]^T [K] [Q]$, i zarazem układu równań (3.3), jest mały.

Z rozważań powyższych wynika, że transformacja współrzędnych uogólnionych do współrzędnych *quasi*-głównych umożliwia: 1) opisanie dostatecznie dokładnie dynamicznych własności struktury za pomocą macierzy o niedużych wymiarach; 2) opisanie własności interesującego nas fragmentu struktury we współrzędnych uogólnionych.

Fakty te nasunęły pomysł zbudowania metody modyfikacji wykorzystującej transformację współrzędnych uogólnionych do współrzędnych *quasi*-głównych.

4. METODA MODYFIKACJI DLA OBLICZEŃ DYNAMICZNYCH

Omówiona tu metoda modyfikacji służy do badania wpływu zmian wprowadzanych w modelu belkowym na jego własności dynamiczne. Metoda przyjmuje następujące dwa założenia: 1) Modyfikacjom podlegać będzie pewien nieduży w stosunku do całości fragment struktury. 2) Modyfikacje obejmować mogą zmiany parametrów przekrojowych belek jak również zmiany ich współczynników bezwładności.

Z założenia 1 wynika, że korzystając z (3.4) sztywność struktury zmodyfikowanej można napisać następująco:

$$(4.1) \quad [K] = \begin{bmatrix} K_{kk} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ii}^z & K_{ij}^z \\ K_{ji}^z & K_{jj}^z \end{bmatrix},$$

gdzie na oznaczenie elementów podlegających modyfikacjom użyto wskaźnika z .

Po dokonaniu transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych quasi-głównych, macierz sztywności struktury zmodyfikowanej przyjmuje postać

$$(4.2) \quad [K_q^z] = \begin{bmatrix} P_Q^T K_{kk} P_Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_Q^T K_{ii}^z P_Q & P_Q^T K_{ij}^z \\ K_{ji}^z P_Q & K_{jj}^z \end{bmatrix}.$$

Należy zwrócić uwagę, że do transformacji tej użyto macierzy $[P_Q]$, na którą składają się postacie drgań własnych (por. (3.2)) struktury wyjściowej niezmodyfikowanej, innymi słowy współrzędne uogólnione opisujące przemieszczenia węzłów w części A struktury (por. rys. 1) przechodzą na M współrzędnych głównych odpowiadających strukturze niezmodyfikowanej. Tak dobrana transformacja posiada pierwszorzędnej wagi zaletę polegającą na tym, że pierwszy składnik sumy (4.2) zawierający informacje o dynamicznych własnościach struktury pozostaje stały, a modyfikowany fragment daje się prosto opisać i uwzględnić w równaniach ruchu.

5. ALGORYTM OBLICZEŃ

Poniżej zamieszczony jest algorytm obliczeń dynamicznych wykorzystujący quasi-główne współrzędne. Algorytm ten składa się z dwóch etapów.

Etap I zostaje wykonany jednokrotnie, podczas gdy Etap II powtarza się wielokrotnie: tyle razy, ile modyfikacji parametrów zamierza się przeanalizować.

Etap I

1. Analiza dynamiczna struktury belkowej metodą sztywności
 - a) Ułożenie układu równań:

$$[M] \{\ddot{F}\} + [K] \{F\} = \{0\}.$$

- b) Obliczenie najniższych częstości drgań własnych $\omega_1, \dots, \omega_M$ i postaci drgań własnych $\{F_0^1\}, \dots, \{F_0^M\}$.

2. Wydzielenie belek (i związanych z nimi współrzędnych uogólnionych), których parametry będą podlegały modyfikacjom i skonstruowanie macierzy sztywności $[K^0]$ oraz macierzy bezwładności $[M^0]$ dla struktury, w której belki te zostały pominięte ($[K^0]$ — pierwszy składnik ze wzoru 4.1).

3. Na podstawie wektorów opisujących postacie drgań $\{F_0^1\}, \dots, \{F_0^M\}$ zbudowanie macierzy transformacji $[Q]$.

4. Wyznaczenie macierzy sztywności i mas ze wzorów

$$[K_q^0] = [Q]^T [K^0] [Q],$$

$$[M_q^0] = [Q]^T [M^0] [Q].$$

Danymi do etapu II są macierze $[Q]$, $[K_q^0]$ i $[M_q^0]$ oraz oczywiście nowe parametry modyfikacji belek.

Etap II

1. Skonstruowanie macierzy sztywności $[K^m]$ i macierzy bezwładności $[M^m]$ dla wydzielonego fragmentu struktury belkowej i jego połączenia z pozostałą jej częścią ($[K^m]$ — drugi składnik ze wzoru (4.1)).

2. Wyznaczenie macierzy sztywności i mas ze wzorów

$$[K_q^m] = [Q]^T [K^m] [Q],$$

$$[M_q^m] = [Q]^T [M^m] [Q].$$

3. Sumowanie macierzy sztywności i mas

$$[K_q] = [K_q^0] + [K_q^m],$$

$$[M_q] = [M_q^0] + [M_q^m].$$

4. Rozwiązanie zagadnienia własnego

$$([K_q] - \omega^2 [M_q]) \{F_q\} = \{0\}.$$

- a) Faktoryzacja symetryczna macierzy $[K_q]$, tzn. znalezienie takiego $[W]$, że $[K_q] = [W] [W]^T$.

- b) Transformacja $\{F_q\} = [W]^T [z]$, co daje

$$\left([W]^{-1} [M_q] [W]^{-1T} - \frac{1}{\omega^2} [I] \right) \{z\} = \{0\}.$$

- c) Obliczenie wartości własnych $\omega_1^2, \dots, \omega_M^2$ i wektorów własnych $\{z_1\}, \dots, \{z_M\}$.

- d) Obliczenie wektorów opisujących postacie drgań własnych

$$\{F_{0j}^i\} = [Q] [W]^{-1T} \{z_j\}.$$

Należy zwrócić w tym miejscu uwagę, że w etapie II dokonuje się operacji na macierzach o znacznie mniejszych wymiarach niż ma układ wyjściowy. Daje to następujące korzyści: 1) kolejne warianty można obliczać znacznie szybciej, 2) obliczenia w etapie II w odróżnieniu od etapu I nie wymagają dużej pamięci operacyjnej maszyny cyfrowej i mogą być przeprowadzone na małym systemie cyfrowym.

Proces konstruowania z wykorzystaniem omówionej metody może wyglądać następująco: 1. Przeliczenie pierwotnej koncepcji konstrukcji na dużym komputerze, przy czym w danych muszą być zaznaczone elementy, w których będą wprowadzane modyfikacje. 2. Przesłanie z dużego komputera pośrednich wyników, tzn. $[Q]$, $[K_q^0]$, $[M_q^0]$ na mały system cyfrowy. 3. Przeliczanie kolejnych wariantów konstrukcji na małym systemie cyfrowym.

Według opisanej metody zostały opracowane dwa programy na maszynę cyfrową Odra: 1) program DYNK realizujący etap I oraz 2) program MALY realizujący etap II.

6. PRZYKŁADY ZASTOSOWANIA METODY MODYFIKACJI Z WYKORZYSTANIEM WSPÓLRZĘDNYCH QUASI-GLÓWNYCH

Przykład 1

Obliczono belkę obustronnie utwierdzoną, której model belkowy zamieszczono na rys. 2.

Modyfikacjom poddano środkowy element belkowy pomiędzy punktami węzłowymi 2 i 3 — zwiększono jego wymiar przekrojowy b , co pociągało oczywiście

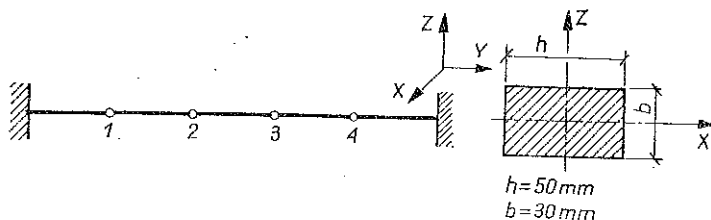
Tablica 1

Postacie drgań	I		II		III		IV	
	f Hz	Modyfikacja	f Hz	Modyfikacja	f Hz	Modyfikacja	f Hz	Modyfikacja
M	1,17 kg	1,37 kg	1,56 kg	1,76 kg	1,95 kg			
b	3 cm	2,5 cm	4 cm	4,5 cm	5 cm			
I _x	11 cm ⁴	18 cm ⁴	27 cm ⁴	38 cm ⁴	52 cm ⁴			
I _z	31 cm ⁴	36 cm ⁴	42 cm ⁴	47 cm ⁴	52 cm ⁴			
I _t	27 cm ⁴	40 cm ⁴	56 cm ⁴	74 cm ⁴	94 cm ⁴			
A	15 cm ²	17,5 cm ²	20 cm ²	22,5 cm ²	25 cm ²			
Częstotliwości drgań własnych								
	1		2		1		2	
	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz
1	598,21	611,48	616,23	616,23	615,06	615,06	610,14	610,14
2	960,18	946,35	946,69	931,66	932,81	916,64	918,84	903,02
3	1523,11	1513,52	1513,52	1497,02	1497,02	1477,05	1477,05	1455,24
4	2356,22	2330,05	2330,34	2302,18	2303,15	2273,53	2275,42	2247,61
5	2510,33	2392,66	2392,66	2270,87	2270,87	2147,92	2147,92	2025,79
6	2677,98	2813,43	2813,43	2925,61	2925,61	3009,75	3009,75	3069,22
7	3823,75	3872,04	3872,04	3869,73	3869,73	3845,91	3845,91	3813,10
8	3991,07	4022,22	4023,29	4048,31	4052,11	4070,32	4077,98	4101,55
9	4775,89	5051,20	5051,20	5240,94	5240,94	5361,64	5361,64	5442,26
10	4980,81	4936,60	4837,02	4703,41	4704,88	4580,02	4582,95	4469,99

1 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK

2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem MARY

zmianę prawie wszystkich parametrów przekrojowych oraz masy belki. Wyniki zamieszczono w tablicy 1. W pierwszej kolumnie tej tablicy zestawiono w górnej jej części parametry charakteryzujące element belkowy przed modyfikacjami (wszystkie pięć elementów struktury wyjściowej było identycznych), a w dolnej jej części



Rys. 2

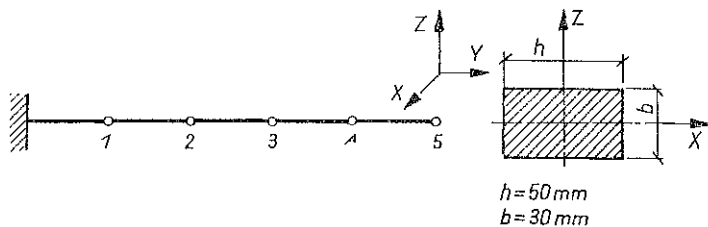
obliczone częstotliwości drgań własnych struktury wyjściowej przyporządkowane kolejnym dziesięciu postaciom drgań. W następnych kolumnach w górnej części tablicy zamieszczone zostały parametry modyfikowanego elementu belkowego, po kolejnych modyfikacjach, tzn. gdy wymiar poprzeczny b tego elementu przyjmował kolejno wartości 35 mm, 40 mm, 45 mm, 50 mm. W dolnej części tablicy natomiast zestawiono obliczone częstotliwości drgań własnych struktury, po jej kolejnych czterech modyfikacjach.

Dla porównania obliczenia przeprowadzono dwiema metodami, stąd też pod każdym zestawem parametrów znajdują się dwie kolumny: lewa — przedstawiająca częstotliwości drgań własnych obliczone pełną belką metodą sztywności, prawa — częstotliwości drgań własnych obliczone omawianą tu metodą modyfikacji.

Przykład 2

Obliczano belkę jednostronnie utwierdzoną (rys. 3).

Przeprowadzono jedną modyfikację struktury polegającą na dołączeniu do punktu węzłowego 5 kuli o masie 0,5 kg. Wyniki przedstawiono w tablicy 2. Układ tablicy 2 jest analogiczny do układu tablicy 1.



Rys. 3

Przykład 3

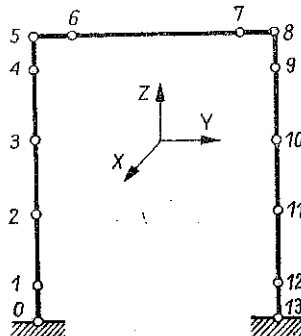
Obliczono korpus stojaka frezarki bramowej, której model belkowy zamieszczono na rys. 4.

Częstotliwości i postacie drgań własnych struktury wyjściowej niezmodyfikowanej, obliczone belką metodą sztywności przedstawia rys. 5.

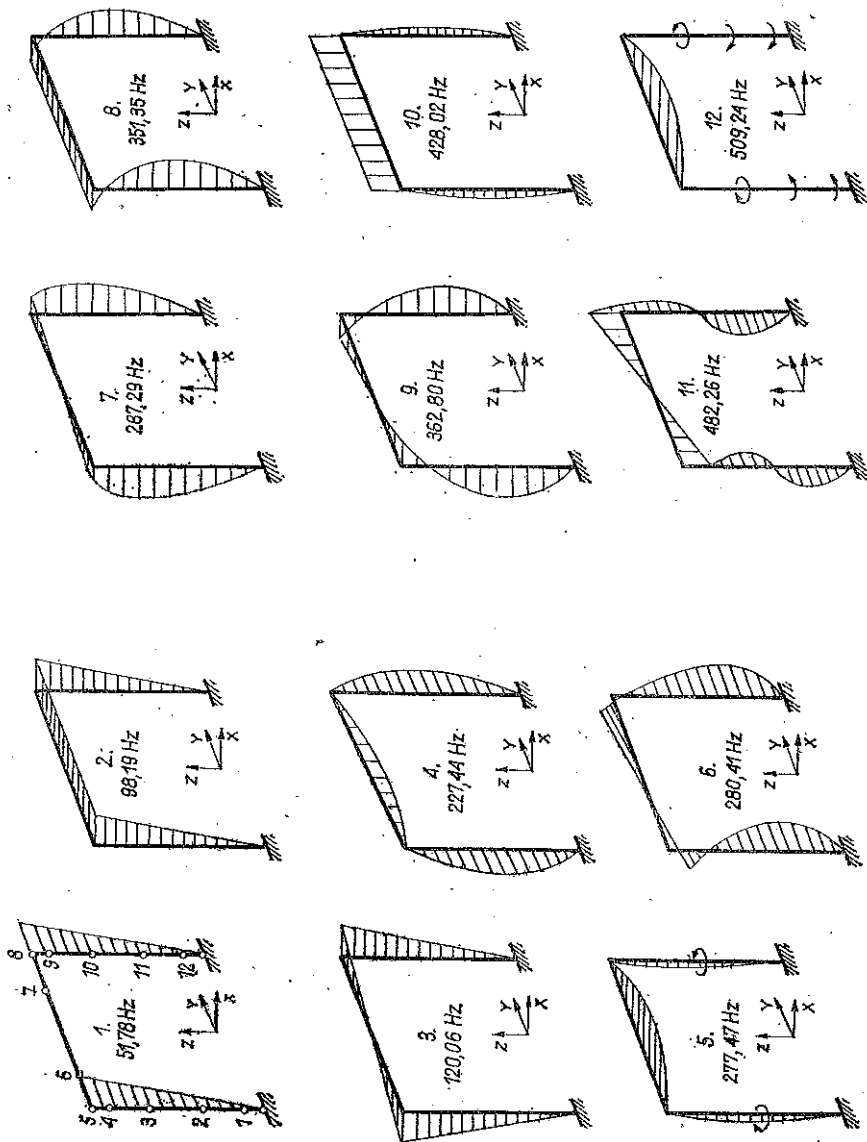
Tablica 2

		Modyfikacja		
Q_5	$\emptyset, 585 \text{ kg}$	$1, 085 \text{ kg}$		
M_x^5	$5, 3 \text{ kg cm}^2$	$6, 5 \text{ kg cm}^2$		
M_y^5	$1, 7 \text{ kg cm}^2$	$2, 9 \text{ kg cm}^2$		
M_z^5	$6, 1 \text{ kg cm}^2$	$7, 3 \text{ kg cm}^2$		
Postacie drgań		Częstotliwości drgań własnych		
		1	1	2
		f Hz	f Hz	f Hz
1		95, 42	82, 79	82, 79
2		158, 18	137, 32	137, 32
3		544, 30	500, 40	500, 40
4		882, 16	812, 72	812, 72
5		1173, 83	1094, 84	1094, 84
6		1381, 13	1323, 78	1323, 78
7		2180, 21	2092, 11	2092, 11
8		2434, 16	2388, 56	2388, 56
9		2521, 45	2324, 02	2326, 01
10		3406, 59	3185, 75	3185, 99
11		3575, 78	3540, 54	3540, 55
12		3719, 53	3654, 15	3654, 16

- 1 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem DYNK
 2 - Częstotliwości drgań własnych obliczone programem MALY



Rys. 4



Rys. 5

Modyfikacjom poddano w tej strukturze cztery elementy belkowe o identycznych przekrojach leżące pomiędzy węzłami 0-1, 1-2, 11-12 oraz 12-13. Przeprowadzono trzy modyfikacje polegające na identycznej zmianie we wszystkich czterech elementach jednocześnie dwóch parametrów przekrojowych: geometrycznego momentu bezwładności I_x^1 oraz wskaźnika charakteryzującego sztywność skrętną I_x^2 . Wyniki przedstawiono w tabelicy 3, której układ jest analogiczny do układu tablic 1 i 2. Podobnie jak w poprzednich tablicach pierwsza kolumna tabelicy 3 zawiera w górnej części parametry charakteryzujące przekrój, który posiadały wymienione cztery elementy jeszcze przed modyfikacją, a w dolnej części obliczone częstotliwości drgań własnych struktury wyjściowej przyporządkowane kolejnym numerom postaci drgań z rys. 5. Dalsze kolumny tabelicy przedstawiają obliczone częstotliwości drgań własnych dla kolejnych trzech modyfikacji.

Tablica 3

		I	II	III			
		Modyfikacja	Modyfikacja	Modyfikacja			
I_x	282 cm ⁴	400 cm ⁴	500 cm ⁴	600 cm ⁴			
I_t	576 cm ⁴	576 cm ⁴	990 cm ⁴	300 cm ⁴			
Nr postaci drgań	Częstotliwość drgań własnych						
	1	1	2	1	2	1	2
	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz	f Hz
1	61,78	67,65	67,75	71,70	71,09	75,15	75,70
2	98,19	98,19	98,19	98,21	98,19	98,19	98,19
3	120,06	120,06	120,06	129,53	129,52	106,50	106,50
4	227,44	237,16	237,19	243,36	243,37	248,52	248,54
5	277,74	277,73	277,74	320,13	320,13	238,19	238,19
6	280,41	289,74	289,79	295,16	295,24	299,41	299,49
7	278,29	287,29	287,29	313,53	313,53	260,00	260,00
8	351,35	351,35	351,35	351,36	351,36	351,35	351,35
9	362,80	362,80	362,80	374,74	374,74	356,56	356,56
10	428,02	428,20	428,20	428,28	428,29	428,33	428,35
11	482,26	487,38	487,55	489,85	490,21	491,51	492,04
12	509,24	509,24	509,24	540,11	539,38	539,86	539,87

1 — Częstotliwość drgań własnych obliczone programem DYNK

2 — Częstotliwość drgań własnych obliczone programem MALY

W omówionych powyżej przykładach niektóre modyfikowane parametry ulegały dość znacznym zmianom, np. I_x w przykładzie 1 został zwiększony aż ponad czterokrotnie. Spowodowało to dość duże przesunięcia częstotliwości drgań własnych, a nawet zamianę kolejności występowania postaci drgań. Na przykład w przedziale I dziewiąta postać stała się dziesiątą, a dziesiąta stała się dziewiątą; dla drugiej, trzeciej i czwartej modyfikacji również czwarta postać zamieniła się miejscami z piątą.

Z tablic wynika, że metoda modyfikacji nawet przy tak znacznych zmianach modyfikowanych parametrów daje wyniki z bardzo dużą dokładnością (błąd jest mniejszy od 0,5%), a przy tym posługując się nią trzeba było rozwiązać znacznie mniej równań opisujących ruch struktury niż posługując się pełną belkową metodą sztywności (tablica 4).

Tablica 4

	Przykład 1	Przykład 2	Przykład 3
Belkowa metoda sztywności	24	30	72
Metoda modyfikacji	16	18	30

Liczba równań opisujących ruch struktur z przykładów w zależności od stosowanej metody obliczeń.

ZNACZENIE SYMBOLI UŻYTYCH W TABLICACH

M — masa elementu belkowego, I_x — geometryczny moment bezwładności względem osi X , I_y — geometryczny moment bezwładności względem osi Y , I_z — wskaźnik charakteryzujący sztywność skrętną, A — pole przekroju, Q_s — masa przypisana piątemu punktowi węzłowemu, M_s^z — masowy moment bezwładności względem osi W przypisany piątemu punktowi węzłowemu.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. S. ŚWISZCZOWSKI, *Metody modyfikacji w obliczeniach konstrukcji sprężystych*, Arch. Inż. Łąd., 20, 3, 1974.
2. N. DIEKHANS, *Kleinrechnereinsatz für Berechnungsaufgaben im Konstruktionsbereich*, Berechnung von Werkzeugmaschinen, Fortschr. Ber. VDI Z. Reihe 1, Nr 68, VDI Verlag, Düsseldorf 1980.
3. A. L. KLOSTERMAN, W. A. MC CLELLAND, *Combining experimental and analytical techniques for dynamic system analysis, Theory and practice in finite element structural analysis*, University of Tokyo Press, 1973.
4. C. P. STAVRINIDIS, *A procedure for complicated dynamical equations*, Computer Methods in Applied Mech. Eng., 20, 1979.

Резюме

МЕТОД МОДИФИКАЦИЙ В РАСЧЕТАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УПРУГИХ КОНСТРУКЦИЙ

В работе представлено уравнение балочной модели упругой структуры в обобщенных координатах, а также его решение, при данном модальном затухании, методом суперпозиций типов собственных колебаний. Затем описано движение модельной структуры уравнением в главных координатах, связанных с самыми низкими частотами собственных колебаний, и указано на достаточную, для практических целей, точность такого описания.

В дальнейшей части работы представлено описание движения модели уравнением в квазиглавных координатах, которые составляют комбинации главных и обобщенных координат, и этот способ описания использован для построения метода модификаций. Затем помещен алгоритм динамических расчетов методом модификаций, использующим квазиглавные координаты, по которому пересчитаны три примера. Результаты, полученные из расчетов методом модификаций, сравнены в таблицах с результатами расчетов при помощи полного балочного метода жесткости.

SUMMARY

METHOD OF MODIFICATION IN EVALUATION OF DYNAMIC PROPERTIES OF ELASTIC SYSTEMS

Equation of the beam model of an elastic structure written in generalized coordinates is presented and solved, at a given modal damping, by means of superposition of the eigenvibrations. Motion of the model is described in the principal coordinates connected with the lowest eigenvibration frequencies, the practically sufficient accuracy of such description being demonstrated. Motion of the same model is then written in the quasi-principal coordinates which represent a combination of the principal and generalized coordinates. The method of modification is used to construct an algorithm of dynamic calculations; quasi-principal coordinates are used, and the algorithm is applied to three particular cases. The results are compared with those obtained by means of the complete beam stiffness method.

PRZEMYSŁOWY INSTYTUT MASZYN BUDOWLANYCH
oraz
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA
INSTYTUT TECHNOLOGII BUDOWY MASZYN

Praca została złożona w Redakcji dnia 10 czerwca 1983 r.