

TRÓJKĄTNE ELEMENTY CZASOPRZESTRZENNE W ANALIZIE ZAGADNIENÍ FALOWYCH

MAREK WITKOWSKI (WARSZAWA)

W pracy sformułowano czasoprzestrzeń metryczną przez przyjęcie pewnej szybkości skalu-
jącej oś czasu. Czasoprzestrzeń tę podzielono za pomocą siatki elementów trójkątnych,
uzyskując w wyniku rozdzielanie równań metody elementów czasoprzestrzennych. Algorytm
taki zastosowano do rozwiązania dwóch zagadnień brzegowo-początkowych typu Picarda,
mianowicie propagacji fali podłużnej w pręcie prostym i płaskiej fali walcowej w ośrodku
nieograniczonym.

1. WSTĘP

Metoda elementów czasoprzestrzennych, zaproponowana przez KĄCZKOW-
SKIEGO [1] i rozwijana w następnych latach także przez innych autorów,
umożliwia proste przejście od cząstkowych równań różniczkowych dynamiki
kontinuum materialnego do układu równań algebraicznych, stanowiących
opis ośrodka dyskretnego. Takie przejście jest charakterystyczne dla wszystkich
metod bezpośredniego całkowania równań ruchu, do których można zaliczyć
także metodę elementów czasoprzestrzennych. Cechą wyróżniającą tę metodę
jest charakterystyczna aproksymacja odpowiednich pól, będących przedmio-
tem analizy w całym rozważanym obszarze czasoprzestrzennym. W szczegól-
ności przemieszczenia można napisać następująco:

$$(1.1) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{N}(x_1, x_2, x_3, t) \mathbf{q},$$

gdzie \mathbf{u} jest polem przemieszczeń, \mathbf{q} wektorem współrzędnych uogólnionych
a \mathbf{N} macierzą funkcji kształtu, zależną zarówno od współrzędnych prze-
strzennych x_1, x_2, x_3 jak i czasu t .

W innych metodach bezpośredniego całkowania dokonuje się zwykle
aproksymacji typu

$$(1.2) \quad \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t) = \mathbf{N}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{q}(t),$$

gdzie macierz funkcji kształtu \mathbf{N} zależy tylko od współrzędnych przestrzen-
nych, natomiast wektor \mathbf{q} nie jest stały jak uprzednio, lecz zależy od czasu.

Algorytm rozwiązania polega z reguły na dokonaniu dyskretyzacji przestrzeni przez dobór odpowiednich funkcji kształtu, następnie zaś po otrzymaniu układu zwyczajnych równań różniczkowych względem czasu — na rozwiązaniu ich, przeważnie za pomocą różnych formuł różnicowych. Krytyczna analiza metod bezpośredniego całkowania, uwzględniająca współczesny stan badań, przedstawiona jest w pracy LANGERA i KLASZTORNEGO [2].

Zaletą postępowania opisanego za pomocą wzoru (1.2) jest możliwość dyskretyzacji przestrzeni i czasu za pomocą różnych formuł np. przestrzeni — metodą elementów skończonych lub aproksymacją Ritz'a a czasu — metodą różnic skończonych Newmarka lub Wilsona. Algorytmy takie mają jednak i wady, gdyż raz ustalony podział przestrzeni nie może być już zmieniany w czasie, co stanowi dość arbitralne ograniczenie narzucone na dyskretyzację czasoprzestrzeni. Także metoda elementów czasoprzestrzennych zwykle formułowana była w takim ujęciu, które będziemy nazywać stacjonarnym. Pełny opis tak sformułowanej metody zawiera rozprawa KACPRZYKA i LEWIŃSKIEGO [3].

Niniejsza praca poświęcona jest wskazaniu możliwości, jakie powstają w klasie zadań dynamiki opisanych równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu hiperbolicznego, jeśli zrezygnuje się ze stacjonarności siatki, wprowadzając elementy czasoprzestrzenne o bokach nachylonych do osi czasu.

2. TRÓJKĄTNA SIATKA ELEMENTÓW CZASOPRZESTRZENNYCH

Przy konstruowaniu trójkątnych elementów czasoprzestrzennych, w których oczywiście co najmniej jeden bok trójkąta musi być nachylony do osi czasu powstaje pytanie, jak należy rozumieć ukośny brzeg elementu. Choć można się pokusić o taką interpretację, lepiej przez wprowadzenie metryki zgeometryzować czasoprzestrzeń, która po takim zabiegu może być dyskretyzowana jak zwykła euklidesowa przestrzeń jedno, dwu lub trójwymiarowa.

Zmetryzowania czasoprzestrzeni można dokonać w podobny sposób jak w zagadnieniach mechaniki relatywistycznej — przez wprowadzenie pewnej szybkości skalującej oś czasu. W czasoprzestrzeni relatywistycznej rolę taką pełni szybkość światła c , natomiast w zagadnieniach mechaniki technicznej musi być to liczba znacznie mniejsza ze względu na inne zakresy prędkości rozważane w każdym z tych problemów.

W czasoprzestrzeni technicznej przyjmijmy więc nową, wyskalowaną w jednostkach długości oś czasu przez wprowadzenie związku

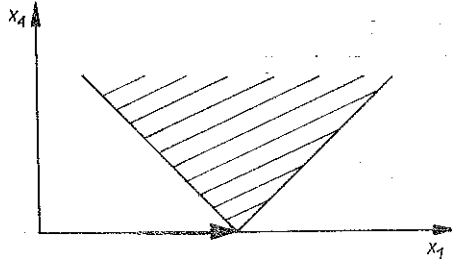
$$(2.1) \quad x_4 = st,$$

gdzie s jest szybkością skali, dobieraną w zależności od rozważanego problemu. Bardziej szczegółowe informacje, dotyczące określenia czasoprzestrzeni technicznej, podane są w pracy autora [4].

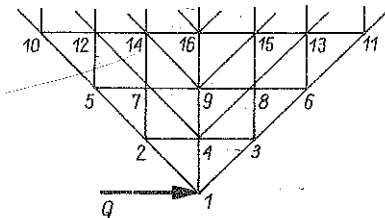
Zbadajmy możliwość przystosowania siatki trójkątnej do rozwiązywania zagadnień falowych, opisanych równaniami hiperbolicznymi, w których występują rodziny linii całkowych, zwanych charakterystykami równań. W przypadku propagacji fal, charakterystykami są prędkości rozchodzenia się zaburzeń, w związku z czym występują dwa obszary rozwiązania równań. Przed frontem fali rozwiązania są zerowe, gdyż ośrodek nie ulega żadnym przemieszczeniom natomiast za frontem mogą istnieć rozwiązania niezerowe. W ośrodku jednorodnym, w którym prędkości propagacji są stałe, obrazem charakterystyk w czasoprzestrzeni są linie proste.

W przypadku fal różnych typów, propagujących się z różnymi prędkościami, przed frontem najszybszej z nich także nie pojawiają się żadne zaburzenia. Dlatego też, analiza dynamiczna nie musi obejmować całego ciała w trakcie trwania procesu, lecz może się ograniczyć tylko do obszaru zaburzonego. Przykładowo, przyłożenie impulsu osiowego w przecię prostym spowoduje powstanie fal podłużnych (dylatacyjnych) rozchodzących się od miejsca zaburzenia w dwóch kierunkach, co w czasoprzestrzeni dwuwymiarowej przedstawić można w postaci dwóch prostych (rys. 1), gdzie część zakreskowana obrazuje obszar niezerowych rozwiązań.

Tak sformułowany problem brzegowo-początkowy, w którym warunki na wartości funkcji narzucone są wzdłuż charakterystyk równania, nazywa się zagadnieniem Darboux (por. monografię KRZYŻAŃSKIEGO [5], rozdz. XI). Widoczne jest, że obszar niezerowych rozwiązań nie może być podzielony



Rys. 1



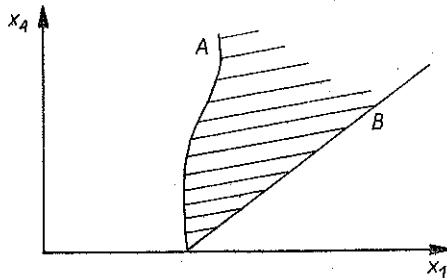
Rys. 2

za pomocą stacjonarnej siatki elementów, gdyż przynajmniej części przy brzegach obszaru muszą być wypełnione trójkątami, bądź elementami nieprostokątnymi. Z punktu widzenia sprawności algorytmu rozwiązania, szczególnie korzystne jest posługiwanie się siatką trójkątną (rys. 2). W tym przypadku, przy założeniu, że w każdym węźle występuje tylko jedna niewiadoma, układ równań metody elementów czasoprzestrzennych charakteryzuje się trójkątną macierzą współczynników.

Budowa macierzy sztywności czasoprzestrzennej objaśniona jest na rys. 3, w odniesieniu do siatki z rys. 2. Liczby w pierwszej kolumnie oznaczają tu numery węzłów, w których układane są równania, natomiast liczby w pierwszym wierszu są numerami niewiadomych. Postępowanie takie pozwala zatem rozdzielić układ równań, gdyż z jednego równania można obliczyć jedną niewiadomą. Wydaje się, że na cechę tę pierwszy zwrócił uwagę ODEN w swej fundamentalnej pracy o metodzie elementów skończonych [6]. Zwiększenie liczby stopni swobody w węźle tylko nieznacznie zmienia algorytm, gdyż wraz ze wzrostem liczby niewiadomych następuje

	4	7	8	9	12	13	14	15	16
1	X								
2	X	X							
3	X		X						
4	X	X	X	X					
5		X			X				
6			X			X			
7	X	X		X	X		X		
8	X		X	X		X		X	
9	X	X	X	X			X	X	X

Rys. 3

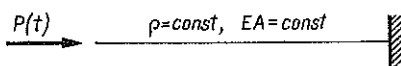


Rys. 4

identyczny wzrost liczby warunków a macierz układu staje się *quasi-trójkątna*, ponieważ stopnie swobody w węźle mogą być sprzężone (np. w zagadnieniu belki zginanej — ugięcie i kąt obrotu).

Przedstawiony powyżej sposób postępowania nie jest jednak cechą charakterystyczną zagadnienia Darboux. Okazuje się, że także w innych zagadnieniach brzegowo-początkowych zbudowanych na charakterystykach równania np. w zagadnieniu Picarda (rys. 4), gdzie prosta B jest charakterystyką, a linia A pewną krzywą zorientowaną czasowo, można powielić to rozumowanie.

Idąc dalej tym śladem stwierdzamy, że także w najczęściej występującym w dynamice zagadnieniu Cauchy'ego, gdzie na krzywej lub prostej o orientacji przestrzennej dana jest zarówno funkcja jak i jej pochodne (rys. 5), można przy odpowiednim podziale na trójkąty uzyskać trójkątną macierz współczynników. Na rys. 5 numeracja węzłów wskazuje na kolejność układania równań.



Rys. 5

Trójkątna macierz układu równań nie jest więc cechą zależną od rodzaju zagadnienia, a tylko od charakteru siatki. Zwróćmy jeszcze uwagę na to, że cecha ta zachowuje się, niezależnie od tego, czy układ równań jest liniowy o stałych, bądź zmiennych współczynnikach, czy też nieliniowy.

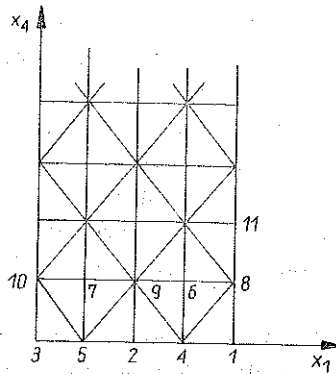
Pewne zastosowania siatki trójkątnej w analizie drgań struny pod obciążeniem ruchomym przedstawione są w rozprawie KĄCZKOWSKIEGO [7]. W tej pracy skoncentrujemy się na przedstawieniu istoty algorytmu na przykładzie rozwiązań dwóch zagadnień typu Picarda, w których, zgodnie z sugestią Odena, postępowanie takie wydaje się najbardziej naturalne.

3. FAŁA PODŁUŻNA W PRĘCIE PROSTYM

Rozważmy zagadnienie propagacji fali podłużnej w prostym pręcie wspornikowym poddanym działaniu nagle przyłożonej siły (rys. 6). Zadanie to zostało rozwiązane przy użyciu prostokątnych elementów czasoprzestrzennych przez KĄCZKOWSKIEGO [8]. Obecnie w rozwiązaniu wykorzystamy czasoprzestrzenne elementy trójkątne dostosowane do charakterystyki równania.

Równanie różniczkowe zagadnienia ma postać

$$(3.1) \quad EA \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + p = 0,$$



Rys. 6

gdzie u oznacza przemieszczenie podłużne pręta, E moduł Younga, A pole przekroju pręta, ρ gęstość masy oraz p obciążenie podłużne na jednostkę długości.

Jeśli uwzględnimy fakt, że prędkość propagacji fali podłużnej wynosi

$$(3.2) \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

a równanie (3.1) napiszemy w czasoprzestrzeni metrycznej, to można je przedstawić w formie

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{s^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_4^2} + \frac{p}{EA} = 0,$$

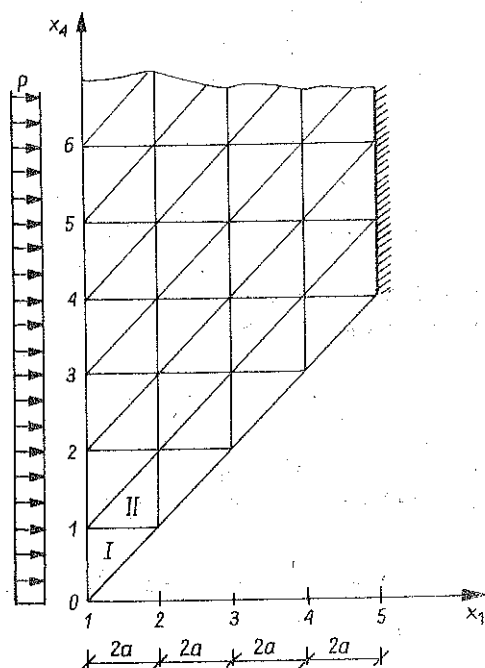
gdzie s oznacza prędkość skali, związaną z czasem związkem (2.1). Przyjmując szybkość skali równą c otrzymamy linię czoła fali jako dwusieczną układu x_1, x_4 (rys. 7). Otrzymany obszar czasoprzestrzenny podzielimy teraz na elementy trójkątne dwóch typów zgodnie z rys. 7. Macierze sztywności czasoprzestrzennej elementów wyznaczmy stosując standardowe postępowanie znane z klasycznej wersji metody elementów skończonych.

Tak więc macierz funkcji kształtu dla trójkąta (rys. 8) napiszemy w postaci

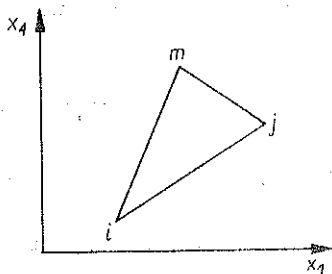
$$(3.4) \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2A} [1 \ x_1 \ x_4] \mathbf{W},$$

gdzie A jest polem trójkąta, a macierz \mathbf{W} zbudowana jest ze współrzędnych węzłów

$$(3.5) \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} a_i & a_j & a_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix},$$



Rys. 7



Rys. 8

w której przyjęto oznaczenia

$$(3.6) \quad \begin{aligned} a_i &= x_1^j x_4^m - x_1^m x_4^j, \\ b_i &= x_4^j - x_4^m, \\ c_i &= x_1^m - x_1^j, \end{aligned}$$

pozostałe zaś otrzymać można przez cykliczną zmianę wskaźników.

Związki geometryczne mają strukturę

$$(3.7) \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \partial \\ \partial x_1 \\ \partial \\ \partial x_4 \end{bmatrix} u = \partial u,$$

zawierają więc wyrażenia na odkształcenie liniowe i przeskalowaną prędkość przemieszczenia.

Macierz konstytutywna składa się z prawa Hooke'a oraz związku łączącego prędkość z przeskalowanym pędem

$$(3.8) \quad \mathbf{E} = [EA \quad -\rho A s^2],$$

gdzie [] oznaczają macierz diagonalną.

Po wprowadzeniu podstawienia $s = c$ oraz uwzględnieniu wzoru (3.2) otrzymamy

$$(3.9) \quad \mathbf{E} = EA [1 \quad -1] = EA \mathbf{L}.$$

Macierz odkształceń ma formę

$$(3.10) \quad \mathbf{B} = \partial \mathbf{N} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{W} = \frac{1}{2\Delta} \mathbf{F} \mathbf{W},$$

zatem macierz sztywności czasoprzestrzennego elementu trójkątnego wyrazić można za pomocą wzoru

$$(3.11) \quad \mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \Delta = \frac{EA}{4\Delta} \mathbf{W}^T \mathbf{F}^T \mathbf{L} \mathbf{F} \mathbf{W}.$$

Po podstawieniu do powyższego wzoru wielkości (3.5), (3.9), (3.10) otrzymamy

$$(3.12) \quad \mathbf{K} = \frac{EA}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 - c_i^2 & b_i b_j - c_i c_j & b_i b_m - c_i c_m \\ b_i b_j - c_i c_j & b_j^2 - c_j^2 & b_j b_m - c_j c_m \\ b_i b_m - c_i c_m & b_j b_m - c_j c_m & b_m^2 - c_m^2 \end{bmatrix}.$$

Dla trójkąta I (rys. 7) zachodzi

$$(3.13) \quad \begin{aligned} b_i &= 0, & b_j &= 2a, & b_m &= -2a, \\ c_i &= -2a, & c_j &= 0, & c_m &= 2a \end{aligned}$$

i macierz sztywności czasoprzestrzennej przybiera postać

$$(3.14) \quad \mathbf{K}_I = \frac{EA}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Układ równań dla fazy ruchu po dojściu czoła fali do podpory zestawiony jest w tablicy 2. Zwróćmy uwagę na to, że między brzegiem $x_1 = x_4$ a brzegiem $x_1 = 8a$ zachodzi zasadnicza różnica, choć w obu przypadkach przemieszczenia na nich są zerowe. Pierwszy z nich, leżący na charakterystyce równania (3.1), jest brzegiem, na którym narzucone są warunki tylko na samą funkcję, ale przy braku więzów kinematycznych można tu układać warunki równowagi dynamicznej. Jest to ważna cecha zagadnienia Picarda, prosta do realizacji przy trójkątnej siatce elementów. Na brzegu utwierdzonym $x_1 = 8a$ przemieszczenia też są zerowe, ale układanie równań równowagi wymagałoby uwzględnienia nieznaney reakcji.

Tablica 3

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2		1	2	3	4	5	6
3			1	2	3	4	4
4				1	2	2	2

Przemieszczenia obliczone na podstawie równań z tablic 1 i 2 zestawione są w tablicy 3.

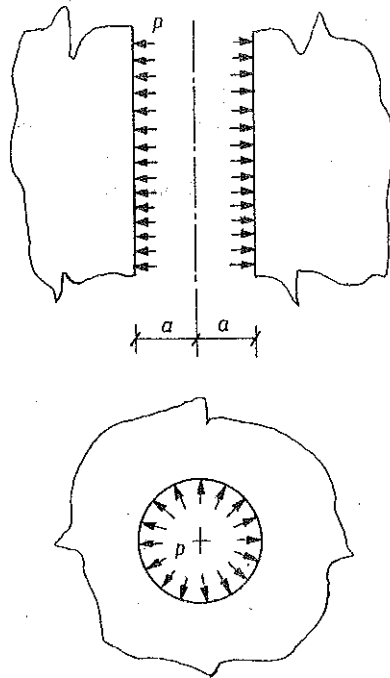
4. FAŁA WALCOWA W OŚRODKU NIEOGRANICZONYM

Rozważmy teraz zagadnienie rozprzestrzeniania się płaskiej fali walcowej, powstałej w wyniku nagłego przyłożenia obciążenia, pokazanego na rys. 9. W tych warunkach w ciele powstaje płaski stan odkształcenia, czyli podobnie, jak w poprzednim przykładzie, pole przemieszczeń zawiera tylko jedną składową. Od źródła zaburzenia rozchodzi się dylatacyjna fala walcowa, której równanie dla ośrodka sprężystego napisane jest za pomocą następującego równania przemieszczeniowego (por. monografię NOWACKIEGO [9], s. 267):

$$(4.1) \quad (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) \right] - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

gdzie λ , μ oznaczają stałe Lamégo, r odległość od osi walca oraz ρ gęstość masy.

Równanie (4.1) jest hiperbolicznym równaniem różniczkowym cząstkowym, którego analityczne rozwiązanie znane jest tylko w szczególnym przypadku obciążenia harmonicznego. Zastosujmy do rozwiązania naszego zagadnienia podejście podobne do opisanego w poprzednim przykładzie. Przekształćmy



Rys. 9

równanie do postaci

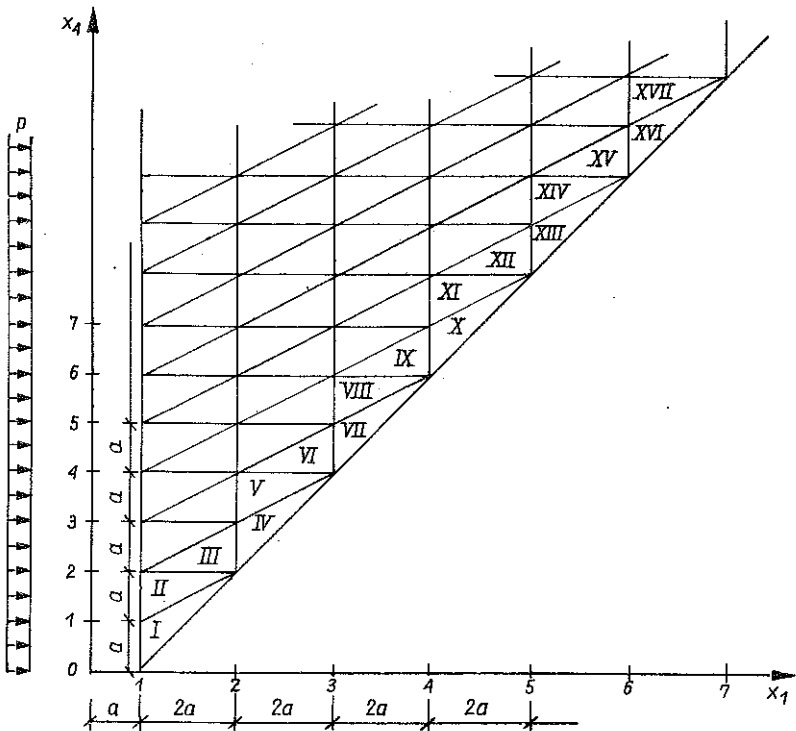
$$(4.2) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 u) \right] - \frac{s^2}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

gdzie $x_1 = r$, s oznacza szybkość skali, a c jest szybkością rozchodzenia się fali dylatacyjnej, równą

$$(4.3) \quad c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$$

Przy ustalaniu siatki elementów czasoprzestrzennych stykamy się z problemem, nie występującym w poprzednim przykładzie. Upřednio wszystkie elementy przestrzenne miały identyczną sztywność, natomiast teraz są współśrodkowymi pierścieniami, dlatego sztywność ich maleje w miarę oddalania się od osi walca. W konsekwencji zawodzi sposób podziału czasoprzestrzeni za pomocą trójkątów prostokątnych równoramiennych (przy $s = c$), gdyż taki podział jest zbyt rzadki ze względu na czas, co prowadzi do niestabilności procesu numerycznego. Niestety, dla siatek trójkątnych brak jest ciągle kryteriów, pozwalających wyznaczyć granicę stabilności czyli granicznych proporcji trójkątów. Z tego względu trzeba ustalić tę proporcję drogą prób,

badając zbieżność rozwiązania przy zmniejszaniu wymiarów elementów w czasie. Okazuje się, że w rozważanym przykładzie już przy stosunku 1:2 proces staje się stabilny: W konsekwencji takiego przyjęcia należy rozpatrzyć trzy typy elementów trójkątnych, gdyż taka ich liczba jest niezbędna dla wypełnienia całego obszaru czasoprzestrzennego, ograniczonego z jednej strony brzegiem walca, z drugiej zaś linią czoła fali (rys. 10).



Rys. 10

Należy mieć na uwadze, że elementy trójkątne są przekrojami pierścieni z których zbudowane jest czasoprzestrzenne ciało osiowo-symetryczne. Stan odkształcenia zawiera w tym przypadku trzy składowe

$$(4.4) \quad \varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{41}\},$$

przy czym ε_{22} oznacza odkształcenie obwodowe.

Macierz operatorowa ma postać

$$(4.5) \quad \partial_{\partial} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \frac{1}{x_1} \quad \frac{\partial}{\partial x_4} \right\},$$

a macierz konstytutywna przedstawia się następująco:

$$(4.6) \quad \mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\rho s^2 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \end{bmatrix}$$

Macierz \mathbf{E} przy założeniu $s = c$ można przekształcić do postaci

$$(4.7) \quad \mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -(1-\nu) \end{bmatrix}$$

Macierze funkcji kształtu są identyczne z macierzami w zadaniu poprzednim, to znaczy wyrażają się wzorami (3.4), (3.5), (3.6), ale macierz odkształceń, ze względu na strukturę operatorów (4.5) nie będzie już stała.

Jeśli macierz odkształceń przyjmiemy w postaci

$$(4.8) \quad \mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \quad \mathbf{B}_2 \quad \mathbf{B}_3],$$

to bloki jej będą miały budowę

$$(4.9) \quad \mathbf{B}_i = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i \\ \frac{a_i}{x_1} + b_i + c_i \frac{x_4}{x_1} \\ c_i \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i \\ f_i \\ c_i \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności czasoprzestrzennego elementu pierścieniowego o przekroju trójkątnym można przedstawić w postaci

$$(4.10) \quad \mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix},$$

gdzie Ω oznacza objętość elementu czasoprzestrzennego.

Współczynniki macierzy sztywności, po uwzględnieniu objętości pierścieni można wyrazić za pomocą wzoru

$$(4.11) \quad K_{ij} = \frac{\pi E}{2\Delta^2 (1+\nu)(1-2\nu)} \int_{\Delta} [(1-\nu) b_i b_j + f_i f_j - c_i c_j + \\ + \nu (f_i b_j + b_i f_j)] x_1 dx_1 dx_4.$$

Skalkujmy tę funkcję, stosując trzypunktową kwadraturę Gaussa o równych wagach. Otrzymamy

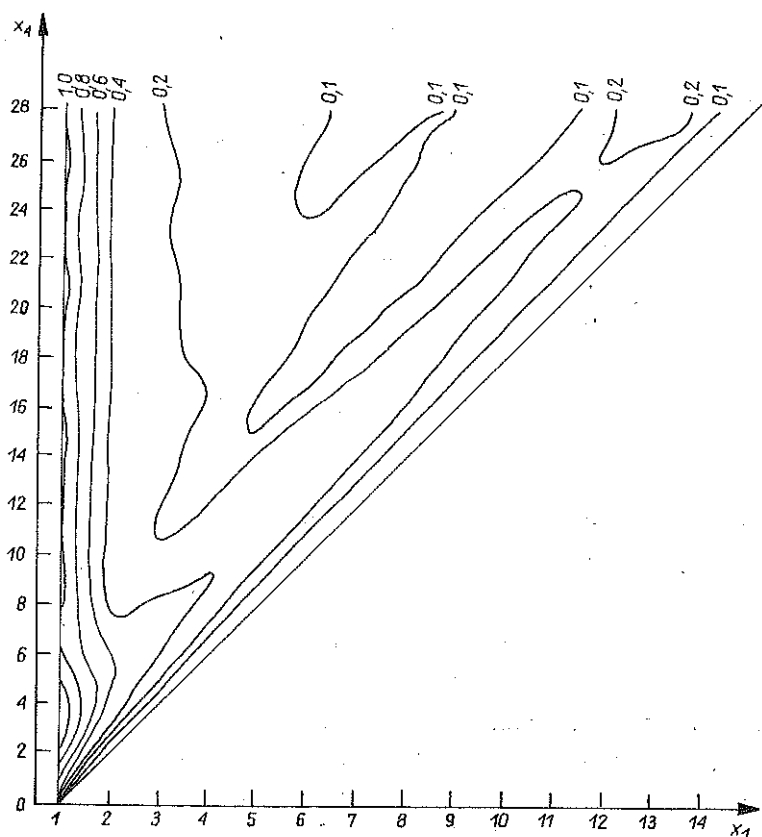
$$(4.12) \quad K_{ij} = \frac{\pi E}{6\Delta (1+\nu)(1-2\nu)} \sum_{n=1}^2 F_{ij}^n,$$

gdzie wyrażenie pod znakiem sumy ma postać

$$(4.13) \quad F_{ij}^n = [(1-\nu) b_i b_j + f_i^n f_j^n - c_i c_j + \nu (f_i^n b_j + b_i f_j^n)] x_1^n,$$

a f_i^n , f_j^n , x_1^n oznaczają wartości odpowiednich funkcji w punktach Gaussa.

Po wyznaczeniu macierzy sztywności kolejnych elementów czasoprzestrzennych można przystąpić do obliczenia przemieszczeń. Podobnie jak w poprzednim przykładzie i tu przemieszczenia na linii czoła fali są zerowe, co wystarcza do obliczenia z każdego równania po jednej niewiadomej.



Rys. 11

Na rys. 11 przedstawiono plan warstwiczny przemieszczeń, przy czym rzędne warstwicz pomnożone są przez $(1+\nu/E)/pa$. Wodoczne jest, że po oddaleniu się zaburzenia ugięcia na brzegu walca dążą do pewnej wielkości stałej, którą jest przemieszczenie wywołane działaniem obciążenia przyłożonego w sposób statyczny.

5. UWAGI KOŃCOWE

Zaprezentowane przykłady stanowiły ilustrację zastosowania metody elementów czasoprzestrzennych z trójkątną siatką. Zalety takiej siatki, ze względu na możliwość rozdzielania równań, są niewątpliwe, zwłaszcza że stosunkowo prosto można analizować różne warianty zagadnień brzegowo-początkowych.

Z uwagi na to zbudowany został program na maszynie cyfrową, umożliwiający realizację nie tylko zadań z elementami trójkątnymi, lecz także czworobocznymi, niezbędnymi w analizie dźwigarów powierzchniowych. Doświadczenia z takich badań przedstawione zostaną w dalszych publikacjach.

Istotnym mankamentem metody elementów czasoprzestrzennych z siatką trójkątną jest w obecnym stanie rozwoju brak jasno sformułowanego kryterium stabilności. Co prawda w praktyce także w zagadnieniach z siatką stacjonarną, jak np. w klasycznej wersji metody elementów czasoprzestrzennych lub w metodzie Newmarka czy Wilsona, nie łatwo jest korzystać z kryteriów stabilności, ze względu na konieczność szacowania największej częstości drgań własnych, lub badania dodatkowo określoności pewnych macierzy.

W odróżnieniu od metod z siatką stacjonarną, gdzie badanie stabilności można przeprowadzić dla układu o jednym stopniu swobody, w przedstawionej metodzie ten sposób zawodzi. Można jednak spodziewać się, że w niedługim czasie i ten problem zostanie rozwiązany.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. Z. KĄCZKOWSKI, *The method of finite space-time elements in dynamics of structures*, J. Techn. Phys., **16**, 1, 1975.
2. J. LANGER, M. KLASZTORNY, *Analiza kolokacyjnych metod numerycznego całkowania równań ruchu*, Mech. Komp., **6**, 1983.
3. Z. KACPRZYK, T. LEWIŃSKI, *Comparison of some numerical integration methods for the equations of motion of systems with a finite number of degrees of freedom*, Rozpr. Inż., **31**, 2, 1983.
4. M. WITKOWSKI, *O czasoprzestrzeni w dynamice budowli*, Prace nauk. Politechniki Warszawskiej, Budownictwo, **80**, 1983.
5. M. KRZYŻAŃSKI, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego, cz. II*, PWN, Warszawa 1962.
6. J. T. ODEN, *A general theory of finite elements, II. Applications*, Int. J. Num. Meth. Eng., **1**, 3, 1969.
7. Z. KĄCZKOWSKI, *O stosowaniu nieprostokątnych elementów czasoprzestrzennych*, Mech. Teor. Stos., **21**, 4, 1983.
8. Z. KĄCZKOWSKI, *Metoda czasoprzestrzennych elementów skończonych*, Arch. Inż. Łąd., **22**, 3, 1976.
9. W. NOWACKI, *Dynamika budowli*, Arkady, Warszawa 1972.

РЕЗЮМЕ

ТРЕУГОЛЬНЫЕ ВРЕМЕНИ-ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В АНАЛИЗЕ ВОЛНОВЫХ ЗАДАЧ

В работе сформулировано метрическое времени-пространство путем принятия некоторой скорости градуирующей ось времени. Это времени-пространство разделено при помощи сетки треугольных элементов, получая в результате разделенные уравнения, уравнения метода времени-пространственных элементов. Такой алгоритм применен к решению двух краево-начальных задач типа Пикара, именно распространения продольной волны в простом стержне и плоской цилиндрической волны в неограниченной среде.

SUMMARY

TRIANGULAR TIME-SPACE ELEMENTS IN THE ANALYSIS OF WAVE PROBLEMS

A metric time-space is formulated by assuming a certain velocity to scale the time-axis. The time-space is divided into triangular elements what results in separation of the equations of the time-space element method. This algorithm is applied to the solution of two Picard-type initial-boundary value problems: propagation of longitudinal waves in a straight rod and of a cylindrical wave in an unbounded medium.

POLITECHNIKA WARSZAWSKA
INSTYTUT MECHANIKI KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 stycznia 1985 r.
