

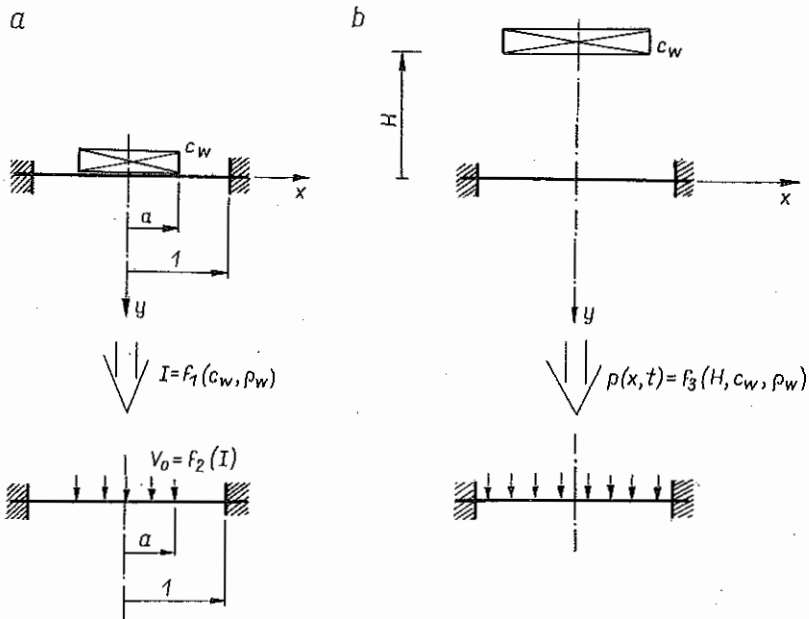
## PRZYBLIŻONE ROZWIĄZANIA W DYNAMICE NIESPRĘŻYSTYCH MEMBRAN CZEŚĆ I

WŁODZIMIERZ I D C Z A K (WARSZAWA)

Przedstawiono metodę uproszczonego rozwiązania zagadnienia dużych ugięć cienkich sztywno lepkoplastycznych płyt kołosymetrycznych obciążonych idealnym impulsem początkowym. Przedstawiono rozwiązanie dla kilku wariantów związków konstytutywnych oraz okoliczności wyboru jednego z nich w zależności od stopnia wrażliwości materiału płyty na prędkość odkształcenia oraz wartości promienia strefy przyłożenia idealnego impulsu obciążającego. Otrzymane wyniki teoretyczne porównywano z wynikami eksperymentalnymi opublikowanymi w przytoczonej literaturze.

### 1. WSTĘP

W technicznych zastosowaniach mechaniki spotykamy pewne modele obiektów rzeczywistych narażonych na oddziaływanie detonacji kontaktowego lub niekontaktowego ładunku materiału wybuchowego (rys. 1). W pierwszym z wymienionych przypadków rozwiązanie odpowiedniego zadania teoretycznego odbywa się przy niezerowych warunkach początkowych, określających początkową prędkość przemieszczenia obiektu  $V_0$  zależną od parametrów ładunku materiału wybuchowego  $c_w$  i jego gęstości  $\rho_w$  przy zerowym obciążeniu. Jest to zatem zagadnienie jednorodne z niezerowymi warunkami początkowymi. W drugim przypadku otrzymujemy niejednorodne równania ruchu z zerowymi warunkami początkowymi, w których parametry obciążenia  $p(t, x)$  zależą od wielkości i rodzaju ładunku oraz odległości  $H$  centrum detonacji od obiektu. Jeśli rozważanym modelem jest sztywno lepkoplastyczna membrana kołosymetryczna podlegająca dużym ugięciom plastycznym, to równania opisujące zakres dużych ugięć są równaniami nieliniowymi ze zmiennymi współczynnikami, a ich rozwiązanie stanowi oddzielny, istotny ale skomplikowany problem. Wstępną propozycję rozwiązania pełnego zagadnienia dużych ugięć membrany sztywno lepkoplastycznej obciążonej falą ciśnienia podano w pracy [2], wyniki zaś odpowiednio wybranych eksperymentów przedstawiono w [10]. Dokładne rozwiązanie tego zagadnienia



Rys. 1

opierające się na metodzie różnic skończonych jest przedmiotem rozważań i będzie opublikowane w oddzielnym opracowaniu.

W zastosowaniach praktycznych interesują nas często pewne przybliżone rozwiązania typu inżynierskiego omawianych zagadnień, co pociąga za sobą konieczność dokonania odpowiednich założeń upraszczających. Założenia takie można formułować na kolejnych etapach rozwiązywania zagadnienia, mianowicie 1) na etapie formułowania równań równowagi, 2) na etapie adoptowania związków konstytutywnych oraz 3) na etapie przyjmowania odpowiedniej metody całkowania równań ruchu.

W pracy naszej przedstawiono inżynierskie, uproszczone sformułowania zagadnienia dynamiki sztywno-lepkoplastycznych cienkich płyt kołosymetrycznych obciążonych początkowym idealnym impulsem, traktując ją jako pierwszą część omawianego wyżej zagadnienia. W drugiej części przedstawiono rozwiązanie odpowiadające obciążeniu membrany falą ciśnienia o znanych parametrach jako zagadnienie częściej spotykane w praktyce, rzadko natomiast opisywane w literaturze.

Przyjmowane założenia upraszczające są w obu przypadkach jednakowe i ograniczają się do następujących elementów:

1) równania równowagi formułowane są w ramach teorii umiarkowanie dużych ugięć,

2) jako związki konstytutywne przyjmuje się potęgową doświadczalną postać stowarzyszonego prawa płynięcia [4] oraz koncepcję Wierzbickiego, tzw. niestowarzyszonego prawa płynięcia [6],

3) ograniczono się do całkowitego spełniania równań równowagi sprowadzając zagadnienie do rozwiązania równania ruchu punktu środkowego membrany.

Wyniki otrzymane na podstawie przyjętych założeń są następnie porównane z wynikami eksperymentalnymi opublikowanymi przez Symonds i Bodnera. Zakłada się, iż ich zgodność będzie dopuszczała możliwość zastosowania proponowanych opisów uproszczonych w praktycznych obliczeniach inżynierskich.

Założono ponadto, że wyniki porównań opisów uproszczonych i eksperymentów mogą być przeniesione do zakresu ugięć dużych membrany rzędu  $(w_0/h) = 20$ , gdzie  $w_0/h$  jest ugięciem centralnego punktu membrany odniesionym do jej początkowej grubości. Założenie to uzasadniają rezultaty badań przedstawione w [10].

Omawiane w pracy membrany mają praktyczne zastosowanie jako elementy pomiarowe mechanicznych czujników ciśnień szeroko stosowanych co najmniej w dwóch przypadkach, tzn. w rejonie źródła propagacji fali uderzeniowej oraz jako urządzenia umożliwiające masowe pomiary amplitudy ciśnienia na dużych obszarach. Opis wykorzystania mechanicznych czujników ciśnień podano w [12].

## 2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Rozważamy membranę kołowąsymetryczną o promieniu  $R$ , grubości  $h$  i gęstości powierzchniowej  $m$ , obciążoną idealnym impulsem początkowym  $I$  rozłożonym równomiernie i symetrycznie wokół jej punktu środkowego na powierzchni o promieniu  $aR$ , gdzie  $0 \leq a \leq 1$ .

Równania równowagi dla powierzchni środkowej membrany we współrzędnych biegunowych  $(r, \theta)$  poprawne przy ugięciach umiarkowanie dużych mają postać [1]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (rN_r, W_r)_{,r} + Pr &= mr\dot{W}, \\ (rN_r)_{,r} - N_\theta &= mr\ddot{U}, \end{aligned}$$

gdzie  $N_r$ ,  $N_\theta$  oznaczają siły membranowe odpowiednio radialną i obwodową,  $W$ ,  $U$  składowe wektora przemieszczenia odpowiednio prostopadłą i równoległą do powierzchni środkowej membrany przed odkształceniem oraz  $P(t)$  zewnętrzną siłę powierzchniową.

Przyjmując w (2.1)  $U \ll W$ ,  $N_0 \ll N_r$ , co jest równoznaczne z pominięciem w równaniach ruchu wyrazów małych wyższego rzędu, oraz przyjmując zgodnie z założeniem  $P(t) = 0$  otrzymujemy

$$(2.2) \quad (rN_r W_r)_{,r} = m\dot{W}.$$

Wprowadzając do (2.2) wielkości bezwymiarowe wg wzorów

$$(2.3) \quad w = \frac{W}{h}, \quad \varrho = \frac{r}{R}, \quad p = P \frac{R}{N_0},$$

$$n_r = \frac{N_r}{N_0}, \quad \tau = \frac{tV_0}{h},$$

gdzie  $N_0 = \sigma_0/h$  oznacza uplastyczniającą siłę membranową oraz  $V_0$  początkową wartość prędkości przyłożoną do membrany w przedziale  $(0, a)$  związaną z impulsem początkowym wzorem

$$(2.4) \quad V_0 = \frac{I}{\pi (aR)^2 m},$$

otrzymujemy równanie równowagi w postaci bezwymiarowej

$$(2.5) \quad (\varrho n_r w_{,r})_{,r} - \frac{R^2 m V_0^2}{h^2 N_0} \varrho \ddot{w} = 0.$$

### 3. METODA ROZWIĄZANIA

Będziemy żądali całkowitego spełnienia równań równowagi, tzn.

a) założymy istnienie stacjonarnego pola prędkości przemieszczeń opisanego układem funkcji ortogonalnych o postaci np.

$$(3.1) \quad \Phi_n(\varrho) = 1 - \varrho^{2+n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

b) ugięcia dowolnego punktu membrany określimy szeregiem

$$(3.2) \quad w(\varrho, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n(\tau) \Phi_n(\varrho),$$

gdzie nieznanne amplitudy  $w_n(\tau)$  wyznaczymy z układu równań

$$(3.3) \quad \int_0^1 L(w) \Phi_i \varrho d\varrho = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$$

c) przyjmując w pierwszym przybliżeniu  $n = 0$ , tzn.

$$(3.4) \quad w(\varrho, \tau) = w_0(\tau) \Phi_0(\varrho),$$

$$\Phi_0(\varrho) = 1 - \varrho^2,$$

gdzie  $w_0(\tau)$  oznacza ugięcie środkowego punktu membrany oraz  $\Phi_0(\varrho)$  funkcję kształtu i wykorzystując całkowanie wg (3.3), otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ruch środkowego punktu membrany

$$(3.5) \quad \ddot{w}_0 = f(\dot{w}_0, w_0)$$

rozważanej np. jako element pomiarowy mechanicznego czujnika ciśnień [2].

#### 4. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

Rozwiązania dotyczą cienkich płyt podlegających dużym trwałym ugięciom, zatem w równaniach konstytutywnych możemy pominąć wyrazy opisujące oddziaływania sprężyste i ograniczyć się do prawa płynięcia plastycznego dla materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia, które w omawianym przypadku przyjmie postać [3]

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{2\dot{\epsilon}_r + \dot{\epsilon}_\theta}{\sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}} (k + a \sqrt[2\delta]{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}), \\ \sigma_\theta &= \frac{2\dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_r}{\sqrt{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}} (k + a \sqrt[2\delta]{\dot{\epsilon}_r^2 + \dot{\epsilon}_r \dot{\epsilon}_\theta + \dot{\epsilon}_\theta^2}), \end{aligned}$$

gdzie  $a = k/\sqrt[2\delta]{\gamma}$  oraz gdzie  $k$  oznacza granicę plastyczności na ścinanie,  $\sigma_r, \sigma_\theta$  naprężenia główne,  $\gamma$  stałą określającą właściwości lepkie materiału oraz  $\delta$  bezwymiarową stałą materiałową.

Ze względu na nieliniową postać wzorów (4.1) oraz na fakt, iż ograniczamy się w opisie do zagadnienia jednowymiarowego, pomijając oddziaływania obwodowe, możemy przyjąć jako stowarzyszone prawo płynięcia potęgową funkcję konstytutywną otrzymaną w jednoosiowej próbie wytrzymałościowej [4]

$$(4.2) \quad \sigma = \sigma_0 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]$$

Wartość prędkości odkształcenia  $\dot{\epsilon}$  występującej w równaniu (4.2) będziemy traktowali jako średnią z całej powierzchni membrany  $S$ :

$$(4.3) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{1}{S} \int_S \lambda_r dS.$$

Jeśli skorzystamy ze wzorów odkształceniowo-przemieszczeniowych

$$(4.4) \quad \lambda_r = W_r \dot{W}_r,$$

do których podstawimy funkcje (3.4), to po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych wg (2.3) otrzymamy

$$(4.5) \quad \dot{\epsilon}_r = \frac{2hV_0}{R^2} w_0 \dot{w}_0.$$

Na koniec potęgowe równanie konstytutywne (4.2) przyjmie w rozważanym przypadku następującą postać bezwymiarową:

$$(4.6) \quad \sigma = 1 + \left( \frac{2hV_0}{\gamma R^2} \right)^{\frac{1}{\delta}} w_0^{\frac{1}{\delta}} \dot{w}_0^{\frac{1}{\delta}}.$$

Badając wpływ związków konstytutywnych na proces ruchu membrany obciążonej idealnym impulsem początkowym wykorzystamy koncepcję WIERZBICKIEGO, tzw. niestowarzyszone prawo płynięcia [6], będące liniową funkcją względnych naprężeń i aktualnej prędkości odkształceń.

Zlinearyzowane związki konstytutywne niestowarzyszonego prawa płynięcia dla cienkich powłok podane w [6] i [7] sprowadzą się w przedstawianym przypadku do jednego równania bezwymiarowego

$$(4.7) \quad n_r - n_r^* = \frac{4hV_0}{\sqrt{3} \gamma^* R^2} \frac{\sigma_0^*}{\sigma_0} w_{,e} \dot{w}_{,e},$$

gdzie  $n_r^*$  oznaczają siły wewnętrzne określone na granicznej powierzchni płynięcia, równoważone przez obciążenie graniczne  $p^*(w_0)$

$$(4.8) \quad (qn_r^* w_{,e})_{,e} = \begin{cases} -\frac{R}{h} qp^*(w_0), & \text{jeśli } 0 \leq \varrho \leq a, \\ 0, & \text{jeśli } a < \varrho \leq 1. \end{cases}$$

Naprężenia  $\sigma_0^*$  oraz współczynnik lepkości  $\gamma^*$  związane z powierzchnią graniczną wyznaczone są wg propozycji WIERZBICKIEGO i SYMONDSA [8] na drodze liniowej aproksymacji potęgowego związku konstytutywnego (4.2).

Obciążenie graniczne  $p^*(w_0)$  wyznaczamy, spełniając następujący warunek energetyczny:

$$(4.9) \quad \int_0^R N_0^* \lambda_r r dr = \int_0^{aR} P^*(W_0) \dot{W} r dr,$$

który po wykorzystaniu wzorów (4.4) i (2.3) sprowadza się do postaci bezwymiarowej, będącej rozszerzeniem wzoru ONATA i HEYTHORNTHWAITE'A [5] na przypadek obciążenia określonego równaniem (4.8)

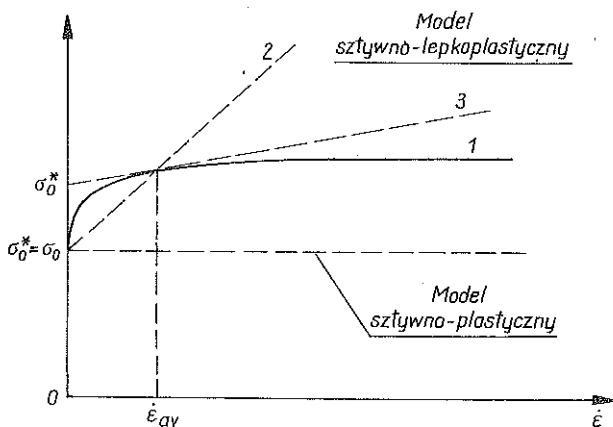
$$(4.10) \quad p^*(w_0) = \frac{4\sigma_0^* w_0 h}{\sigma_0 R} \left( \frac{1}{2a^2 - a^4} \right).$$

## 5. APROKSYMACJA LINIOWA

Nieliniową funkcję (4.2) można aproksymować linią prostą o równaniu

$$(5.1) \quad \sigma = \sigma_0^* + \frac{\sigma_0}{\gamma^*} \dot{\epsilon},$$

która może być styczna lub sieczna do krzywej (4.2) w wybranym punkcie  $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_{av}$  (rys. 2). Na rys. 2 oraz na rysunkach (3–14) przedstawionych w p. 7 poszczególne krzywe dotyczą: 1 — nieliniowego związku materiałowego, 2 — aproksymacji nieliniowego związku materiałowego sieczną, 3 — aproksymacji nieliniowego związku materiałowego styczną.



Rys. 2

W przypadku aproksymacji styczną nowe stałe określa się ze wzorów

$$(5.2) \quad \sigma_0^* = \left[ 1 + \left( 1 - \frac{1}{\delta} \right) \left( \frac{\dot{\epsilon}_{av}}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right]^{\delta} \sigma_0,$$

$$\gamma^* = \delta \dot{\epsilon}_{av} \left( \frac{\gamma}{\dot{\epsilon}_{av}} \right)^{\frac{1}{\delta}},$$

w przypadku zaś aproksymacji sieczną ze wzorów

$$(5.3) \quad \sigma_0^* = \sigma_0,$$

$$\gamma^* = \dot{\epsilon}_{av} \left( \frac{\gamma}{\dot{\epsilon}_{av}} \right)^{\frac{1}{\delta}}.$$

Punkt na krzywej (4.2), określający prędkość odkształcenia, wokół którego dokonujemy aproksymacji liniowej, jest związany z opisywanym zagadnieniem w ten sposób, że wyznacza on średnią całkową prędkości odkształcenia membrany w procesie obciążenia. W rozważanym zagadnieniu membrany obciążonej impulsem początkowym oszacowano  $\dot{\epsilon}_{av}$ , przyjmując znane rozwiązanie dla membrany idealnie plastycznej.

Wzór pozwalający wyznaczyć  $\dot{\epsilon}_{av}$  podano w [9]. Ma ona postać

$$(5.4) \quad \dot{\epsilon}_{av} = \frac{2I^2 \left( 3a^2 - \frac{3}{2} a^4 \right)}{\pi^3 a^2 R^5 m^2} \sqrt{\frac{2m(2a^2 - a^4)}{7h\sigma_0(5a^3 - 3a^5)}}$$

## 6. RÓWNIANIA RUCHU

Dokonując przekształceń równań (2.5), (4.8), (4.7) i podstawiając do nich obciążenia graniczne (4.10), otrzymujemy nieliniowe równanie różniczkowe cząstkowe opierające się na koncepcji niestowarzyszonego prawa płynięcia plastycznego:

$$(6.1) \quad \rho w_{,e} w_{,ee} \dot{w}_{,e} + (w_{,e})^2 \dot{w}_{,e} - \alpha \rho \ddot{w} = \beta \rho w_0,$$

gdzie

$$(6.2) \quad \alpha = \frac{\sqrt{3} \gamma^* R^4 m V_0}{4h^4 \sigma_0^*}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3} \gamma^* R^2}{h V_0 (2a^2 - a^4)}$$

Poszukując przybliżonego rozwiązania równania (6.1) wg algorytmu przedstawionego w p. 3 z funkcją kształtu profilu prędkości, spełniającą warunki brzegowe zadania, redukujemy problem cząstkowy do równania różniczkowego zwyczajnego określającego ruch środkowego punktu membrany  $w_0(\tau)$  deformowanej zgodnie z niestowarzyszonym prawem płynięcia (4.7)

$$(6.3) \quad \ddot{w}_0 + \alpha_2 w_0^2 \dot{w}_0 + \beta_2 w_0 = 0,$$

gdzie

$$(6.4) \quad \alpha_2 = \frac{48 \sigma_0^* h^4}{\sqrt{3} \gamma^* R^4 m V_0}, \quad \beta_2 = \frac{7(5a^3 - 3a^5) \sigma_0^* h^3}{2(2a^2 - a^4) V_0^2 R^2 m}$$

Parametry graniczne  $\sigma_0^*$  i  $\gamma^*$  wyznaczamy z równań (5.2) lub (5.3).

Poszukując przybliżonego rozwiązania równania (2.5) wg algorytmu przedstawionego w p. 3, ale dla potęgowej postaci funkcji materiałowej otrzymujemy równanie różniczkowe zwyczajne opisujące ruch środkowego punktu membrany  $w_0(\tau)$  deformowanej zgodnie ze stowarzyszonym prawem płynięcia (4.6):

$$(6.5) \quad \ddot{w}_0 + \alpha_1 w_0^{\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)} \dot{w}_0^{\frac{1}{\delta}} + \beta_1 w_0 = 0,$$



gdzie

$$(6.6) \quad \alpha_1 = \frac{6\sigma_0 h^3}{mR^2 V_0^2} \left( \frac{2hV_0}{\gamma R^2} \right)^{\frac{1}{\delta}}, \quad \beta_1 = \frac{6\sigma_0 h^3}{mR^2 V_0^2}.$$

Równania (6.3) oraz (6.5) spełniają następujące warunki początkowe [9]:

$$(6.7) \quad w_0(0) = 0, \quad \dot{w}_0(0) = 3a^2 - \frac{3}{2}a^4.$$

Równania (6.3) oraz (6.5) z warunkami początkowymi (6.7) rozwiązano numerycznie wykorzystując procedury całkowania Runge-Kuttego, przyjmując przy tym kilka wartości impulsu początkowego  $I$  oraz parametry geometryczne i materiałowe membrany zawarte w tabelicy 1. Parametry membrany oraz

Tablica 1

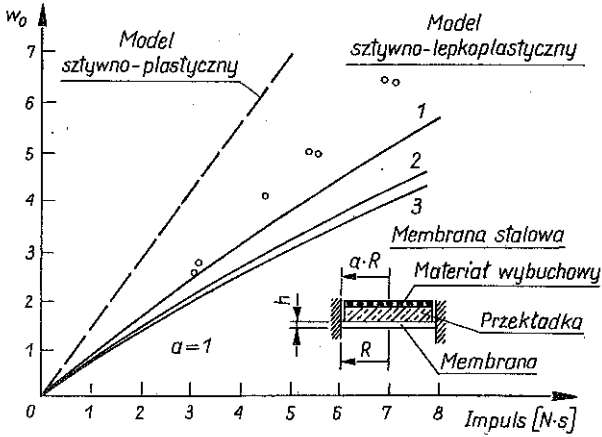
Material		Stal	Tytan
		Parametry	
$\delta$	—	5	9
$a$	—	1; 1/2; 1/3	1; 1/2; 1/3
$m$	$\text{Nm}^{-3}\text{s}^2$	15,15	10,57
$R$	m	$31,8 \cdot 10^{-3}$	$31,8 \cdot 10^{-3}$
$h$	m	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$
$\sigma_0$	$\text{Nm}^{-2}$	$223 \cdot 10^6$	$251 \cdot 10^6$
$\gamma$	$\text{s}^{-1}$	40	120

materiału, z którego jest ona wykonana przedstawione w tabelicy 1 odpowiadają parametrom, dla których prowadzono eksperymenty na stalowych i tytanowych płytach opisane w pracy [4]. Badania zawarte w odpowiedniej literaturze wskazują, iż w zakresie ugięć rozważanych w naszej pracy oddziaływania zgięciowe mogą być pominięte, a zatem rozważano płytę traktując ją jako membranę.

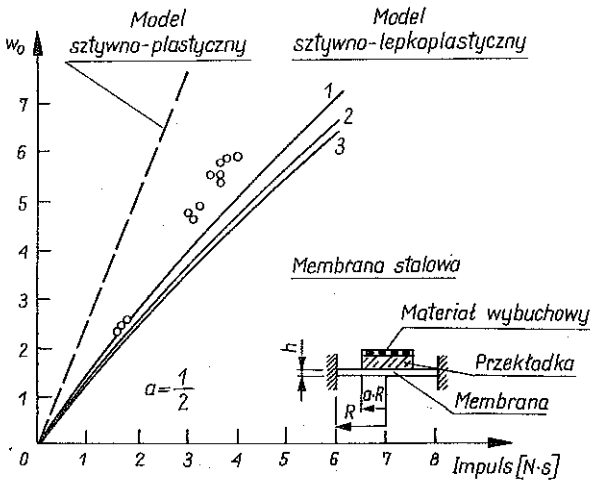
## 7. WYNIKI NUMERYCZNE I Dyskusja

Bezwymiarowe trwałe ugięcie centralnego punktu membrany w zależności od wartości impulsu początkowego otrzymane na podstawie omówionego wyżej podejścia inżynierskiego przedstawiono na rys. 3–8. Na rysunkach tych uwzględniono dwa rodzaje materiału membrany, trzy strefy obciążeń membrany oraz dwa modele materiału: sztywno-plastyczny i sztywno-lepkoplastyczny.

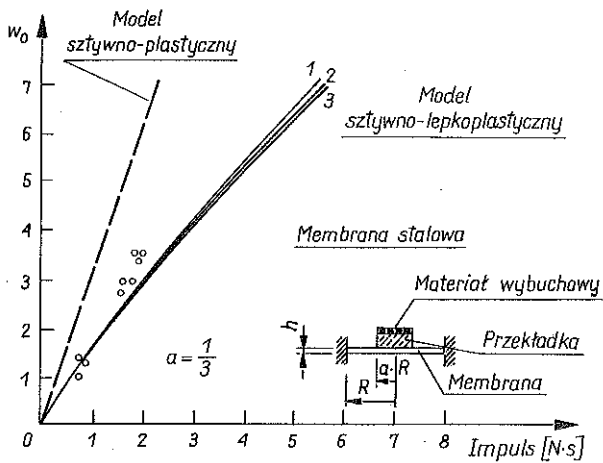
Dla modelu sztywno-lepkoplastycznego przedstawiono krzywe ugięcia odpowiadające przyjęciu nieliniowego równania materiałowego oraz zlinearyzowanym równaniom materiałowym. Wyniki eksperymentalne zostały na tych rysunkach oznaczone kółeczkami [4]. Zgodność wyników teoretycznych uzyskana przy lepkoplastycznym modelu materiału z wynikami eksperymentalnymi jest zadowalająca zwłaszcza dla płyt tytanowych, które są mniej wrażliwe



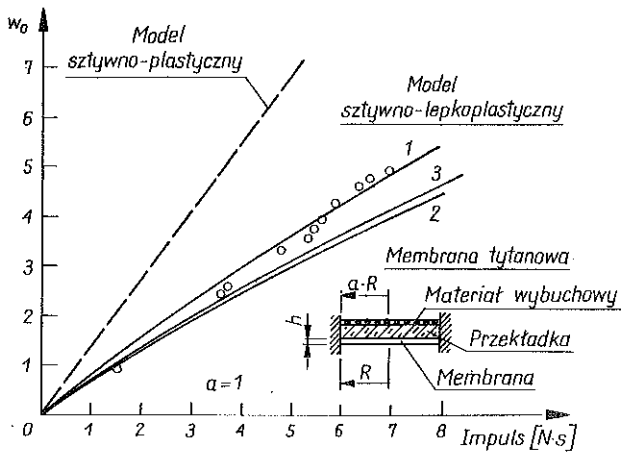
Rys. 3



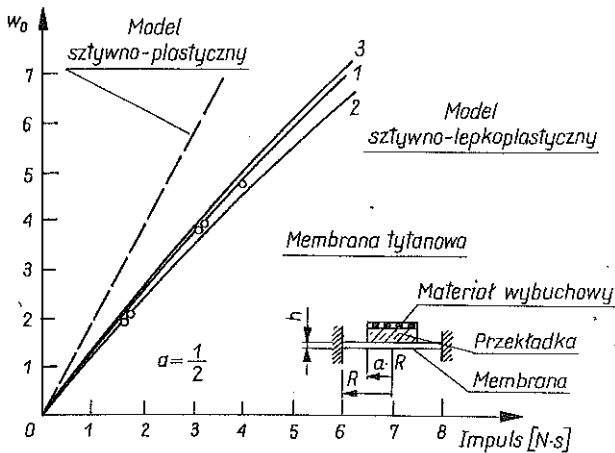
Rys. 4



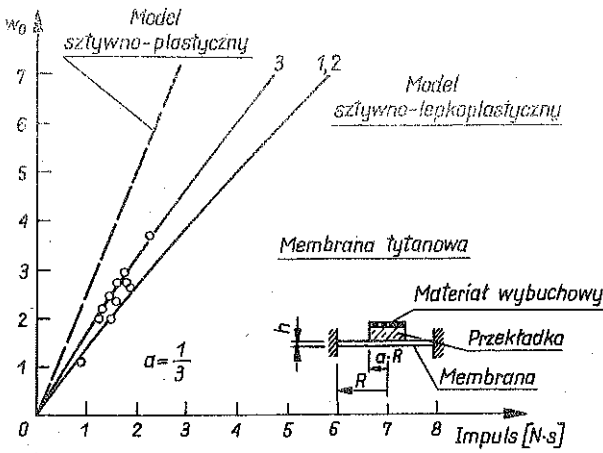
Rys. 5



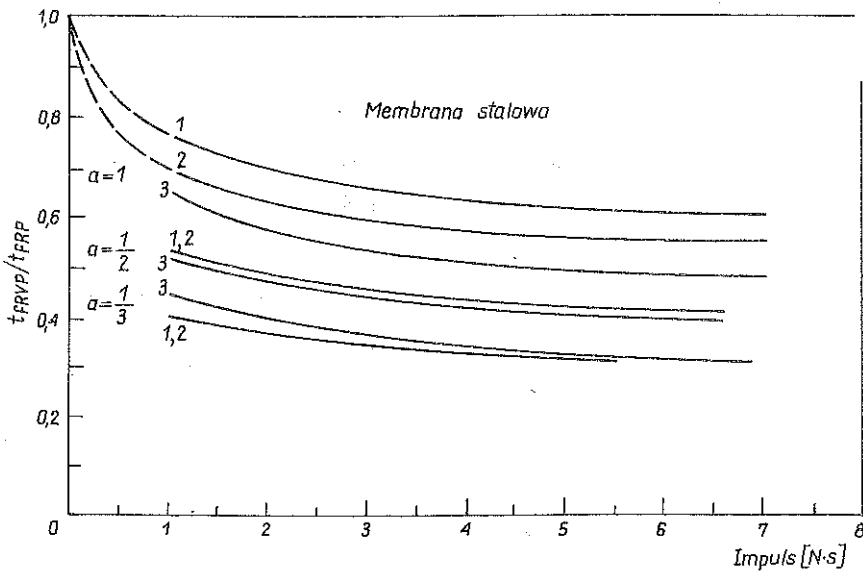
Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

na prędkość odkształcenia. Dodatkowo można stwierdzić, iż lepszą zgodność z eksperymentem zapewnia przyjęcie do rozważań nieliniowego związku materiałowego. Krzywe odpowiadające zlinearyzowanym równaniom materiałowym zbliżają się do krzywej odpowiadającej nieliniowemu równaniu materiałowemu wraz z maleniem centralnej strefy obciążenia zewnętrznego.

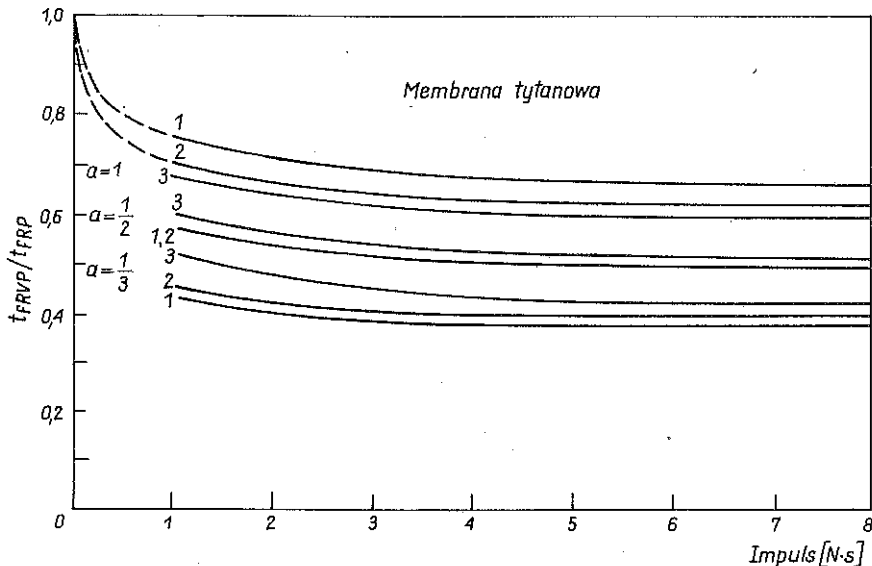
Zależność bezwymiarowego czasu trwania ruchu membrany od wartości impulsu obciążającego podano na rys. 9 i 10. Na rys. 9 poszczególnym

strefom obciążenia odpowiadają czasy trwania ruchu membrany sztywno-plastycznej odpowiednio:  $a = 1$ ,  $t_{TRP} = 112 \mu s$ ;  $a = 1/2$ ,  $t_{TRP} = 144 \mu s$ ;  $a = 1/3$ ,  $t_{TRP} = 175 \mu s$ , zaś na rys. 10:  $a = 1$ ,  $t_{TRP} = 80 \mu s$ ;  $a = 1/2$ ,  $t_{TRP} = 103 \mu s$ ,  $a = 1/3$ ,  $t_{TRP} = 125 \mu s$ . Czas ruchu membrany zależy od wielkości strefy obciążenia i jest tym dłuższy im pole powierzchni przyłożenia obciążenia jest większe. Wraz z maleniem strefy przyłożenia obciążenia maleje różnica w czasach trwania ruchu membrany uzyskanych przy różnych równaniach materiałowych. Przy ustalonej strefie obciążenia czas ruchu membrany maleje wraz ze wzrostem impulsu obciążającego. Wyniki przedstawione na rysunkach 9 i 10 odpowiadają wynikom przedstawionym w [11].

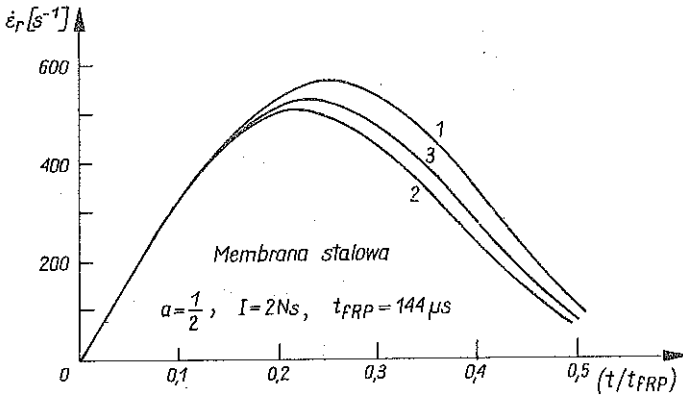
Wykresy przedstawione na rys. 11 i 12 wskazują, iż w pierwszej fazie ruchu badane prawa konstytutywne prowadzą do tych samych prędkości odkształcenia membrany. Różnice zaczynają się pojawiać wraz z rozpoczęciem fazy hamowania ruchu, a więc wraz z maleniem przyrostów prędkości.

W rezultacie końcowe odkształcenia membrany zależne są od przyjętego związku materiałowego, przy czym w zakresie ugięć umiarkowanie dużych, rozbieżności między odpowiednimi krzywymi są niewielkie. Przedstawiono to na rys. 13 i 14.

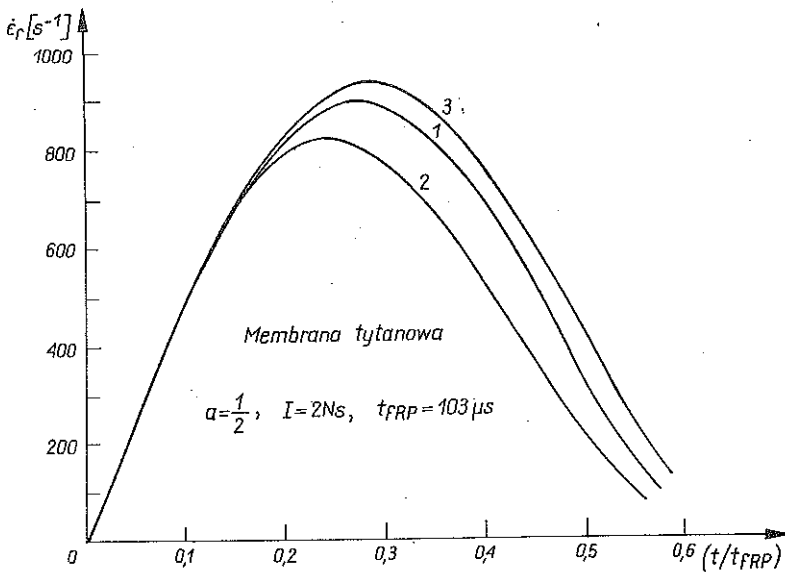
Z rys. 13 i 14 wnioskuje się, iż decydując się na przybliżone, inżynierskie rozwiązanie zagadnienia dużych ugięć membran wrażliwych na prędkość odkształcenia i dążąc do uzyskania wyników najbardziej zbliżonych do eksperymentalnych, należy uzależnić przyjęcie określonych związków materiałowych od następujących czynników:



Rys. 10



Rys. 11

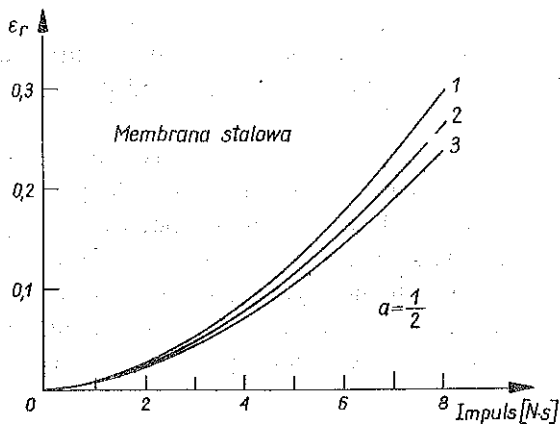


Rys. 12

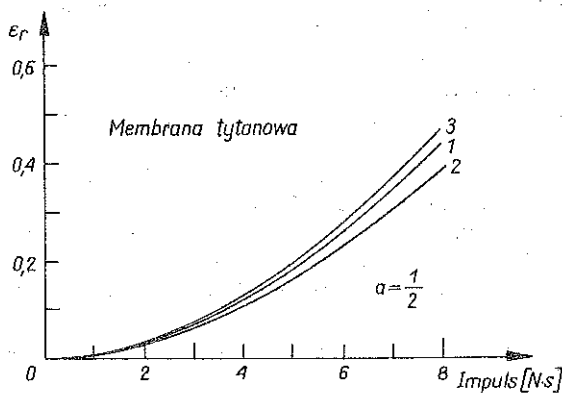
1) wrażliwości materiału na prędkość odkształcenia wyrażonej parametrami  $\gamma$ ,  $\delta$ ,

2) szerokości strefy przyłożenia prędkości początkowej  $V_0$  określonej w opracowaniu parametrem  $a$ .

Obserwujemy bowiem, iż w przypadku materiału wrażliwego na prędkość odkształcenia (rys. 3–5 stal) przy ustalonej strefie obciążenia  $a = \text{const}$ , nieliniowe równanie konstytutywne daje wyniki najbardziej zbliżone do eksp-



Rys. 13



Rys. 14

rymentalnych, natomiast liniowa aproksymacja równania konstytutywnego daje wyniki nieco zaniżone. Ponadto wraz z maleniem strefy obciążenia, tzn. dążąc z obciążeniem powierzchniowym do obciążenia punktowego, otrzymujemy jednakowe ugięcie membrany niezależnie od przyjętego modelu konstytutywnego materiału membrany.

Dla materiału mało wrażliwego na prędkość odkształcenia (rys. 6–8, tytan) nieliniowe równanie konstytutywne daje trwałe ugięcia membrany pokrywające się z eksperymentalnymi tylko w przypadku obciążenia przyłożonego na całej powierzchni membrany, przy czym liniowe równania konstytutywne prowadzą do nieco zaniżonych wyników. Obserwujemy ponadto, iż przy obciążeniu membrany w obszarze  $a < 1$  ugięcia otrzymane przy nieliniowym związku materiałowym są mniejsze od otrzymanych dla liniowego związku materiałowego ze stałymi wyznaczonymi na drodze aproksymacji stycznej, natomiast większe od wyników otrzymanych dla liniowego związku materia-

łowego ze stałymi wyznaczonymi na drodze aproksymacji sieczną. Ponadto wyniki najbardziej zbliżone do eksperymentalnych daje liniowe równanie konstytutywne ze stałymi wyznaczonymi na drodze aproksymacji krzywej potęgowej sieczną.

Ogólnie można powiedzieć, iż wyniki teoretyczne są bardziej zbliżone do eksperymentalnych w materiałach mniej wrażliwych na prędkość odkształcenia (rys. 3–5 i rys. 6–8), co w tym przypadku umożliwi rozszerzenie stosowalności podejścia inżynierskiego w obszarze większych ugięć trwałych. Np. dla membran mosiężnych nie wykazujących praktycznie wrażliwości na prędkość odkształcenia zakres stosowalności podejścia inżynierskiego przedstawionego w niniejszej pracy obejmuje ugięcia rzędu  $(w_0/h) \approx 20$  [12].

#### LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. G. BAK, W. IDCZAK, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczna membrana kołowa obciążona impulsem ciśnienia*, Biul. WAT, **18**, 8, 1976.
2. W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Large deflection of a rigid-viscoplastic impulsively loaded circular plate*, J. Tech. Phys., **21**, 4, 473–487, 1980.
3. P. PERZYNA, *The constitutive equations for rate sensitive plastic materials*, Quart. Appl. Math., **20**, 321–332, 1963.
4. S. R. BODNER, P. S. SYMONDS, *Experiments on viscoplastic response of circular plates to impulsive loading*, J. Mech. Phys. Solids, **27**, 91–113, 1979.
5. E. T. ONAT, R. M. HEYTHORNHWAITE, *The load-carrying capacity of circular plates at large deflection*, J. Appl. Mech., **23**, 1, 1965.
6. T. WIERZBICKI, *An approximate linear theory of thin viscoplastic shells*, Arch. Mech., **24**, 941–953, 1972.
7. W. WOJEWÓDZKI, T. WIERZBICKI, *Transient response of viscoplastic rectangular plates*, Arch. Mech., **24**, 1972.
8. P. S. SYMONDS, T. WIERZBICKI, *Membrane mode solutions for impulsively loaded circular plates*, J. Appl. Mech., **45**, 1978.
9. W. IDCZAK, T. WIERZBICKI, *Dynamic loading of a viscoplastic membrane*, Appl. Mech., **29**, 7–8, 1981.
10. W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Studies on shock-wave loaded, clamped circular plates*, J. Tech. Phys., **22**, 2, 175–184, 1981.
11. P. S. SYMONDS, T. WIERZBICKI, *Membrane mode solutions for impulsively loaded circular plates*, J. Appl. Mech., **46**, 1979.
12. W. IDCZAK, Cz. RYMARZ, A. SPYCHAŁA, *Sztywno-lepkoplastyczne płyty kołowe pod intensywnym obciążeniem dynamicznym. Analiza teoretyczno-doświadczalna i propozycja zastosowań*, Mech. Teor. i Stos., w druku.

#### РЕЗЮМЕ

#### ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИНАМИКЕ НЕУПРУГИХ МЕМБРАН ЧАСТЬ I

Представлен метод упрощенного решения задачи больших прогибов тонких жестко-вязкопластических круговосимметричных плит нагруженных идеальным начальным им-



пульсом. Представлено решение для нескольких вариантов определяющих соотношений, а также обстоятельства выбора одного из них в зависимости от степени чувствительности материала плиты на скорость деформации и значения радиуса зоны приложения идеального нагружающего импульса. Полученные теоретические результаты сравнивались с экспериментальными результатами опубликованными в приведенной литературе.

#### SUMMARY

### APPROXIMATE SOLUTIONS IN THE DYNAMICS OF INELASTIC MEMBRANES PART I

The paper presents a simplified solution of the problem of large deflections of thin viscoplastic plates of circular symmetry loaded by an initial pulse. The solutions are proposed for several cases of constitutive relations which are selected according to the strainrate sensibility of the material and to the size of the region of application of the ideal impulse loading. The theoretical results obtained are compared with the experimental ones published in the literature.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 8 stycznia 1985 r.*

---