

## EFEKTYWNOŚĆ METOD NUMERYCZNYCH W ZAGADNIENIACH DYNAMIKI

CZESŁAW RYMARZ i IRENEUSZ WINNICKI (WARSZAWA)

W pracy przedstawiono procedurę wyboru metody numerycznej efektywnej dynamicznie dla nieciągłego rozwiązania zagadnienia początkowego. Badania przeprowadzono na przykładzie liniowego i nieliniowego równania adwekcji z uwzględnieniem schematów Laxa-Wendorffa, MacCormacka i schematów różnicowych konstruowanych w przestrzeni Hermite'a elementu skończonego. Przedstawiono analizę wyników obliczeń z punktu widzenia efektywności dynamicznej stosowanych metod.

### 1. WSTĘP

Problem efektywności dynamicznej metod numerycznych staje się bardzo istotny przy rozwiązywaniu nieregularnych zagadnień granicznych w ośrodkach ciągłych. Dotyczy to szczególnie liniowych i nieliniowych problemów falowych, gdzie nieregularności mogą propagować się w sposób niezmienny (brak dyspersji) bądź mogą tworzyć się w czasie propagacji (fale uderzeniowe). We wszystkich tych przypadkach wybrane metody numeryczne powinny poprawnie odtwarzać te nieregularności. Będziemy je nazywać metodami dynamicznie efektywnymi lub fizycznie poprawnymi. Problem poszukiwania takich metod należy uważać generalnie za niezwykle ważny i otwarty pomimo istniejących prac nawiązujących do tego zagadnienia [1–6].

Celem niniejszej publikacji jest zasygnalizowanie tego istotnego problemu i pokazanie na przykładach owocnych prób wyboru metod efektywnych w wyżej wymienionym sensie.

W punkcie 2 zajmiemy się konstrukcją i analizą schematów różnicowych dla liniowego równania adwekcji, a w punkcie 3 dla nieliniowego.

### 2. KONSTRUKCJA SCHEMATÓW RÓZNICOWYCH DLA LINIOWEGO RÓWNIANIA ADWEKCJI I ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Liniowe równanie adwekcji

$$(2.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

opisuje bezdyspersyjne zjawiska falowe w ośrodku ciągłym. W ten sposób dowolne zaburzenie (również nieciągłe) przemieszcza się przez ośrodek w sposób niezmienny. Metody numeryczne na ogół tej własności nie zachowują. Wyraża się to w szeregu efektów numerycznych, o których będzie dalej mowa. Chodzi więc o konstrukcję takich metod numerycznych, które własność bezdyspersyjności równania (2.1) odtwarzałyby możliwie najdokładniej. W tym wyraża się istota modelowania dynamicznego procesów transportowych. Zobaczmy bowiem, że niektóre z metod numerycznych generują przy procesach nieregularnych znaczne efekty niefizyczne (por. [5]).

Wyboru metody efektywnej dynamicznie dokonamy opierając się na porównaniu dwóch rodzajów metod:

1) metody różnic skończonych Laxa-Wendroffa, w której występują wzory (predyktor i korektor) o znanej postaci (por. [3, 4, 8, 9])

$$(2.2) \quad u_{i+1/2}^{n+1/2} = (u_i^n + u_{i+1}^n)/2 - \lambda (u_{i+1}^n - u_i^n) 2,$$

$$(2.3) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda (u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2})$$

lub po wyeliminowaniu kroku pośredniego z warstwy  $n+1/2$

$$(2.4) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + u_0 \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta} = u_0^2 \tau \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta^2},$$

gdzie  $\lambda = \tau u_0 / \Delta$ ;

2) metody elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a (por. np. [7]).

W przestrzeni tej, w odróżnieniu od przestrzeni Lagrange'a, postuluje się postać rozwiązania przybliżonego nie tylko samej poszukiwanej funkcji, ale również jej pochodnych do odpowiedniego rzędu. Ograniczymy się tu do aproksymacji poszukiwanej funkcji  $u$  i jej pierwszej pochodnej przestrzennej  $u_x$  (dalej  $u'$ ). Aproksymacje te mają następującą postać:

$$(2.5) \quad u_h(x, t) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i(t) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{N-1} u'_i(t) \psi_i(x),$$

gdzie  $\varphi_i(x)$  i  $\psi_i(x)$  są funkcjami o nośnikach zwartych w postaci wielomianów drugiego stopnia. Funkcje te tworzą bazę przestrzeni Hermite'a elementu skończonego [7] i zgodnie z (2.5) muszą one spełniać poniższe naturalne warunki:

$$(2.6) \quad \varphi_i(x_i) = 1, \quad \varphi_i(x_{i-1}) = \varphi_i(x_{i+1}) = 0,$$

$$(2.7) \quad \varphi'_i(x_i) = \varphi'_i(x_{i-1}) = \varphi'_i(x_{i+1}) = 0,$$

$$(2.8) \quad \psi_i(x_i) = \psi_i(x_{i-1}) = \psi_i(x_{i+1}) = 0,$$

$$(2.9) \quad \psi'_i(x_i) = 1, \quad \psi'_i(x_{i-1}) = \psi'_i(x_{i+1}) = 0.$$

Mają one następującą postać:

$$(2.10) \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 2((x-x_{i-1})/\Delta)^2, & \text{jeśli } x_{i-1} \leq x \leq x_{i-1/2}; \\ -2((x-x_i)/\Delta)^2 + 1, & \text{jeśli } x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}; \\ 2((x-x_{i+1})/\Delta)^2, & \text{jeśli } x_{i+1/2} \leq x \leq x_{i+1}; \\ 0 & \text{dla pozostałych } x; \end{cases}$$

$$(2.11) \quad \psi_i(x) = \begin{cases} -0,5(x-x_{i-1})^2/\Delta, & \text{jeśli } x_{i-1} \leq x \leq x_{i-1/2}; \\ x-x_i+1,5(x-x_i)^2/\Delta, & \text{jeśli } x_{i-1/2} \leq x \leq x_i; \\ x-x_i-1,5(x-x_i)^2/\Delta, & \text{jeśli } x_i \leq x \leq x_{i+1/2}; \\ 0,5(x-x_{i+1})^2/\Delta, & \text{jeśli } x_{i+1/2} \leq x \leq x_{i+1}; \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Po wstawieniu postaci rozwiązania przybliżonego (2.5) do równania adwekcji (2.1) oraz zastosowaniu procedury rzutowania na podprzestrzenie

$$(2.12) \quad \left( \frac{\partial u_h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_h}{\partial x}, \varphi_i \right) = 0,$$

$$(2.13) \quad \left( \frac{\partial u_h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_h}{\partial x}, \psi_i \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

otrzymujemy układ równań różniczkowo-różnicowych (z pochodną czasową). Pochodne czasowe aproksymujemy różnicami skończonymi. Wybór tej aproksymacji uwarunkowany jest własnością metody elementu skończonego, która dla równań ewolucyjnych prowadzi z zasady do schematów niejawnych, centrowanych lub niecentrowanych w czasie. Wybieramy tu wariant metody niecentrowanej w czasie. W wyniku tej aproksymacji otrzymujemy następujące układy równań różnicowych:

z rzutowania na podprzestrzeń  $\varphi_k(x)$

$$(2.12') \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_{hi} \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{N-1} u'_{hi} \psi_i(x) \right), \varphi_k(x) \right) + \\ + u_0 \left( \sum_{i=1}^{N-1} u_{hi} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + \sum_{i=1}^{N-1} u'_{hi} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x}, \varphi_k(x) \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{N-1} [u_{hi} \varphi_i(x) + u'_{hi} \psi_i(x)] \right) \varphi_k(x) dx + \\ + u_0 \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left[ u_{hi} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + u'_{hi} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x} \right] \right) \varphi_k(x) dx = 0;$$

z rzutowania na podprzestrzeń  $\psi_k(x)$

$$(2.13) \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{N-1} [u_{hi} \varphi_i(x) + u'_{hi} \psi_i(x)] \right) \psi_k(x) dx + \\ + u_0 \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^{N-1} \left[ u_{hi} \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} + u'_{hi} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x} \right] \right) \psi_k(x) dx = 0$$

dla  $k = 1, 2, \dots, N-1$ , co jest równoważne

$$(2.14) \quad H^{n+1} + \lambda L^{n+1} = H^n,$$

$$(2.15) \quad H^{n+1} + \lambda L^{n+1} = H^n,$$

gdzie  $\lambda = u_0 \tau / \Delta$

Do rozwiązywania tego układu ze względu na jego pasmową strukturę zastosowano wektorowy wariant metody „przegnanania” (wektorowa „progonka”). W tym celu układ (2.14) i (2.15) napiszemy w formie umożliwiającej stosowanie algorytmu tej metody:

$$(2.16) \quad -PU_{i-1}^{n+1} + QU_i^{n+1} - RU_{i+1}^{n+1} = F_i^n,$$

gdzie

$$(2.17) \quad U_i^{n+1} = (u_i^{n+1}, u'_i{}^{n+1})^T,$$

$$(2.18) \quad F_i^n = (H_i^n, H_i^m)^T,$$

$$(2.19) \quad P = \begin{bmatrix} 240\lambda - 56, & \Delta(50\lambda - 13) \\ 13 - 50\lambda, & \Delta(3 - 10\lambda) \end{bmatrix},$$

$$(2.20) \quad Q = \begin{bmatrix} 368\lambda, & 100\lambda\Delta \\ -100\lambda, & 10\Delta \end{bmatrix},$$

$$(2.21) \quad R = \begin{bmatrix} -(56 + 240\lambda), & \Delta(13 + 50\lambda) \\ -(13 + 50\lambda), & \Delta(3 + 10\lambda) \end{bmatrix}.$$

Metoda przegnanania (wariant metody eliminacji Gaussa) charakteryzuje się możliwością rekursywnego narastania błędów obliczeniowych. Prowadzi to do sformułowania warunków stabilności algorytmu tej metody. Ujmuje je następujący

LEMAT 2.1. Jeżeli  $Q_j$  ( $0 \leq j \leq N$ ) są macierzami nieosobliwymi, a  $P_j$  i  $R_j$  są macierzami niezerowymi dla  $1 \leq j \leq N-1$  i spełnione są warunki

$$(2.22) \quad \|Q_0^{-1} R_0\| \leq 1, \quad \|Q_N^{-1} P_N\| \leq 1, \quad \|Q_j^{-1} P_j\| + \|Q_j^{-1} R_j\| \leq 1,$$

$j = 1, 2, \dots$

oraz w (2.22) zachodzi przynajmniej jedna ostra nierówność, to algorytm wektorowego wariantu metody przegnania jest poprawny numerycznie i stabilny.

Z warunków (2.22) wynikają ograniczenia na postacie macierzy  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , a tym samym na stosowalność metody przegnania do rozwiązywania układów równań wynikających z zastosowania metody elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a. Macierze  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , jak wynika z ich postaci, zależą od  $\lambda$  i  $\Delta$ . Wyznaczenie obszarów stabilności na płaszczyźnie  $\lambda$ ,  $\Delta$  jest dość skomplikowane, dlatego podajemy tylko oszacowanie: warunki lematu 2.1 są spełnione dla dużych  $\Delta$  i małych  $\lambda$ . Jak widać, są to warunki niekorzystne (duże kroki przestrzenne i małe czasowe), dlatego stosowanie metody przegnania jest w tym przypadku dyskusyjne. Stosowanie innych metod (np. iteracyjnych) rozwiązywania układów równań (2.14), (2.15) mogłoby prowadzić do złagodzenia tych wymagań na  $\Delta$  i  $\lambda$ .

Stosując metody Laxa-Wendroffa i elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a przeprowadzono obliczenia dla nieregularnego zaburzenia początkowego (skokowego)

$$(2.23) \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_1, & \text{jeśli } x \leq x_0, \\ u_2, & \text{jeśli } x \geq x_0, \end{cases} \quad u_2 = 0,1u_1$$

z następującymi współczynnikami obliczeniowymi  $\tau = 1,5$ ;  $\Delta = 5$ ;  $u_0 = 1$ . Współczynniki te zapewniają spełnienie warunków (2.22) wynikających z lematu 2.1. Mianowicie

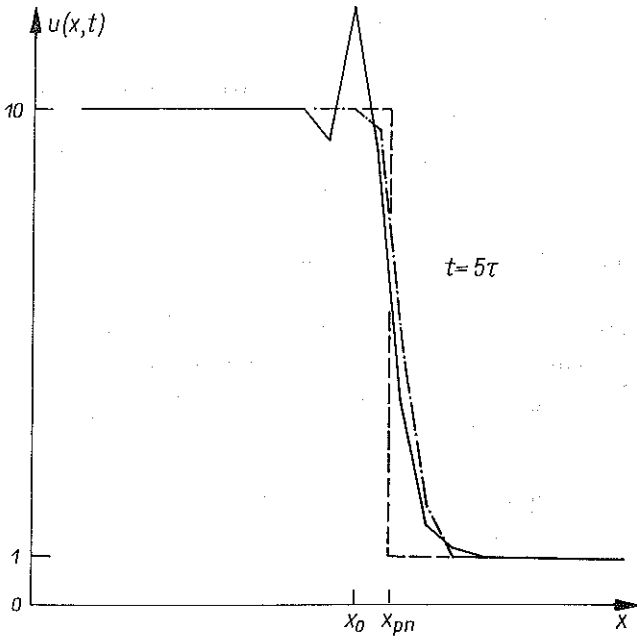
$$(2.24) \quad \|Q^{-1}P\|_2 + \|Q^{-1}R\|_2 = 0,975 < 1.$$

Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 1, 2 i 3. Są to rozwiązania dla różnych chwil czasu:  $t = 5\tau$ ,  $30\tau$ ,  $50\tau$ . Z analizy rysunków wynikają następujące wnioski:

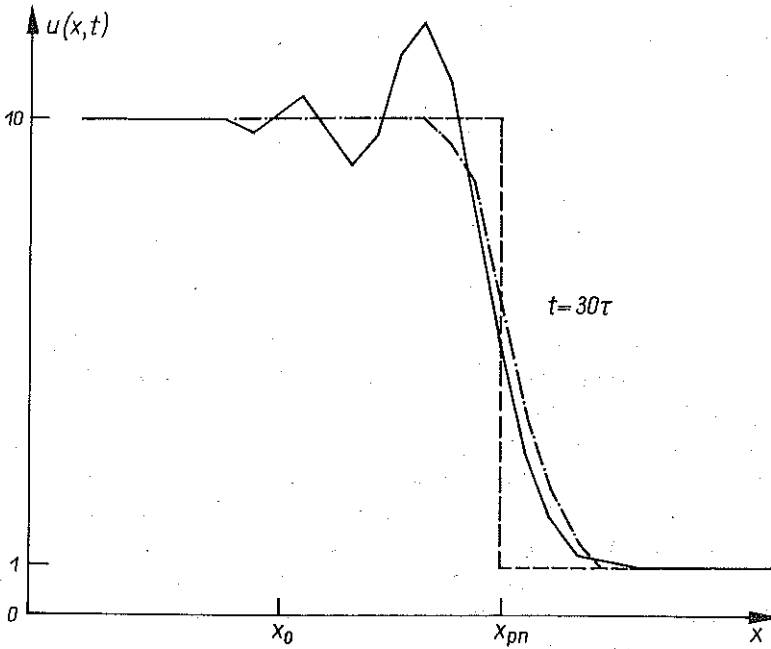
1. W metodzie Laxa-Wendroffa rzędu  $O(\tau^2, \Delta^2)$  pomimo istnienia numerycznej lepkości (por. (2.4)) występują charakterystyczne oscylacje numeryczne w pobliżu nieciągłości. Ponadto, jak widać, zwiększają one swój zasięg w miarę upływu czasu.

2. Metoda elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a nie wprowadza oscylacji rozwiązania w pobliżu nieciągłości rozwiązania ścisłego. W schematach konstruowanych na podstawie metod różnic skończonych efekt ten można uzyskać przez wprowadzenie sztucznej lepkości.

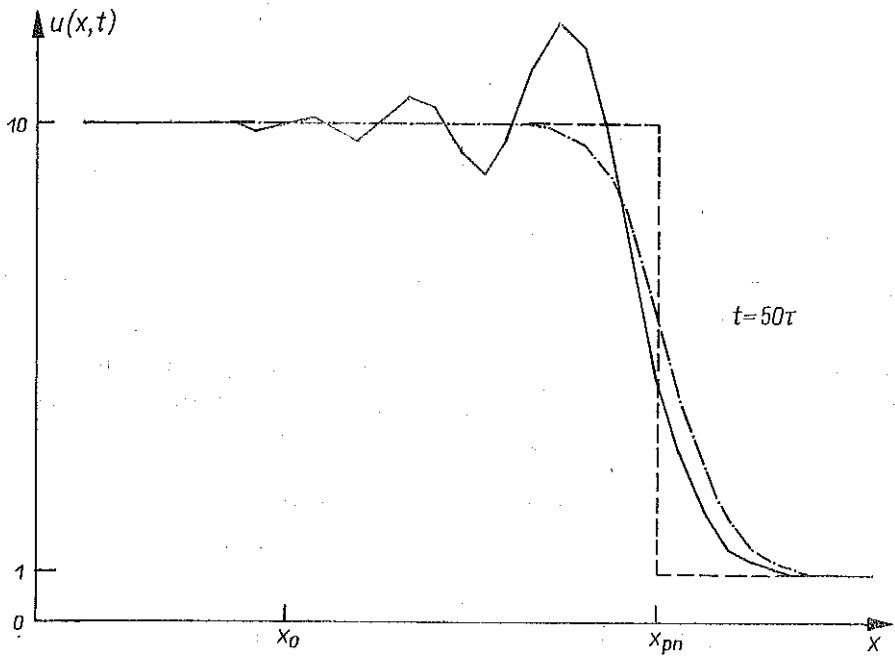
3. Numeryczne rozmycie nieciągłości w obydwu metodach jest porównywalne. Metoda elementu skończonego pozwala jednak zlokalizować położenie nieciągłości rozwiązania ścisłego. Odpowiada ono maksymalnej wartości dodatkowego parametru węzłowego  $|u'|$  w węzłach siatki różnicowej. Jest to szczególnie istotne w zagadnieniach nieliniowych, gdzie prędkość ruchu nieciągłości jest zmienna.



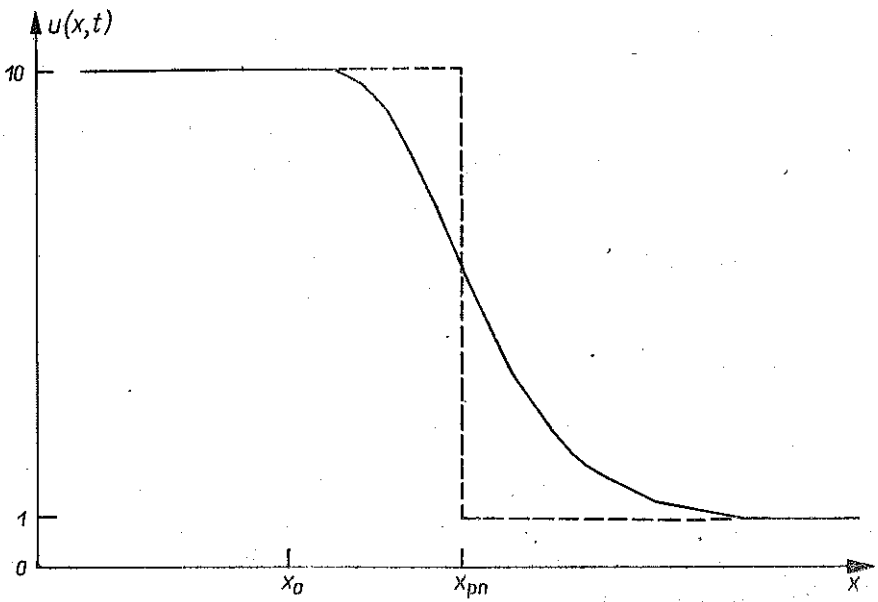
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Na rys. 4 przedstawiono wyniki rozwiązania metodą elementu skończonego dla następujących współczynników  $\tau = 3$ ,  $\Delta = 6$ ,  $u_0 = 3$  ( $\lambda = 1,5$ ). Dla tych współczynników metoda Laxa-Wendroffa jest niestabilna numerycznie. Z analizy warunków (2.22) wynika, że nie spełniony jest tu warunek stabilności algorytmu metody przegnania:

$$(2.25) \quad \|Q^{-1}P\|_2 + \|Q^{-1}R\|_2 = 1,79 > 1.$$

Pomimo to dla  $t = 5\tau$  uzyskano w miarę poprawne wyniki co do rozmycia nieciągłości. Obliczenia dla dalszych chwil czasu zachowują charakter rozwiązania przy zwiększającym się rozmywaniu nieciągłości. Istnienie zadowalających rozwiązań pomimo niespełnienia warunku stabilności wynika przypuszczalnie z dużego  $\Delta$ , a więc tak małej ilości kroków przestrzennych że rekurencyjny błąd obliczeń nie narasta zbyt szybko.

### 3. KONSTRUKCJA SCHEMATÓW RÓZNICOWYCH DLA NIELINIOWEGO RÓWNIANIA ADWEKCJI I ANALIZA UZYSKANYCH WYNIKÓW

Nieliniowe równanie adwekcji

$$(3.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

umożliwia uzyskanie rozwiązań o zmieniających się nieregularnościach, co może prowadzić do generacji rozwiązań nieciągłych (fale uderzeniowe w płynach i ciałach stałych). Stosowane metody numeryczne powinny być dynamicznie efektywne, a więc powinny poprawnie modelować powyższe procesy. Porównamy pod tym względem trzy metody:

metodę Laxa-Wendroffa (z predykatorem i korektorem)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_{i+1/2}^{n+1/2} - (u_{i+1}^n + u_i^n)/2 + \lambda [(u^2)_{i+1}^n - (u^2)_i^n]/4 &= 0, \\ u_i^{n+1} - u_i^n + \lambda [(u^2)_{i+1/2}^{n+1/2} - (u^2)_{i-1/2}^{n+1/2}]/2 &= 0; \end{aligned}$$

metodę MacCormacka (również z predykatorem i korektorem)

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \bar{u}_i - u_i^n + \lambda [(u^2)_{i+1}^n - (u^2)_i^n]/2 &= 0, \\ u_i^{n+1} - (\bar{u}_i + u_i^n)/2 + \lambda [(\bar{u}^2)_i - (\bar{u}^2)_{i-1}]/4 &= 0; \end{aligned}$$

metodę elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a.

Wykorzystując przedstawioną w punkcie 2 procedurę uzyskujemy różnicowy układ równań nieliniowych

$$(3.3) \quad \begin{aligned} (56 + A_{i-1}) u_{i-1} + (13\Delta + A_{i-1}) u'_{i-1} + (368 + A_i) u_i + A_i u'_i + \\ + (56 + A_{i+1}) u_{i+1} + (-13\Delta + A'_{i+1}) u'_{i+1} = F_i, \end{aligned}$$



$$(3.3) \quad \begin{aligned} (-13 + B_{i-1}) u_{i-1} + (-3\Delta + B'_{i-1}) u'_{i-1} + B_i u_i + (10\Delta + B'_i) u'_i + \\ \text{[cd.]} \quad + (13 + B_{i+1}) u_{i+1} + (-3\Delta + B'_{i+1}) u'_{i+1} = F'_i. \end{aligned}$$

Równania te dadzą się napisać w formie uproszczonej i dogodnej do zastosowania wektorowego wariantu metody przegania:

$$(3.4) \quad -P_i(u, u') U_{i-1} + Q_i(u, u') U_i - R_i(u, u') U_{i+1} = E_i(u, u'),$$

gdzie wektory rozwiązań mają postać

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i \\ u'_i \end{bmatrix},$$

a wektor prawych stron

$$E_i = \begin{bmatrix} F_i \\ F'_i \end{bmatrix},$$

$$(3.5) \quad P_i(u, u') = \begin{bmatrix} -(56 + A_{i-1}), & -(13\Delta + A'_{i-1}) \\ 13 - B_{i-1}, & 3\Delta - B'_{i-1} \end{bmatrix},$$

$$(3.6) \quad R_i(u, u') = \begin{bmatrix} -(56 + A_{i+1}), & 13\Delta - A'_{i+1} \\ -(13 + B_{i+1}), & 3\Delta - B'_{i+1} \end{bmatrix},$$

$$(3.7) \quad Q_i(u, u') = \begin{bmatrix} 368 + A_i, & A'_i \\ B_i, & 10\Delta + B'_i \end{bmatrix},$$

oraz

$$A_{i-1} = \lambda (-80u_{i-1} - 19\Delta u'_{i-1} - 160u_i + 31\Delta u'_i),$$

$$A'_{i-1} = \lambda (-12\Delta u_{i-1} - (13/4)\Delta^2 u'_{i-1} - 38\Delta u_i + (29/4)\Delta^2 u'_i),$$

$$A_i = \lambda (80u_{i-1} + 19\Delta u'_{i-1} - 62\Delta u'_i + 19\Delta u'_{i+1} - 80u_{i+1}),$$

$$A'_i = \lambda (-12\Delta u_{i-1} - (11/4)\Delta^2 u'_{i-1} + 124\Delta u_i - 12\Delta u_{i+1} + (11/4)\Delta^2 u'_{i+1}),$$

$$A_{i+1} = \lambda (160u_i + 31\Delta u'_i + 80u_{i+1} - 19\Delta u'_{i+1}),$$

$$A'_{i+1} = \lambda (-38\Delta u_i - (29/4)\Delta^2 u'_i - 12\Delta u_{i+1} + (13/4)\Delta^2 u'_{i+1}),$$

$$B_{i-1} = \lambda (19u_{i-1} + (9/2)\Delta u'_{i-1} + 31u_i - (13/2)\Delta u'_i),$$

$$B'_{i-1} = \lambda ((11/4)\Delta u_{i-1} + (3/4)\Delta^2 u'_{i-1} + (29/4)\Delta u_i - (3/2)\Delta^2 u'_i),$$

$$B_i = \lambda (-19u_{i-1} - (9/2)\Delta u'_{i-1} - 62u_i - 19u_{i+1} + (9/2)\Delta u'_{i+1}),$$

$$B'_i = \lambda ((13/4)\Delta u_{i-1} + (3/4)\Delta^2 u'_{i-1} + (3/4)\Delta^2 u_{i+1} - (13/4)\Delta u_{i+1}),$$

$$B_{i+1} = \lambda (31u_i + (13/2)\Delta u'_i + 19u_{i+1} - (9/2)\Delta u'_{i+1}),$$

$$B'_{i+1} = \lambda (-(29/4)\Delta u_i - (3/2)\Delta^2 u'_i - (11/4)\Delta u_{i+1} + (3/4)\Delta^2 u'_{i+1}).$$

Układ równań nieliniowych (3.3) rozwiązywano wektorowym wariantem metody przegnania z iteracjami

$$(3.8) \quad -P_i^s(u, u') U_i^{s+1} + Q_i^s(u, u') U_i^{s+1} - R_i^s(u, u') U_i^{s+1} = E_i^s(u, u'),$$

gdzie  $s$  oznacza numer iteracji na  $n+1$  kroku czasowym.

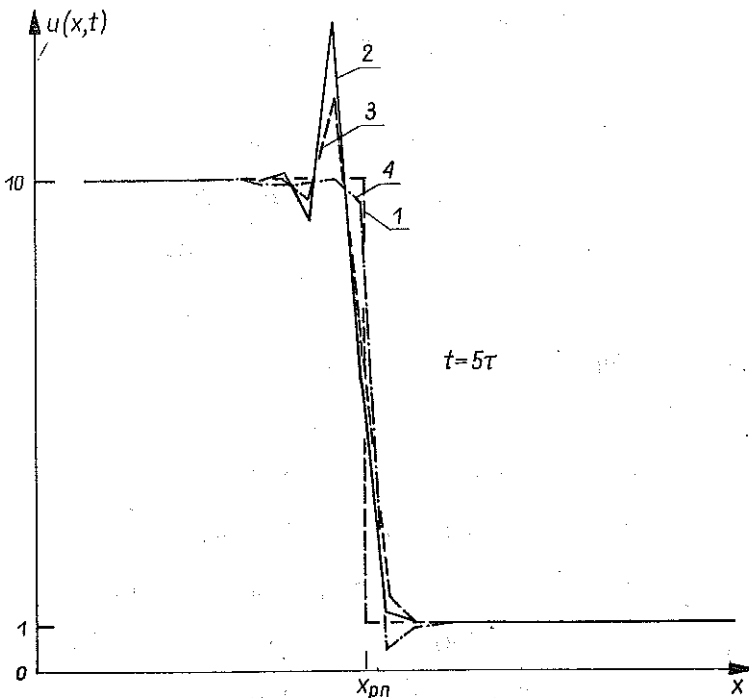
Na rys. 5–9 przedstawiono wyniki rozwiązań dwóch zagadnień numerycznych z warunkiem początkowym (2.23): 1) dla  $\tau = 0,25$ ,  $\Delta = 8$ ; 2) dla  $\tau = 0,5$ ,  $\Delta = 8$ .

Z analizy rys. 5 i 6 wynikają następujące wnioski:

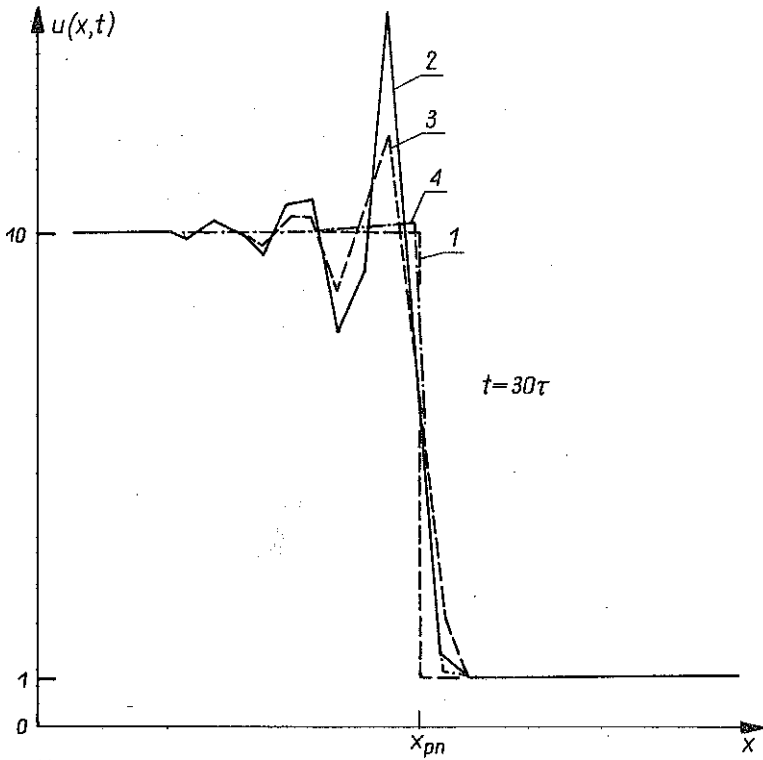
1. Metody Laxa–Wendroffa (2) i MacCormacka (3) wykazują silne oscylacje w pobliżu propagującej się nieciągłości, które narastają w miarę obliczeń. Wzrost oscylacji jest tu intensywniejszy niż w przypadku liniowym.

2. Metoda elementu skończonego w przestrzeni Hermite'a (4) wykazuje w przypadku nieliniowym niewielkie oscylacje po obu stronach nieciągłości. Są one jednak znacznie mniejsze od metod poprzednich. Nie rozwijają się one istotnie w trakcie obliczeń.

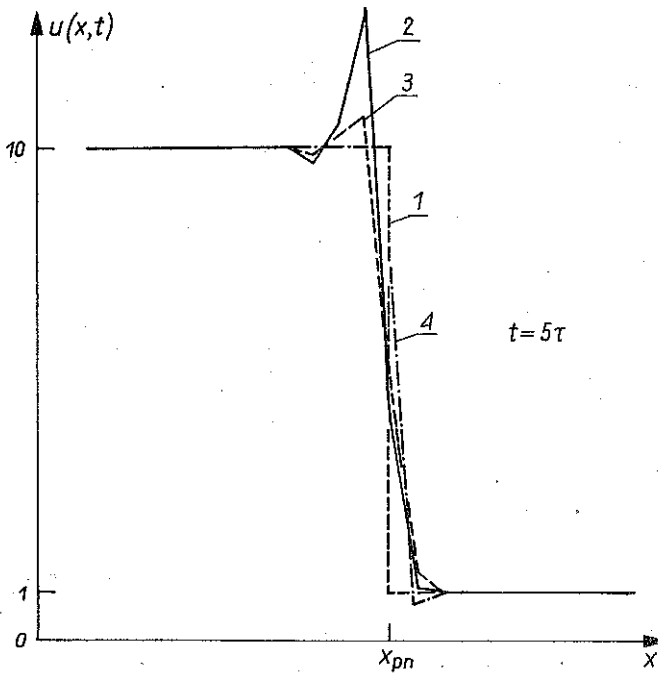
3. Wszystkie trzy metody wykazują podobne rozmycie nieciągłości. Metoda elementu skończonego umożliwia lokalizację położenia nieciągłości rozwiązania ścisłego (1), które zmienia się w czasie.



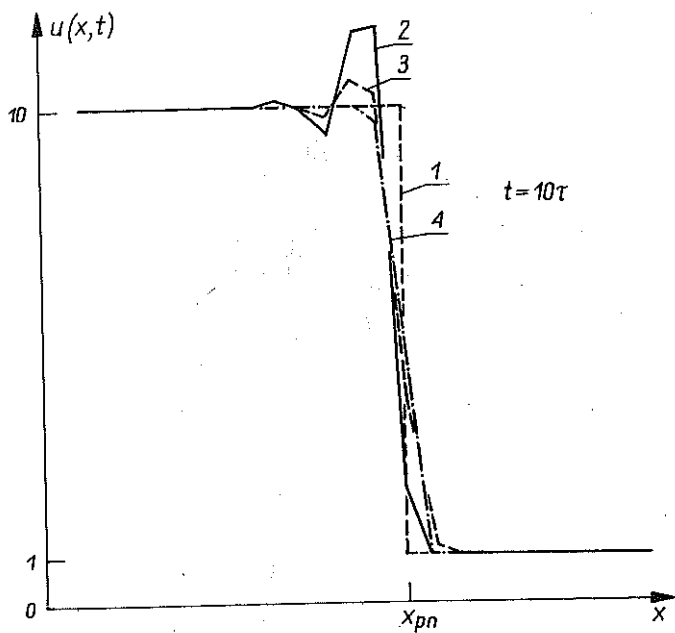
Rys. 5



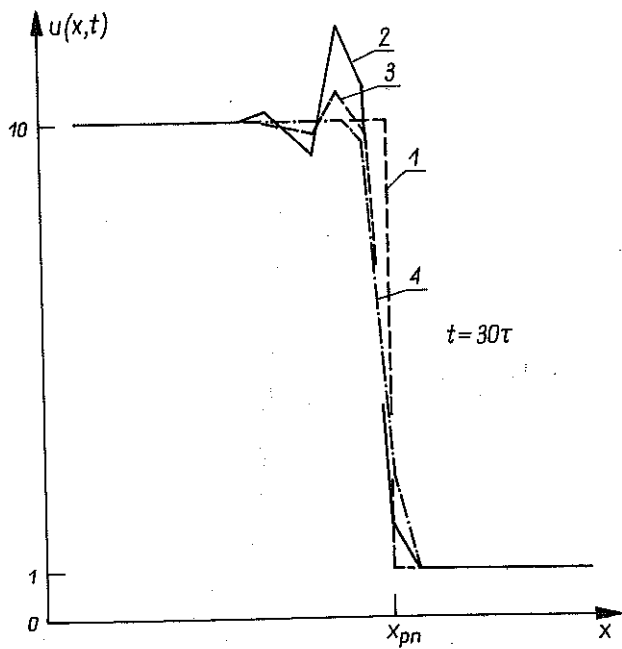
Rys. 6



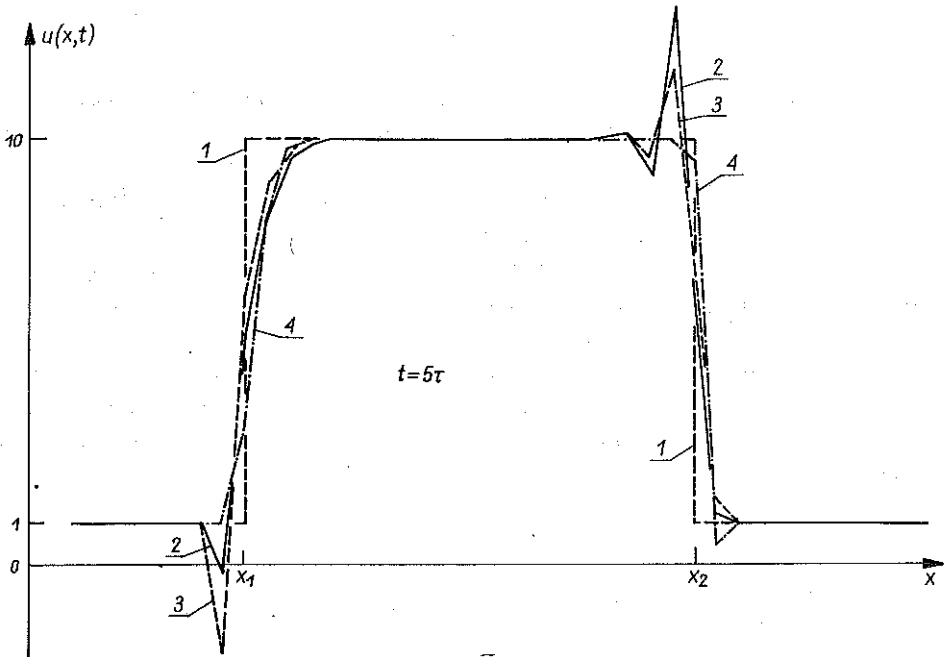
Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Z analizy rys. 7, 8 i 9 oraz porównania ich z poprzednimi zauważamy następujący fakt:

4. Wzrost współczynnika  $\lambda = \tau/\Delta$  powoduje złagodzenie oscylacji i zmniejszenie ich amplitudy w metodach Laxa–Wendroffa i MacCormacka oraz nieznaczne pogorszenie własności dyspersyjnych metody elementu skończonego.

Przeprowadzono również obliczenia oparte na schematach różnicowych skonstruowanych w przestrzeni Lagrange’a elementu skończonego z liniowymi funkcjami bazowymi. Uzyskano wyniki porównywalne z wynikami metod Laxa–Wendroffa i MacCormacka, a więc znacznie gorsze od metody elementu skończonego w przestrzeni Hermite’a. Świadczy to o szczególnych własnościach dyspersyjnych metody elementu skończonego w powyższej przestrzeni i może stanowić przedmiot odrębnych badań. Metoda ta bowiem, pomimo znacznie niższej efektywności rachunkowej, wykazuje „zadziwiająco” efektywność dynamiczną, co może preferować jej użycie przy rozwiązywaniu zagadnień nieregularnych. Na rys. 10 przedstawiono rozwiązanie wywołane warunkiem początkowym w postaci zaburzenia prostokątnego. Widać tu, że w metodach Laxa–Wendroffa i MacCormacka występują znaczne oscylacje zarówno w części początkowej jak i końcowej zaburzenia. Nie obserwujemy tego w metodzie elementu skończonego.

## 4. ZAKOŃCZENIE

Przeprowadzone na prostych przykładach rozważania wykazały, że wybór metody efektywnej dynamicznie stanowi problem istotny, aktualny i do końca nierozwiązany. Z analizy porównawczej wynika jedynie, że poszukiwania metod dynamicznie efektywnych okazuje się owocnym. Pokazaliśmy możliwość wyboru metody efektywniejszej w tym sensie od innych znanych dotychczas, lecz nie odpowiedzieliśmy na pytanie dlaczego tak się dzieje. Zauważmy jedynie, że aproksymacja nie tylko rozwiązań ale i ich pochodnych znacznie poprawia własności dyspersyjne schematów konstruowanych w przestrzeniach Hermite'a elementu skończonego. Pozostaje jeszcze do rozstrzygnięcia pytanie: ile pochodnych należy aproksymować przy odpowiednim typie zagadnienia granicznego? Powinno to stanowić przedmiot osobnych badań.

## LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. P. BORIS, *Numerical solution of continuity equations*, Computer Physics Commun., **12**, 67—79, 1976.
2. P. J. ROACHE, *Computational fluid dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque 1972.
3. A. ARAKAWA, F. MESINGER, *Numerical methods used in atmospheric models*, GARP public., series 17, August 1976.
4. Б. Л. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, Н. Н. ЯНЕНКО, *Системы квазилинейных уравнений*, Наука, Москва 1978.
5. CZ. RYMARZ, I. WINNICKI, *Pewne efekty numeryczne rozwiązywania nieregularnych zagadnień granicznych dyfuzji i hydrodynamiki*, J. Tech. Phys., **25**, 3, 1984.
6. CZ. RYMARZ, I. WINNICKI, *Metody minimalizacji numerycznych efektów niefizycznych w rozwiązywaniu zagadnienia nieliniowego hydrodynamiki*, J. Tech. Phys., [w druku].
7. G. STRANG, G. FIX, *An analysis of the finite element method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1973.
8. И. А. БЕРЕЗИН, *Моделирование нелинейных волновых процессов*, Наука, Новосибирск 1982.
9. D. POTTER, *Metody obliczeniowe fizyki*, PWN, Warszawa 1977.

## РЕЗЮМЕ

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ В ПРОБЛЕМАХ ДИНАМИКИ

В работе представлена процедура выбора численного метода эффективного динамически для разрывного решения начальной задачи. Исследования проведены на примере линейного и нелинейного уравнения адвекции с учетом схем Лакса-Вендроффа, МакКормака и разностных схем, построенных в эрмитовом пространстве конечного элемента. Представлен анализ результатов расчетов с точки зрения динамической эффективности применяемых методов.

## SUMMARY

## EFFECTIVENESS OF NUMERICAL TECHNIQUES IN PROBLEMS OF DYNAMICS

The paper presents the procedure of selection of a dynamically effective, numerical method of solution of discontinuous initial value problems. The method is tested on an example of linear and nonlinear advection, account being taken of the Lax-Wendroff, MacCormac and finite difference schemes constructed in the Hermite space of finite elements. Results of the analysis are presented from the point of view of dynamical effectiveness of the methods proposed.

*Praca została złożona w Redakcji dnia 5 października 1984 r.*

---