

NUMERYCZNA ANALIZA DWUTEOWYCH SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNYCH RAM PŁASKICH Z UWZGLĘDNIENIEM WYBOCZENIA ŚRODNIKÓW

CZEŚĆ II. ANALIZA LOKALNEGO WYBOCZENIA ŚRODNIKÓW I PRZYKŁADY OBLICZEŃ

JACEK BAUER, MICHAŁ KLEIBER I WŁODZIMIERZ SOSNOWSKI
(WARSZAWA)

W części pierwszej przedstawiliśmy ogólne podstawy analizy oraz analizę sprężysto-plastyczną. Niniejsza część stanowi kontynuację części poprzedniej i zawiera analizę lokalnego wybooczenia środników. Efekty wybooczeniowe uwzględniono, dopuszczając możliwość sprężystego lub sprężysto-plastycznego wybooczenia środników belek oraz analizując szczegółowo powybooczeniową nośność elementów.

1. LOKALNE WYBOCZENIE ŚRODNIKA

W części pierwszej przedstawiliśmy ogólne podstawy analizy oraz analizę sprężysto-plastyczną. Niniejsza część stanowi kontynuację części poprzedniej i zawiera analizę lokalnego wybooczenia środników. Rozpatrywane zagadnienie jest niezwykle złożone i jego ścisłe sformułowanie jest na obecnym poziomie wiedzy niemożliwe. Konieczność zakończenia prowadzonych badań efektywnym programem numerycznym zmusiła autorów do wprowadzenia szeregu uproszczeń uzasadnionych charakterem znanego z doświadczeń i praktyki zachowania się środnika po utracie stateczności. Część wprowadzanych uproszczeń ma charakter wstępnych koncepcji i ulegnie weryfikacji w trakcie dalszego testowania programu. Oprócz założeń przedstawionych w pracy [1] wprowadzono jeszcze inne następujące: 1) Siła poprzeczna przenoszona jest wyłącznie przez środnik, natomiast moment zginający i siły osiowa przez cały przekrój poprzeczny. 2) Rozkład naprężeń ścinających jest równomierny wzdłuż wysokości środnika. 3) Przy wyprowadzaniu powierzchni wybooczenia środnika przyjmujemy, że jest on płytą sprężystą o następujących warunkach brzegowych: krawędzie styku z półkami są utwierdzone, a pozostałe brzegi swobodnie podparte. Przyjmujemy również, że siły wewnętrzne rozkładają się równomiernie wzdłuż długości elementu, a ich wartość równa jest wartości

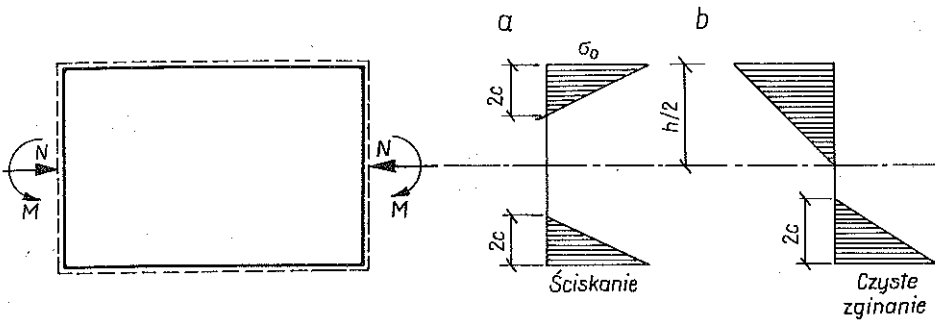
sił w środku rozpiętości. 4) W obrębie danego przyrostu obciążenia dla elementu strukturalnego obowiązuje liniowa zależność między siłami a przemieszczeniami.

Gdy środnik wyboczy się sprężysto, możemy wyróżnić dwa jakościowo odmienne stany pracy elementu strukturalnego. Z pierwszym z nich mamy do czynienia wtedy, gdy siła poprzeczna jest mniejsza od siły powodującej wyboczenie przy czystym ścinaniu, $V < V_{skr}$; z drugim, gdy siła poprzeczna jest większa (lub równa) od siły powodującej wyboczenie przy czystym ścinaniu, $V \geq V_{skr}$. W przypadku pierwszym $V < V_{skr}$ naprężenia normalne przenoszone są zarówno przez półki jak i przez środnik, naprężenia ścinające tylko przez środnik (zgodnie zresztą z założeniami sformułowanymi powyżej). Natomiast w przypadku drugim ($V \geq V_{skr}$) środnik nie przenosi naprężeń normalnych. Naprężenia normalne przenoszone są wyłącznie przez półki, a naprężenia ścinające przez strefę rozciąganą środnika. Przy wyprowadzaniu zależności określających macierze sztywności będziemy właśnie wyróżniać powyższe stany pracy elementu strukturalnego. Jak wiadomo utrata stateczności środnika nie powoduje wyeliminowania danego elementu strukturalnego ze współpracy przy dalszym obciążaniu konstrukcji. Zmianie ulegają jedynie sztywność środnika oraz rozkład naprężeń. Dlatego poniżej (zanim wyprowadzimy wzory na macierz sztywności elementu strukturalnego po wyboczeniu sprężystym) przypomnimy na podstawie literatury [2, 3, 5, 8] wzory pozwalające określić efektywne parametry przekroju ramy dwuteowej po lokalnym sprężystym wyboczeniu środnika.

1.1. Przekrój efektywny ramy dwuteowej po sprężystym wyboczeniu środnika

W naszym przypadku, kiedy uwzględniamy jednoczesne działanie trzech sił wewnętrznych, tzn. siły osiowej, momentu zginającego i siły poprzecznej, dokładne (ściśle) określenie zmian sztywności i rozkładu naprężeń jest możliwe po przeprowadzeniu analizy numerycznej np. metodą elementów skończonych. Jako punkt wyjścia do przybliżonego określenia wspomnianych parametrów środnika po jego sprężystym wyboczeniu przyjmujemy rozkład naprężeń dla wyboczonej płyty ściskanej, swobodnie podpartej na obwodzie [2, 3, 8]. Wyidealizowane wykresy naprężeń przedstawiono na rys. 1. W przypadku ściskania naprężenia σ_0 w skrajnych włóknach dochodzą do zera w odległości $2c$ od krawędzi (rys. 1a). Odpowiada to równomiernemu rozkładowi naprężeń σ na szerokości c po obydwu stronach środnika. Dla czystego zginania w strefie ściskanej rozkład jest podobny do powyższego, natomiast w strefie rozciąganej mamy zmienność liniową od krawędzi do połowy wysokości środnika $h/2$ (rys. 1b).

Wyznaczając parametry przekroju efektywnego wyróżniamy dwa przypadki utraty stateczności środnika: a) siła poprzeczna jest mniejsza od siły ścina-



Rys. 1

jącej powodującej wyboczenie przy czystym ścinaniu, $V < V_{kr}$; b) siła poprzeczna jest większa od siły ścinającej powodującej wyboczenie przy czystym ścinaniu, $V \geq V_{kr}$.

Dla przypadku a) wykorzystamy opisany powyżej stan ściskania. Efektywna szerokość c na każdym brzegu średnika określona jest następującym wzorem [5]

$$(1.1) \quad c = 1,26 t_s \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pl}}}$$

Dla czystego zginania strefa rozciągana jest wykorzystana w pełni $h/2$, natomiast w strefie ściskanej możemy przyjąć podobnie jak dla czystego ściskania, tzn. c .

Jeśli z kolei mamy jednocześnie działanie siły ściskającej i momentu zginającego, to efektywna szerokość w strefie ściskanej równa jest c , natomiast w strefie rozciąganej zależy ona od stosunku siły ściskającej do momentu zginającego. Wielkość ta zmienia się od c w przypadku czystego ściskania do $h/2$ dla czystego zginania. Wobec powyższego efektywną szerokość „b” w strefie rozciąganej możemy wyrazić następująco:

$$(1.2) \quad b = \frac{h}{2} - (h - 2c) \psi / \pi,$$

gdzie

$$\psi = \arctg \left(\frac{n}{m} \right), \quad n = \frac{N}{N_{skr}}, \quad m = \frac{M}{M_{skr}}$$

Z kolei kiedy dochodzi jeszcze działanie siły poprzecznej przyjmujemy, że parametry wyznaczone poprzednio, tzn. c (dla strefy ściskanej) i b (strefa rozciągana), maleją liniowo ze wzrostem siły poprzecznej i osiągają wartość zerową, gdy siła poprzeczna jest równa sile powodującej utratę stateczności przy czystym ścinaniu. Tak więc c_0 i b_0 określone są następującymi prostymi

wzorami liniowymi:

$$(1.3) \quad c_v = c(1 - V/V_{skr}), \quad b_v = b(1 - V/V_{skr}).$$

Dla przypadku b), gdy siła poprzeczna jest większa od siły powodującej utratę stateczności przy czystym ścinaniu naprężenia normalne przenoszone są wyłącznie przez półki, natomiast przyrost siły poprzecznej przez strefę rozciąganą środka. Efektywną sztywność na ścinanie możemy obliczyć analizując odkształcenia w środku i wyrażając ją jako funkcję efektywnej grubości środka. W naszych rozważaniach przyjmujemy, że grubość ta jest równa połowie grubości wyjściowej (początkowej).

1.2. Powierzchnia sprężystego wyboczenia środka

Wyznaczenie krytycznych sił powodujących utratę stateczności płyty przedstawionej na rys. 1 przy czystym ściskaniu, czystym zginaniu lub czystym ścinaniu N_{skr} , M_{skr} , V_{skr} nie nastęrczą żadnych trudności [5, 6, 8]. Kiedy powyższe siły działają na środku parami warunki na utratę stateczności możemy w sposób przybliżony przedstawić następująco [2 i 3]:

$$(1.4) \quad m^2 + n = 1, \quad m^2 + v^2 = 1, \quad v^2 + n = 1,$$

gdzie

$$n = \frac{N_s}{N_{skr}}, \quad m = \frac{M_s}{M_{skr}}, \quad v = \frac{V_s}{V_{skr}}.$$

Analizując powyższe równania możemy sformułować podobny warunek na wyboczenie sprężyste uwzględniający jednoczesne działanie trzech sił wewnętrznych, tzn. siły normalnej, momentu zginającego i siły poprzecznej:

$$(1.5) \quad n + m^2 + v^2 - 1 = 0.$$

W pracy M. ŻYCKOWSKIEGO [10] dyskutowany jest przypadek analizy stateczności konstrukcji przy działaniu n niezależnych obciążeń. Wykazano, że dla obciążeń konserwatywnych powierzchnia opisująca stan wyboczenia jest powierzchnią wypukłą.

Warunek wypukłości, konieczny przy korzystaniu z analogii niestowarzyszonego prawa płynięcia, jest również spełniony dla (1.5). W warunku powyższym występuje funkcja sił wewnętrznych przypadających na środku. Wyrażając go w wielkościach sił wewnętrznych odniesionych do całego przekroju poprzecznego, zgodnie z założeniem na wstępie tego rozdziału, działających w połowie rozpiętości elementu strukturalnego otrzymujemy

$$(1.6) \quad F(\mathbf{Q}) = \frac{N_c}{N_{skr}} \left(\frac{A_s}{A_c} \right) + \left(\frac{M_E + eN_c}{M_{skr}} \right)^2; \left(\frac{I_s}{I_c} \right)^2; + \\ + \left(\frac{M_E + eN_c}{N_{skr}} \right) \frac{A_s e}{I_c} + \left(\frac{V_c}{V_{skr}} \right)^2 - 1 = 0,$$

gdzie M_E oznacza moment zginający odniesiony do środka ciężkości środnika oraz e odległość między osią obojętną środnika a osią obojętną całego przekroju poprzecznego. W powyższe równanie możemy również wprowadzić funkcje węzłowych sił wewnętrznych. Otrzymamy wówczas równanie powierzchni drugiego stopnia w przestrzeni N_1, M_1, V_1 . Równanie tej powierzchni przedstawiono w Załączniku I (równanie (1.1)). Posłużmy nam ona do wyznaczenia macierzy sztywności elementu strukturalnego.

1.3. Macierz sztywności elementu strukturalnego po sprężystym wyboczeniu środnika

Przed wybozeniem środnika koniec wektora sił węzłowych znajduje się wewnątrz lub na powierzchni wybożenia $F(\mathbf{Q})$. Również przyrost obciążenia realizuje się wewnątrz lub na powierzchni. Przenoszony jest on wówczas przez przekrój całkowity elementu strukturalnego. Po wyboczeniu środnika kolejne przyrosty siły ściskającej i momentu zginającego przenoszone są przez przekrój efektywny elementu strukturalnego ze względu na występowanie naprężeń normalnych i wynikające stąd zmniejszenie sztywności środnika. Z kolei przyrosty siły poprzecznej są wyłącznie przenoszone przez środnik i w zależności od tego, czy siła jest mniejsza lub większa od siły powodującej wyboczenie przy czystym ścinaniu; uwzględniamy to przy określaniu parametrów środnika (przypadek 1.1.a lub 1.1.b). Z tego względu w dalszym ciągu przy określaniu macierzy sztywności elementu strukturalnego wyróżniamy te dwa stany:

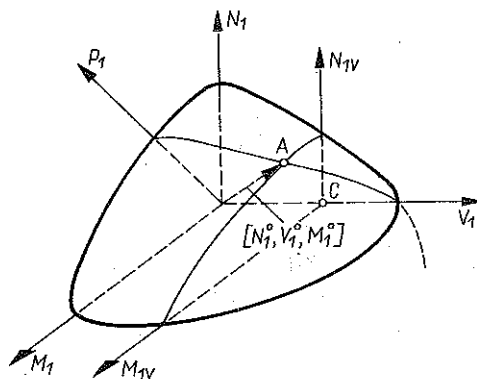
a) Przypadek $V < V_{skr}$.

Oznaczmy wektor sił węzłowych w węźle k przez $\Delta \mathbf{Q}_k = \{N_k, V_k, M_k\}$. Przyrost deformacji $\Delta \mathbf{U}_k$ w węźle k związany jest z przyrostem sił wewnętrznych $\Delta \mathbf{Q}_k$. Przyrost sił węzłowych $\Delta \mathbf{Q}_k$ rozkładamy na dwie składowe:

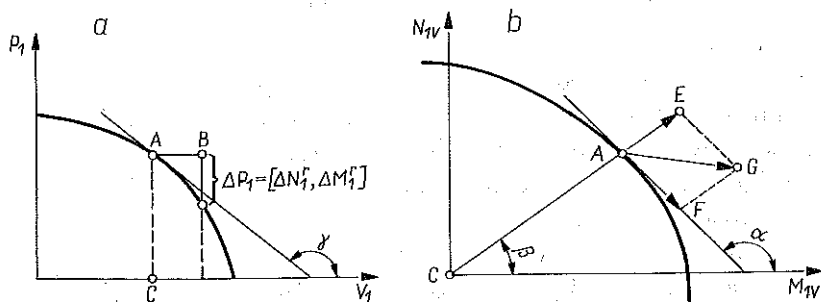
$$(1.7) \quad \Delta \mathbf{Q}_k = [\Delta N_k, \Delta V_k, \Delta M_k]^T = [\Delta N_k, 0, \Delta M_k - \Delta V_k L/2]^T + \\ + [0, \Delta V_k, \Delta V_k L/2]^T.$$

Pierwszy składnik odpowiada przyrostowi wyłącznie naprężeń normalnych w środku rozpiętości elementu strukturalnego, a drugi składnik przyrostowi naprężeń ścinających w środku rozpiętości. Jak wspomniano w założeniach na wstępie stan w środku rozpiętości jest reprezentatywny dla całego elementu.

Składowe przyrostu sił węzłowych będziemy rozpatrywać w przestrzeni N_1, V_1, M_1 podobnie jak powierzchnię wybożenia $F(\mathbf{Q}_1)$ (rys. 2). Przyrost



Rys. 2



Rys. 3

ΔV_1 analizujemy w płaszczyźnie $(V_1, -P_1)$ utworzonej przez oś V_1 oraz przez wektor $[N_1^0, V_1^0, M_1^0]^T$ (por. rys. 2 i 3a).

W naszym przypadku jeśli $V < V_{skr}$, to środnik przenosi w całości siłę poprzeczną, a co za tym idzie również przyrost ΔV_1 (AB na rys. 3a). W związku z tym występuje redystrybucja siły osiowej i momentu zginającego. Ta część momentu zginającego i siły osiowej, która spełniała równanie powierzchni wyoboczenia CA (rys. 3a) przekracza ją o $\Delta P_1 = [\Delta N_1^r, \Delta M_1^r]^T$. Tak więc podczas przyrostu obciążenia składowe ΔN_1^r i ΔM_1^r są odciążane z całego elementu strukturalnego i obciążają przekrój efektywny. Składową $[0, \Delta V_k, \Delta V_k L/2]^T$ możemy napisać następująco:

$$(1.8) \quad [0, \Delta V_k, \Delta V_k L/2]^T = -[\Delta N_1^r, 0, \Delta M_1^r]^T + [0, \Delta V_k, \Delta V_k L/2]^T + [\Delta N_1^r, 0, \Delta M_1^r]^T.$$

Uogólnione siły odpowiadające pierwszemu i drugiemu składnikowi prawnej strony działają na przekrój całkowity a trzeciemu na efektywny.

Przyrrost $[\Delta N_1, 0, \Delta M_1 - \Delta V_1 L/2]^T$ jest reprezentowany w płaszczyźnie $(N_{1v} - M_{1v})$ (równoległej do $(N_1 - M_1)$ zawierającej punkt $A (N_1^0, V_1^0, M_1^0)$ (rys. 2)) odcinkiem AG (rys. 3b). Możemy go rozłożyć na dwie składowe: AE równoległą do odcinka CA oraz AF równoległą do stycznej w punkcie A płaszczyzny $(N_{1v} - M_{1v})$ (rys. 3b). Składowe te oznaczymy indeksami górnymi odpowiednio p i t . Można je napisać następująco:

$$(1.9) \quad [\Delta N_1, 0, \Delta M_1 - \Delta V_1 L/2]^T = [\Delta N_1^p, 0, (\Delta M_1 - \Delta V_1 L/2)^p]^T + [\Delta N_1^t, 0, (\Delta M_1 - \Delta V_1 L/2)^t]^T.$$

W pierwszym składniku stosunek składowych $\Delta N_1^p / (\Delta M_1 - \Delta V_1 L/2)^p$ jest równy stosunkowi składowych wyjściowych, tzn. N_1 / M_1 . Ta część przenoszona jest przez przekrój efektywny.

Składnik drugi, równoległy do stycznej, powoduje redystrybucję naprężeń normalnych w obrębie powierzchni wyboczenia. Przyjmujemy, że jest on przenoszony przez przekrój całkowity. Tak więc na podstawie wzorów (1.7), (1.8), (1.9) przyrost sił węzłowych ΔQ_1 możemy wyrazić następująco:

$$(1.10) \quad \Delta Q_1 = - \begin{bmatrix} \Delta N_1^t \\ 0 \\ \Delta M_1^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta V_1 \\ \Delta V_1 L/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta N_1^p \\ 0 \\ \Delta M_1^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta N_1^t \\ 0 \\ (\Delta M_1 - \Delta V_1 L/2)^t \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \Delta N_1^p \\ 0 \\ (\Delta M_1 - \Delta V_1 L/2)^p \end{bmatrix}$$

lub w formie uproszczonej

$$\Delta Q_1 = -\Delta Q_1^t + \Delta Q_1^s + \Delta Q_1^r + \Delta Q_1^p + \Delta Q_1^{pr}.$$

W tym równaniu $-\Delta Q_1^t$, ΔQ_1^s i ΔQ_1^r przenoszone są przez przekrój całkowity, natomiast ΔQ_1^p , ΔQ_1^{pr} przez przekrój efektywny.

Przekształcając powyższe równanie otrzymamy

$$(1.11) \quad \Delta Q_1 = \Delta Q_1^s + (\Delta Q_1^r - \Delta Q_1^t) + (\Delta Q_1^p + \Delta Q_1^r) = \Delta Q_1^s + \Delta Q_1^{tr} + \Delta Q_1^{pr}.$$

Każdą z tych składowych możemy wyrazić jako funkcję przyrostu ΔQ_1 :

$$(1.12) \quad \begin{aligned} \Delta Q_1^s &= \mathbf{B}^s \Delta Q_1, \\ \Delta Q_1^{tr} &= \mathbf{B}^r \Delta Q_1, \\ \Delta Q_1^{pr} &= \mathbf{B}^p \Delta Q_1. \end{aligned}$$

Przyrost wektora przemieszczenia w węźle 1 spowodowany każdą z tych składowych sił węzłowych możemy wyrazić następująco:

$$(1.13) \quad \begin{aligned} \Delta U_1^s &= \mathbf{C}_{11}^s \Delta Q_1^s = \mathbf{C}_{11}^s \mathbf{B}_1^s \Delta Q_1, \\ \Delta U_1^r &= \mathbf{C}_{11}^r \Delta Q_1^{tr} = \mathbf{C}_{11}^r \mathbf{B}_1^r \Delta Q_1, \\ \Delta U_1^p &= \mathbf{C}_{11}^p \Delta Q_1^{pr} = \mathbf{C}_{11}^p \mathbf{B}_1^p \Delta Q_1. \end{aligned}$$

Całkowity przyrost przemieszczenia ΔU_1 w węźle 1 jest równy sumie powyższych przyrostów:

$$(1.14) \quad \Delta U_1 = \Delta U_1^s + \Delta U_1^t + \Delta U_1^p = \\ = (C_{11}^s B_1^s + C_{11}^t B_1^t + C_{11}^p B_1^p) \Delta Q_1 = C_{11}^w \Delta Q_1.$$

Macierze $C_{11}^s, C_{11}^t, C_{11}^p$ tworzymy z odpowiednich elementów macierzy podatności jednostki strukturalnej dla przekroju całkowitego lub efektywnego. Stąd mamy

$$(1.15) \quad \Delta Q_1 = [C_{11}^w]^{-1} \Delta U_1 = K_{11}^w \Delta U_1.$$

W powyższym równaniu K_{11}^w jest podmacierzą macierzy sztywności elementu strukturalnego po wyboczeniu sprężystym środniczka. Podobnie możemy wyznaczyć podmacierz K_{22}^w , a z warunków równowagi podmacierze K_{12}^w i K_{21}^w . Tak więc dla elementu strukturalnego po utracie stateczności środniczka musi być spełniona następująca zależność między przyrostem sił węzłowych, a przyrostem deformacji:

$$(1.16) \quad \Delta Q = \begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^w & K_{12}^w \\ K_{21}^w & K_{22}^w \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{bmatrix} = K^w \Delta U.$$

Jawną postać macierzy B przedstawiono w Załączniku I.

b) Przypadek $V \geq V_{skr}$.

Kiedy siła poprzeczna przekracza siłę powodującą wyboczenie przy czystym ścinaniu, środniczka nie przenosi już naprężeń normalnych. Przyrosty siły osiowej i momentu zginającego są przenoszone wyłącznie przez półki, przyrost siły poprzecznej przez strefę rozciąganą środniczka. W tym przypadku macierz sztywności K^w ma podobną postać do postaci macierzy K w pracy [1] (sprężyste przed wyboczeniem; wzór (3.2)). Zmianie ulegają jedynie pola przekroju poprzecznego, momentu bezwładności i współczynnika określającego wpływ sił poprzecznych. Zmiany te wprowadzamy tak samo jak dla przekroju efektywnego wg punktu 1.1.

2. NOŚNOŚĆ KRAŃCOWA PO SPRĘŻYSTYM WYBOCZENIU ŚRODNIKA [2, 4]

Warunek nośności krańcowej spełnia w proponowanym podejściu, jak już wspomnieliśmy uprzednio podobną rolę, co warunek stanu granicznego, tzn. pozwala drogą różniczkowania funkcji opisującej go względem sił wewnętrznych określić uogólnione deformacje towarzyszące zaawansowanym zmianom kształtu spowodowanym utratę stateczności.

Procedura taka jest w pełni poprawna jedynie przy założeniu, o czym już wspomnieliśmy, że warunek nośności krańcowej jest powierzchnią wypukłą.

Dla wielu przypadków spotykanych w praktyce założenie to jest spełnione. Zresztą autorzy tej koncepcji (Y. Ueda i S. M. H. Rashed) na podstawie wielu eksperymentów numerycznych twierdzą, że niespełnienie tego warunku na poziomie elementu i wynikające stąd niedokładności ulegają znacznej redukcji na poziomie konstrukcji, tzn. po utworzeniu globalnej macierzy sztywności.

Przyjmujemy, że jeśli siła tnąca spełnia warunek $V < V_{kr}$ to element osiąga wytrzymałość krańcową wtedy, gdy półka i sąsiednie skrajne włókno środnika na jednym brzegu, lub na obydwu brzegach jednocześnie – uplastyczniają się. Wynika stąd, że sposób zniszczenia zależy jedynie od wielkości i proporcji sił wewnętrznych oraz od materiału i wymiarów elementu, a nie zależy od wielkości ugięć środnika po wyboczeniu mierzonych w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy. Jeśli siła tnąca spełnia warunek $V \geq V_{kr}$ to środnik nie przenosi już naprężeń normalnych i pozostają w nim jedynie naprężenia spowodowane ścinaniem. Dalsze przyrosty siły tnącej powodują rozwój odkształceń w strefie rozciągania w środniku. W efekcie górna i dolna półka zostaną obciążone dodatkowo równomiernie rozłożoną podłużną siłą ściskającą \bar{F}_{pr} oraz obciążeniem ciągłym p :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \bar{F}_{pr} &= (V - V_{kr})/2, \\ p &= (V - V_{kr})/h_s. \end{aligned}$$

Półka jest ponadto obciążona siłą podłużną F_c , spowodowaną siłą podłużną N oraz momentem zginającym M (część którego pochodzi od siły tnącej V).

Analizując różne typowe rozkłady naprężeń dla poszczególnych miejsc zniszczenia, otrzymujemy warunek nośności krańcowej

$$(2.2) \quad F_{kn} = 0,$$

którego jawną postać podajemy wraz z zaproponowaną w programie numerycznym idealizacją w załączniku II.

Jeśli element osiągnie stan wytrzymałości krańcowej, to jego macierz sztywności określamy podobnie, jak określaliśmy w pracy [1] macierz sztywności elementu z uplastycznieniami.

Powierzchnię wytrzymałości krańcowej traktujemy jako potencjał plastyczny i stosujemy takie same macierze sztywności, jak macierze sprężysto-plastyczne w przypadku stanu granicznego, wykorzystując przy ich wyrowadzaniu przyrostową teorię plastyczności. Jeśli siła ścinająca jest mniejsza od wartości V_{kr} wywołującej wyboczenie przy czystym ścinaniu, to zakładamy, że deformacje spowodowane uplastycznieniem półki i skrajnego włókna środnika koncentrują się w „przegubie” na lewym lub prawym końcu elementu. Jeśli siła ścinająca przekracza V_{kr} , to strefa uplastycznienia rozszerza się na całą długość elementu oraz obejmuje środnik i możemy z pewnym przybliżeniem zastosować sprężysto-plastyczną macierz sztywności dla przypadku, gdy uplastyczniają się obydwie końce elementu.

Jeśli w przekroju przywęzłowym występuje odciążenie, to należy ponownie podstawić macierz sztywności elementu po wyoboczeniu sprężystym $k^{(w)}$.

3. WYBOCZENIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNE

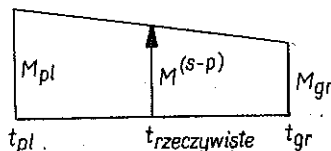
Przypadek wyoboczenia sprężysto-plastycznego środnika ma miejsce, gdy wyoboczenie sprężyste jest poprzedzone uplastycznieniem przekroju środnika. Taka sytuacja może zaistnieć, jeśli środnik jest dostatecznie sztywny. Jeśli w przekrojach przywęzłowych elementu działa tylko jedna siła uogólniona, np. wyłącznie siła ściskająca, lub wyłącznie siła tnąca, to środnik albo wyoboczy się, albo całkowicie się uplastyczni. W przypadku działania momentu zginającego stan wyoboczenia sprężysto-plastycznego jest pewnym stanem pośrednim między granicznym przypadkiem wyoboczenia sprężystego, który zdefiniujemy dalej, a stanem nośności granicznej (przy całkowitym uplastycznieniu).

Zdefiniujemy dwa graniczne przypadki wyoboczenia:

A. *Graniczny przypadek wyoboczenia sprężystego.* Jest to przypadek wyoboczenia sprężystego środnika o danej wysokości h_s przy takiej jego grubości t_{gr} , że $\sigma_{kr} = \sigma_0$. Stanowi temu odpowiada moment zginający M_{gr} .

B. *Stan wyoboczenia przy jednoczesnym osiągnięciu stanu nośności granicznej.* Jest to przypadek wyoboczenia środnika o danej wysokości h_s przy takiej jego grubości t_{pl} , że moment zginający wywołujący to wyoboczenie jest równy momentowi zginającemu wywołującemu stan nośności granicznej w tym środniku.

Naprężenie σ_{kr} jest więc w tym przypadku umowną wartością naprężenia krytycznego. Rzeczywiste naprężenia nie mogą przekroczyć σ_0 . Odpowiedni moment zginający wynosi w tym przypadku M_{pl} .



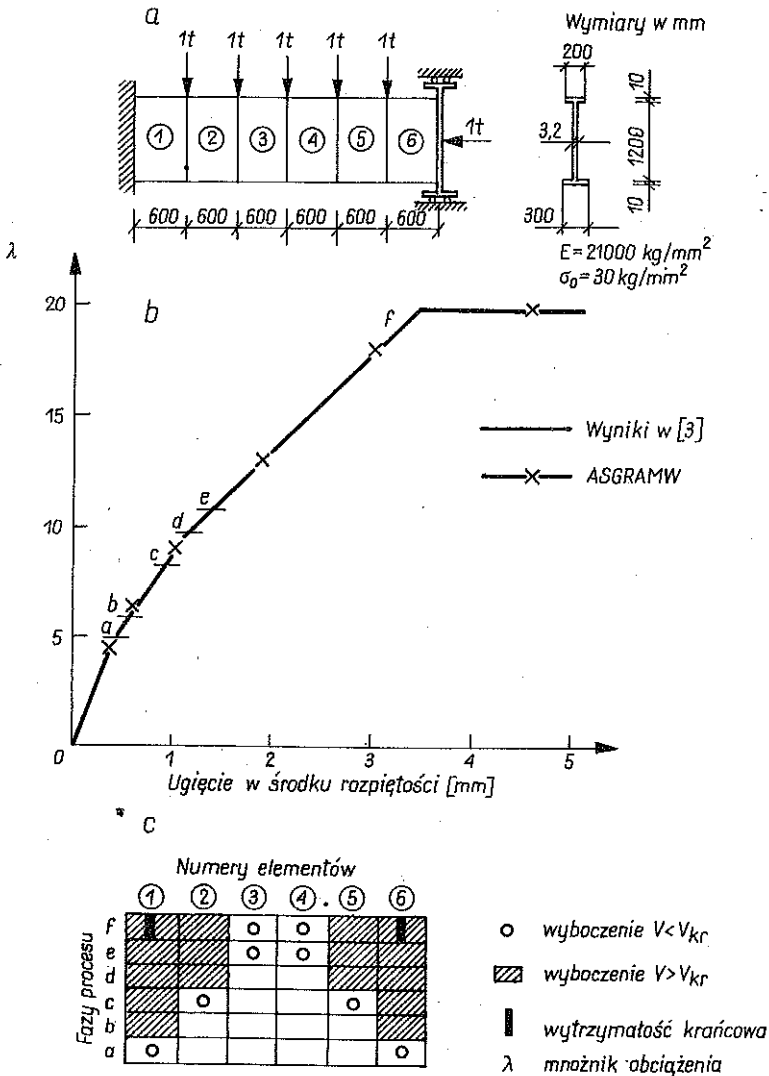
Rys. 4

Stan wyoboczenia sprężysto-plastycznego określa moment zginający będący liniową funkcją grubości środnika t otrzymany z interpolacji pokazanej schematycznie na rys. 4. Otrzymamy $M^{(s-p)}$ wstawiamy do warunku wyoboczenia sprężystego środnika.

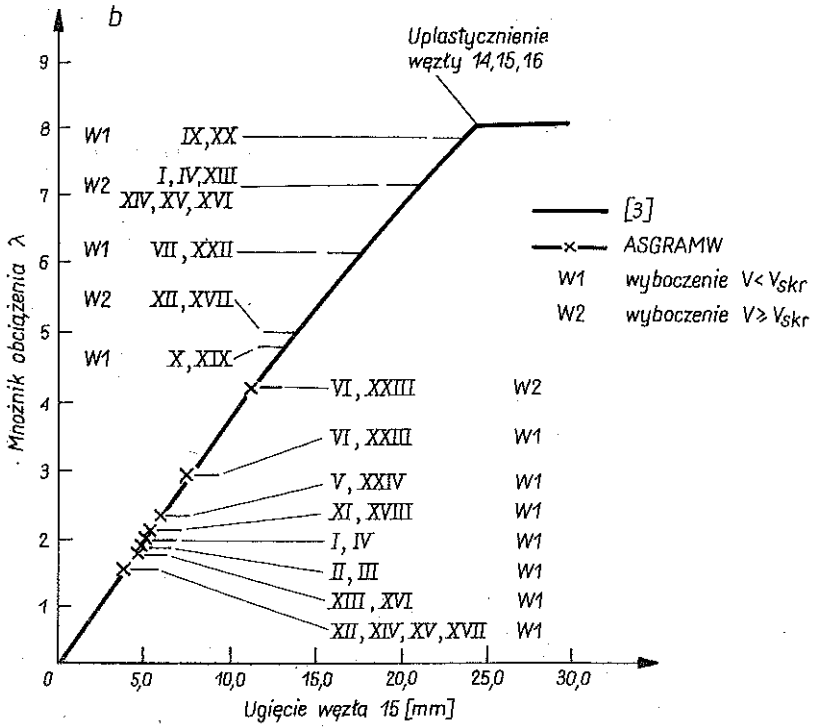
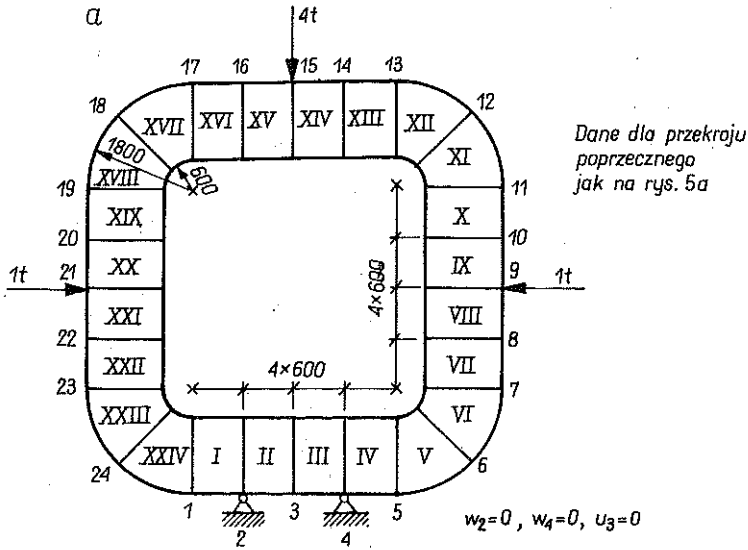
4. PRZYKŁADY OBLICZEŃ

Przykłady rozwiązano stosując warunek plastyczności określony wzorem (I.14) zamieszczonym w części I naszej pracy [1] i warunek stanu nośności krańcowej wg wzorów (II.4–II.12) (dodatek II).

PRZYKŁAD 1. Belka obustronnie utwierdzona (rys. 5a) jest obciążona poziomą siłą ściskającą oraz siłami pionowymi przyłożonymi w węzłach.



Rys. 5



Rys. 6

Obciążenie wzrasta proporcjonalnie. Na rys. 5b przedstawiono zależność między ugięciem pionowym węzła w środku rozpiętości, a współczynnikiem przyrostu obciążenia. Przedstawiono również tworzenie się stref wybożenia (wybożenie przy $V < V_{kr}$, wybożenie przy $V > V_{kr}$ oraz stan wytrzymałości krańcowej) w zależności od przyrostu obciążenia (rys. 5c). Wyniki porównano z rezultatami przedstawionymi w pracy [3]. Obserwujemy wyraźną nieliniowość funkcji obciążenie–ugięcie w środku rozpiętości, spowodowaną utratą stateczności elementów belki o wiotkim środku.

PRZYKŁAD 2. Rama zamknięta o przekroju dwuteowym (rys. 6a), podparta podporami przegubowymi w węzłach 2 i 4. Na wykresie przedstawiającym zależność pomiędzy mnożnikiem obciążenia a ugięciem pionowym węzła 15 (rys. 6b) zaznaczono rozwój stref wybożenia oraz wyniki otrzymane w pracy [3]. Punktom wyróżnionym wykresu przyporządkowano ciąg liczb napisanych cyframi rzymskimi oraz symbole $W1$ lub $W2$. Oznaczają one numery elementów skończonych wg numeracji na rys. 6a, w których środek uległ wybożeniu. Wybożenie to nastąpiło, albo w przypadku $W1$, tzn. gdy $V < V_{skr}$, albo w przypadku $W2$, tzn. gdy $V \geq V_{skr}$. Na podstawie wykresu i punktów wyróżnionych stwierdzić możemy, że przy symetrycznym obciążeniu mamy do czynienia z symetrycznym zachowaniem się konstrukcji również po wybożeniu przy $V < V_{skr}$ i $V > V_{skr}$, a więc przy nieliniowym zachowaniu się konstrukcji.

PODZIĘKOWANIE

Autorzy dziękują zleceniodawcy pracy, tj. Polskiemu Rejestrowi Statków oraz pracownikom Katedry Mechaniki Teoretycznej i Wytrzymałości Materiałów WAT za udostępnienie i pomoc w uruchomieniu wielu podprogramów systemu WAT-KM, które wykorzystano przy opracowywaniu programu numerycznego opisanego w niniejszej pracy.

ZAŁĄCZNIK I

1.1. Powierzchnia wybożenia jako funkcja węzłowych sił wewnętrznych N_1 , V_1 , M_1 (rys. 2.)

$$(I.1) \quad F(Q_1) = A11 * N_1^2 + A22 * M_1^2 + A33 * V_1^2 + \\ + 2 * A12 * N_1 * M_1 + 2 * A13 * N_1 * V_1 + 2 * A23 * V_1 * M_1 + \\ + 2 * A14 * N_1 + 2 * A24 * M_1 + 2 * A34 * V_1 + A44 = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left(\frac{I_s e}{IM_{skr}} \right)^2; & A_{22} &= \left(\frac{I_s}{IM_{skr}} \right)^2; & A_{33} &= \left[\left(\frac{L \times I_s}{2M_{skr} \times I} \right)^2 + \frac{1}{V_{skr}^2} \right]; \\
 A_{12} &= e \left(\frac{I_s}{M_{skr} I} \right)^2; & A_{13} &= -\frac{1}{2} L e \left(\frac{I_s}{IM_{skr}} \right)^2; & A_{23} &= -\frac{1}{2} L \left(\frac{I_s}{IM_{skr}} \right); \\
 A_{14} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A_s}{AN_{skr}} \right) + \frac{A_s e^2}{N_{skr} I} \right]; & A_{24} &= \frac{1}{2} \frac{A_s e}{N_{skr} I}; & A_{34} &= -\frac{1}{4} \frac{A_s L e}{N_{skr} I}; \\
 A_{44} &= -1.
 \end{aligned}$$

I.2. Krzywa przecięcia płaszczyzną (P_1, V_1) powierzchni wybożenia $F(Q_1)$ (rys. 3a)

$$(I.2) \quad AP_{11} \times P_1^2 + AP_{22} \times V_1^2 + 2AP_{12} \times P_1 \times V_1 + 2 \times AP_{13} \times P_1 + 2 \times AP_{23} \times V_1 + AP_{33} = 0,$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 AP_{11} &= A_{11} \times T_{11}^2 + 2 \times A_{12} \times T_{11} \times T_{21} + A_{22} \times T_{21}^2, \\
 AP_{22} &= A_{33}, \\
 AP_{12} &= A_{13} \times T_{11} + A_{23} \times T_{21}, \\
 AP_{13} &= A_{14} \times T_{11} + A_{24} \times T_{21}, \\
 AP_{23} &= A_{34}, \\
 AP_{33} &= A_{44}, \\
 PI &= \sqrt{N_1^2 + M_1^2}, \\
 T_{11} &= N_1/PI, & T_{22} &= T_{11}, \\
 T_{21} &= M_1/PI, & T_{12} &= -T_{21}.
 \end{aligned}$$

I.3. Równanie stycznej do krzywej w punkcie (P_1^0, V_1^0)

$$P_1^0 = \sqrt{(N_1^0)^2 + (M_1^0)^2},$$

$$WSP1 \times P_1 + WSP2 \times V_1 + WSP3 = 0,$$

$$(I.3) \quad \begin{aligned}
 WSP1 &= AP_{11} \times P_1^0 + AP_{12} \times V_1^0 + AP_{13}, \\
 WSP2 &= AP_{22} \times V_1^0 + AP_{12} \times P_1^0 + AP_{23}, \\
 WSP3 &= AP_{13} \times P_1^0 + AP_{23} \times V_1^0 + AP_{33}, \\
 \text{tg } \gamma &= -\frac{WSP2}{WSP1} = MPS \quad (\text{por. rys. 3}).
 \end{aligned}$$

I.4. Wektor $[\Delta N_1^r, 0, \Delta M_1^r]$

$$(I.4) \quad \Delta Q_1^r = \begin{bmatrix} \Delta N_1^r \\ 0 \\ \Delta M_1^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & CR12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CR32 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta V_1 \\ \Delta M_1 \end{bmatrix},$$

$$CR12 = \frac{-N_1^0}{\sqrt{(M_1^0)^2 + (N_1^0)^2}} * MPS,$$

$$CR32 = \frac{-M_1^0}{\sqrt{(M_1^0)^2 + (N_1^0)^2}} * MPS.$$

I.5. Macierz B^s (wzory (1.11) i (1.12))

$$(I.5) \quad B^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & L/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

I.6. Płaszczyzna (M_{1V}, N_{1V}) (rys. 3b)

Równanie prostej stycznej do krzywej w punkcie (M_1^0, N_1^0)

$$(I.6) \quad \begin{aligned} AS11 * M_1 + AS22 * N_1 + AS33 &= 0, \\ AS11 &= A22 * M_1^0 + A12 * N_1^0 + A23 * V_1^0 + A24, \\ AS22 &= A11 * N_1^0 + A12 * M_1^0 + A13 * V_1^0 + A14, \\ AS33 &= A14 * N_1^0 + A24 * M_1^0 + (A13 * N_1^0 + A23 * M_1^0 + \\ &\quad + A33 * V_1^0 + 2 * A34) * V_1^0 + A44, \\ \text{tg } \alpha &= -\frac{AS11}{AS22} = MS, \\ \text{tg } \beta &= \frac{N_1^0}{M_1^0} = MP. \end{aligned}$$

I.7. Składowe ΔQ_1^i i ΔQ_1^p

$$(I.7) \quad \Delta Q_1^i = \begin{bmatrix} \Delta N_1^i \\ 0 \\ (\Delta M_1 - \Delta V_1 * L/2)^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CT11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CT32 & CT33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta V_1 \\ \Delta M_1 \end{bmatrix},$$

$$CT11 = (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{\cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$CT32 = (\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} \times L/2,$$

$$CT33 = -(\sin \alpha + \cos \alpha) \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

$$(I.8) \quad \Delta Q_1^p = \begin{bmatrix} \Delta N_1^p \\ 0 \\ (\Delta M_1 - \Delta V_1 \times L/2)^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & CP32 & CP33 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta V_1 \\ \Delta M_1 \end{bmatrix},$$

$$CP11 = -(\sin \alpha + \cos \beta) \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

$$CP32 = -(\sin \beta + \cos \beta) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)} \times L/2,$$

$$CP33 = (\sin \beta + \cos \beta) \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

I.8. Macierze B^t i B^p

$$\Delta Q_1^{tr} = \Delta Q_1^t - \Delta Q_1^r = B^t \Delta Q_1,$$

$$(I.9) \quad B^t = \begin{bmatrix} CT11, & -CR12 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & CT32 - CR32, & CT33 \end{bmatrix};$$

$$\Delta Q_1^{pr} = \Delta Q_1^p + \Delta Q_1^r = B^p \Delta Q_1,$$

$$(I.10) \quad B^p = \begin{bmatrix} CP11, & CR12 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & 0 \\ 0 & , & CP32 + CR32, & CP33 \end{bmatrix}.$$

ZALĄCZNIK II

A) Powierzchnia nośności krańcowej po sprężystym wyboczeniu środka w przypadku $V \leq V_{kr}$

A.1. Zniszczenie elementu, następuje przez uplastycznienie mniejszej półki i przyległego skrajnego włókna środka — na skutek ściskania mniejszej półki. Jeśli $M = 0$, to

$$(II.1) \quad \begin{aligned} N_{kn}^v &= 2(\sigma_0 A_{mp} + \sigma_0 t_s C), \quad \text{gdy } V = 0, \\ N_{knp} &= 2\sigma_0 A_{mp}, \quad \text{gdy } V = V_{kr}. \end{aligned}$$

Jeśli $N = 0$, gdy $V = 0$ oraz $A_{mp} > A_{dp} + t_s (b/2 - C)$, to

$$(II.2) \quad M_{kn} = \sigma_0 A_{mp} h + \sigma_0 t_s [C(h - 2c/3)] - \sigma_0 t_s b^2/6.$$

Jeśli $M = 0$, gdy $V = 0$ oraz $A_{mp} \leq A_{dp} + t_s (b/2 - C)$, to

$$(II.2'') \quad M_{kn} = \sigma_0 A_{mp} h + \sigma_0 t_s C(h - 2c/3) - (\sigma_0 A_{mp} + \sigma_0 t_s C)/(A_{dp} + t_s b/2) t_s b^2/6.$$

Jeśli siła tnąca $V = V_{kr}$, szerokość efektywna maleje do zera, to

$$(II.3) \quad M_{knp} = \sigma_0 A_{mp} h.$$

Wobec założenia o liniowości związku pomiędzy naprężeniami normatywnymi i ułamkiem M/N powierzchnię stanów granicznych możemy aproksymować płaszczyzną równaniem

$$(II.4) \quad F_{kn} = \frac{N}{N_{kn} - (N_{kn} - N_{knp}) V/V_{kr}} + \frac{M}{M_{kn} - (M_{kn} - M_{knp}) V/V_{kr}} - 1 = 0.$$

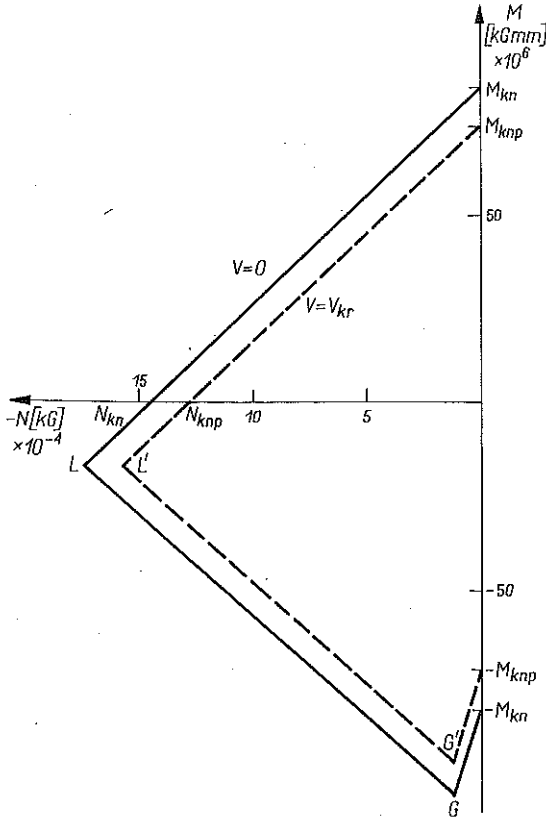
A.2. Zniszczenie elementu następuje przez uplastycznienie mniejszej półki i przyległego skrajnego włókna średnika na skutek rozciągania mniejszej półki.

Przypadkowi temu odpowiada na rys. 7, przedstawiającym warstwicę powierzchni stanu granicznego w płaszczyźnie (M, N) dla $V = 0$ oraz $V = V_{kr}$, sporządzonym dla dwuteowego przekroju ramy z przykładu nr 1 linia $(G, -M_{kn})$ (dla $V = 0$) oraz linia $(G', -M_{knp})$ dla $(V = V_{kr})$. Jeśli oznaczymy współrzędne punktu G przez $(N_3, 0, M_3)$, moment zaś zginający odpowiadający punktowi G' przez M_4 , to równanie płaszczyzny opisującej omawiany warunek stanu krańcowego przybierze postać

$$(II.5) \quad F_{kn} = -(N - N_3)/N_3 + (M + M_3)/(M_4 - M_3) = 0,$$

przy czym

$$(II.6) \quad \begin{aligned} N_3 &= N_{M \max} - (N_{M \max} - N_{M \max p})(V/V_{kr}), \\ M_3 &= M_{\max} - (M_{\max} - M_{p \max})(V/V_{kr}), \\ M_4 &= M_{kn} - (M_{kn} - M_{knp})(V/V_{kr}), \\ M_{\max} &= \sigma_0 (A_{mp} + A_{dp}) h/2 + t_s c \sigma_0 \left(\frac{h}{2} - \frac{2}{3} c \right) + Lh^2 \sigma_0/12, \\ M_{p \max} &= \sigma_0 (A_{dp} + A_{mp}) h/2, \\ N_{M \max} &= \sigma_0 A_{dp} + t_s c \sigma_0 - \sigma_0 A_{mp} - t_s h \sigma_0/4, \\ N_{M \max p} &= \sigma_0 (A_{dp} - A_{mp}). \end{aligned}$$



Rys. 7

A.3. Zniszczenie elementu następuje przez uplastycznienie większej półki oraz przyległego skrajnego włókna środkika.

W tym przypadku równanie płaszczyzny opisującej warunek stanu krańcowego przybiera postać

$$(II.7) \quad F_{kn} = -(M + M_2)/(M_3 - M_2) - (N - N_2)/(N_3 - N_2) = 0,$$

przy czym

$$(II.8) \quad \begin{aligned} N_2 &= N_{\max} - (N_{\max} - N_{\max p}) (V/V_{kr}), \\ M_2 &= \sigma_0 (A_{dp} - A_{mp}) h/2, \\ N_{\max} &= \sigma_0 (A_{mp} + A_{dp}) + 2t_s c \sigma_0, \\ N_{\max p} &= \sigma_0 (A_{mp} + A_{dp}). \end{aligned}$$

Przypadkowi temu odpowiadają na rys. 7. warstwicę LG (dla $V=0$) oraz $L'G'$ (dla $V=V_{kr}$).

B) Przypadek $V > V_{kr}$

Siła podłużna \bar{F} obciążająca półkę może być podzielona na części: \bar{F}_N odpowiadająca sile podłużnej N oraz \bar{F}_M odpowiadająca momentowi zginającemu.

Zależnie od tego, która półka jest ściskana, mamy wtedy wzory

$$\bar{F}_N = N \frac{A_{mp}}{A_{mp} + A_{dp}} \quad \text{lub} \quad \text{(II.9)}$$

$$\bar{F}_N = N \frac{A_{dp}}{A_{mp} + A_{dp}}$$

oraz

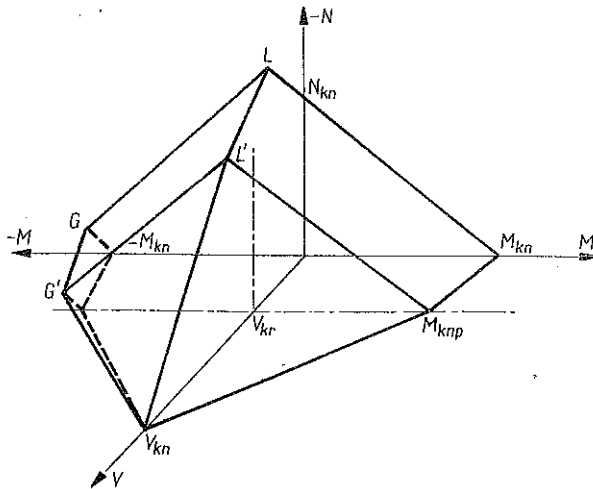
$$\bar{F}_M = \sigma A_{mp} = \frac{M (0,5h_s - e + t_{mp})}{I_y} \quad \text{lub} \quad \text{(II.10)}$$

$$\bar{F}_M = \sigma A_{dp} = \frac{M (0,5h_s + e + t_{mp})}{I_y}$$

Mamy więc związek $\bar{F} = \bar{F}_N + \bar{F}_M$ pozwalający napisać warunek wytrzymałości krańcowej

$$F_{kn}(N, M, V) = 0, \quad \text{(II.11)}$$

przy czym \bar{F} wyznaczamy w zależności od sposobu zniszczenia półki rozpatrując pola naprężeń związane z uplastycznieniami przekrojów, stosując



Rys. 8

uproszczenia równania:

$$(II.12) \quad \bar{F} = \pm \sigma_0 A_{mp} \sqrt{1 - L^2/4h\sigma_0 A_{mp} t_{mp} (|V| - V_{kr})} - (|V| - V_{kr})/2,$$

$$\bar{F} = \pm \sigma_0 A_{dp} \sqrt{1 - L^2/4h\sigma_0 A_{dp} t_{dp} (|V| - V_{kr})} - (|V| - V_{kr})/2.$$

Przyjmujemy, przy tym znak przed wyrażeniem taki sam, jak znak siły \bar{F} . Bardziej szczegółową analizę można znaleźć w pracach [2 i 5]. W programie numerycznym wprowadzono dalsze uproszczenia, aproksymując powierzchnię wytrzymałości krańcowej dla $V > V_{kr}$ za pomocą płaszczyzn jak to pokazano na rys. 8.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

1. J. BAUER, M. KLEIBER, W. SOSNOWSKI, *Numeryczna analiza dwuteowych sprężysto-plastycznych ram płaskich z uwzględnieniem wyboczenia środników*, część I, Rozpr. Inż., 33, 3, 1985.
2. Y. UEDA S. M. H. RASHED, *The idealized structural unit method and its application to deep girder structures*, Computers and Structures, 18, 2, 277-293, 1984.
3. Y. UEDA, S. M. H. RASHED, *An ultimate transverse strength analysis of ship structures*, J. Soc. Naval Arch. Japan, 136, 87-104, 1974.
4. J. BAUER, B. BONI, M. KLEIBER, A. SAWCZUK, W. SOSNOWSKI, *Numeryczna analiza nośności granicznej dwuteowych ram okrętowych z uwzględnieniem lokalnego wyboczenia środników*, Sprawozdanie dla Polskiego Rejestru Statków, etap II, Warszawa 1980.
5. S. P. ТИМОШЕНКО, I. M. GERE, *Teoria stateczności sprężystej*, Arkady, 1961.
6. A. С. ВОЛЬМИР, *Устойчивость упругих систем*, Москва 1963.
7. А. Г. ПАНОВКО, И. А. БИРТЕР, *Справочник: прочность, устойчивость колебания*, том 3, Москва 1968.
8. Z. BRZOSKA, *Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych*, Warszawa, 1961.
9. *Handbook of structural stability*, Column Research Committee of Japan, Corona Publishing Camp., Tokyo 1971.
10. M. ŻYCZKOWSKI, *Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych*, [w]: Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji (red. Z. WASZCZYŹYŃ), Komitet Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN, Ossolineum, Wrocław 1981, s. 7-80.

РЕЗЮМЕ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУТАВРОВЫХ ПЛОСКИХ РАМ С УЧЕТОМ БОКОВОГО ИЗГИБА ПОЛОТНА

ЧАСТЬ II. АНАЛИЗ ЛОКАЛЬНОГО БОКОВОГО ИЗГИБА ПОЛОТНА И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

В первой части представлены общие основы анализа и упруго-пластический анализ. Настоящая часть составляет продолжение предыдущей части и содержит анализ локаль-

ного бокового изгиба полотна. Эффекты бокового изгиба учтены, допуская возможность упругого или упруго-пластического бокового изгиба стенок балок, а также анализируя подробно несущую способность элементов после бокового изгиба.

SUMMARY

PLANE I-BEAM FRAMES — NUMERICAL ANALYSIS ACCOUNTING FOR INELASTIC MATERIAL PROPERTIES AND THE LOCAL WEB BUCKLING

PART II. ANALYSIS OF WEBS LOCAL BUCKLING AND NUMERICAL EXAMPLES

In part I of the paper the fundamentals of elastic-plastic analysis of frames made up of deep I girders were presented. In this part buckling of the web is additionally considered. Conditions of elastic and elastic-plastic web buckling are given. Post-buckling stiffness matrices are derived for different conditions at the web boundaries.

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

Praca została złożona w Redakcji dnia 16 października 1984 r.